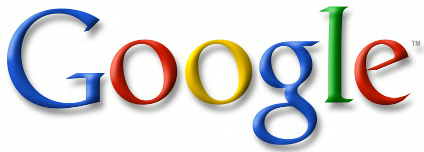
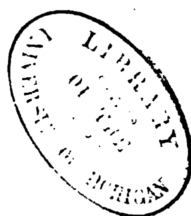





LIBRARY
UNIVERSITY OF MICHIGAN

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PRÉCÉDÉES DES ÉLÉMENTS

DE LA TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

PUBLIÉS PAR LA MÊME LIBRAIRIE :

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE, 8e édition, 1 volume in-8°. Prix, broché : 4 fr.
Ouvrage autorisé par le Conseil royal de l'Instruction publique.

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE, suivies de notions élémentaires de GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 2e édition, 1 vol. in-8°, avec seize planches gravées. Prix, broché : 7 fr. 50 cent.
Ouvrage autorisé par le Conseil royal de l'Instruction publique.

ÉLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE rectiligne et sphérique, 1 volume in-8°, avec une planche gravée. Prix, broché : 2 fr.
Ouvrage autorisé par l'Université.

LEÇONS D'ALGÈBRE, 1 volume in-8°. Prix, broché : 7 fr. 50 cent.

THÉORIE DE L'ÉLIMINATION entre deux équations de degré quelconque à deux inconnues, brochure in-4°. Prix : 2 fr. 50 cent.

AVIS.

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de notre griffe sera réputé contrefait.

L. Hachette et Cie

PARIS. DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET, RUE DE VAUGIRARD, 9.

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PRÉCÉDÉES DES ÉLÉMENTS

DE LA TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE

PAR

P. L. CIRODDE

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU COLLÉGE ROYAL DE HENRI IV

OUVRAGE AUTORISÉ

PAR LE CONSEIL ROYAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

Deuxième Édition



L. HACHETTE ET Cie

LIBRAIRES DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE

A PARIS
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12
(Quartier de l'École de Médecine)

A ALGER
RUE DE LA MARINE, N° 117
(Librairie centrale de la Méditerranée)

1848

On a marqué d'une étoile (*) les articles qui ne sont pas d'une importance immédiate et que l'on pourra omettre à une première lecture.

Les numéros placés entre parenthèses indiquent qu'il faut toujours se reporter aux articles correspondants.

AVERTISSEMENT

POUR CETTE SECONDE ÉDITION.

A l'époque où je publiai la première édition de mes *Leçons de Géométrie analytique,* les questions de l'examen pour l'admission à l'École Polytechnique avaient pris une extension démesurée. Ainsi on interrogeait les candidats non-seulement sur les méthodes des *tangentes,* des *asymptotes,* des *centres* et des *diamètres,* mais encore sur la détermination des *points maximums et minimums,* des *points d'inflexion,* sur la *discussion des courbes d'ordre quelconque,* sur leur *similitude,* etc., etc. C'était donc la *Géométrie générale* que les professeurs avaient à enseigner à leurs élèves; de sorte que l'étude des propriétés des courbes du second ordre devait se déduire, comme simple application, des théories dont nous venons de parler. Tel était l'ordre tracé par les exigences des examens, et que j'avais dû suivre d'abord dans mes cours pendant les années scolaires 1838-1839, 1840-1841, 1842-1843, et ensuite dans la rédaction de mon livre.

Depuis lors le cercle des matières de l'examen a été rétréci, ou plutôt est rentré dans ses premières limites. En conséquence, sans vouloir supprimer aucune des théories qui font de mon livre un *Traité complet de Géométrie analytique,* j'ai cru devoir, dans l'intérêt des élèves et pour la commodité des professeurs qui voudront bien prendre mon ouvrage pour texte de leurs leçons, modifier dans cette seconde édition le plan que j'avais suivi dans la première. Ainsi, j'ai fait suivre la détermination

des *lignes diamétrales* des courbes de la théorie complète des lignes du second ordre; de sorte que les élèves trouveront ainsi réuni, comme en un faisceau, tout ce qui est *indispensable* pour se présenter aux examens de l'École Polytechnique.

Après avoir établi l'identité des courbes du second ordre avec les *sections coniques*, j'ai donné, comme dans la première édition, les moyens de trouver la forme des courbes, quel que soit le degré de leur équation, en cherchant dans quel sens elles tournent leur *concavité* ou leur *convexité*, en déterminant leurs *points maximums et minimums*, leurs *points singuliers*, etc. La *théorie de la similitude* termine la Géométrie plane.

On m'avait conseillé de rejeter à la fin de l'ouvrage la *construction des équations du troisième et du quatrième degré*, à l'aide de la parabole et de la circonférence de cercle; mais j'ai vu si souvent les candidats embarrassés, dans les examens, pour effectuer ces constructions qu'ils avaient étudiées trop légèrement à la fin de leur cours de mathématiques spéciales, que j'ai persisté à croire qu'il était bon de fournir aux professeurs les moyens d'exercer de bonne heure leurs élèves à la *résolution complète* des problèmes qui conduisent à des équations du troisième et du quatrième degré.

On m'a dit encore que les élèves se plaignaient que je n'eusse pas fait un seul chapitre de la théorie de la circonférence de cercle. Voici ma réponse : Pour moi cette courbe n'est qu'une ellipse dont les axes sont égaux, de sorte qu'ayant établi les propriétés de cette seconde courbe, j'ai ainsi démontré celles de la première. En second lieu, je me suis trouvé très-heureux d'avoir à ma disposition la circonférence pour me fournir des exemples

simples de l'application de la méthode générale des tangentes et des contacts des courbes; enfin j'ai eu soin de réunir dans la table des matières, sous ce titre : *Équations et propriétés de la circonférence*, tous les numéros dont l'ensemble constitue une théorie complète de cette courbe.

Il est inutile, sans doute, d'ajouter que je me suis efforcé d'améliorer mes démonstrations chaque fois qu'elles m'en ont paru susceptibles, et de profiter des conseils que j'ai reçus; et je dois, sous ce rapport, une vive reconnaissance à MM. les professeurs *Catalan* et *Chevillard*, pour les remarques judicieuses qu'ils ont bien voulu me communiquer.

P. L. C.

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PRÉCÉDÉES DES ÉLÉMENTS

DE LA TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

TRIGONOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. *La* TRIGONOMÉTRIE *a pour objet de résoudre les triangles, c'est-à-dire de déterminer les valeurs numériques de leurs angles et de leurs côtés, au moyen d'un nombre de données suffisant.*

2. La géométrie élémentaire fournit une première solution de ce problème ; car, comme elle apprend à construire un triangle quand on connaît trois de ses six *éléments*, pourvu que, parmi les données, il y ait au moins un côté, on conçoit que si, après avoir construit sur une feuille de dessin un triangle semblable au triangle cherché, on rapporte les inconnues sur l'*échelle* dont on se sera servi si ce sont des lignes, ou sur le *rapporteur* si ce sont des angles, on obtiendra des valeurs approchées de ces inconnues. Mais les instruments que l'on est obligé d'employer sont toujours défectueux, quelque soin que l'on ait apporté à leur confection, de sorte

que les résultats trouvés par leur secours ne sont que grossièrement approchés, et par conséquent n'atteignent presque jamais le degré de précision dont on peut avoir besoin. On parviendra, au contraire, à des valeurs des inconnues aussi exactes que l'on voudra, si l'on peut *construire des formules qui donnent les valeurs des parties inconnues du triangle que l'on veut résoudre, en fonction des données de la question.* Tel est le problème que se propose la trigonométrie et dont nous allons développer complétement la solution.

3. Les géomètres, qui les premiers ont entrepris de *calculer* les éléments inconnus d'un triangle en fonction de ceux qui étaient donnés, ont dû se trouver arrêtés par la difficulté d'établir des équations entre les angles et les côtés de ce triangle. Mais, en observant qu'il existe une relation indispensable entre un arc et sa corde, et qu'ainsi l'une de ces deux quantités étant connue, l'autre s'ensuit nécessairement, ils ont pu décomposer le problème général de la trigonométrie en deux parties essentiellement distinctes. Dans la première, on s'est proposé de construire une table à deux colonnes, dont l'une renfermât tous les arcs croissant par degrés très-petits depuis zéro jusqu'à une demi-circonférence, et dont l'autre colonne contînt les cordes de ces arcs, que, pour plus de simplicité, on peut supposer décrits avec l'unité linéaire pour rayon. On comprend qu'on pourra, en consultant cette table, trouver la corde d'un arc donné, et réciproquement; de la même manière qu'avec une table de Logarithmes on passe d'un nombre à son logarithme, *et vice versa.* L'autre partie du problème a pour objet de trouver des relations entre les côtés d'un triangle et les cordes des arcs qui mesurent ses angles. Tel était le système de trigonométrie fondé par HIPPARQUE*; mais les Arabes et les modernes ensuite l'ont considérablement perfectionné, en remplaçant

* On comprend que ce grand astronome ait pu calculer la *table* des cordes dont nous venons de parler; car, ARCHIMÈDE ayant donné une formule pour déterminer la corde qui sous-tend la moitié d'un arc dont la corde est connue, il est facile, en partant du sixième de la circonférence qui a pour corde l'unité, de parvenir à calculer la valeur de la corde d'un arc aussi petit que l'on voudra; de sorte qu'en prenant cet arc pour unité, on en déduira les cordes des arcs double, triple, quadruple, quintuple.... On parviendra ainsi à la corde qui sous-tend la demi-circonférence.

les cordes des arcs par d'autres lignes qui ont avec ces arcs une liaison tout aussi intime que leurs cordes. Nous allons définir ces *lignes trigonométriques*, et, après avoir fait connaître des formules, dont quelques-unes, inutiles pour la résolution même des triangles, sont cependant d'une grande importance dans toutes les parties des mathématiques, nous donnerons le moyen de construire les *tables trigonométriques*, et nous terminerons par les formules qui expriment les relations qui lient les côtés d'un triangle avec les lignes trigonométriques de ses angles.

4. Nous adopterons la division sexagésimale de la circonférence, c'est-à-dire que nous la supposerons partagée en 360°, chaque degré en 60′, et chaque minute en 60″. De plus, comme nous considérerons le plus souvent des arcs décrits avec l'unité linéaire pour rayon, nous représenterons la longueur de la demi-circonférence par la lettre π, qui, étant employée ordinairement pour désigner le rapport de la circonférence au diamètre, exprime ainsi la longueur de la demi-circonférence dont le rayon est égal à l'unité.

5. Soient ABA′B′A une circonférence quelconque, et dans cette circonférence deux diamètres AA′ et BB′, qui se coupent à angles droits. Si, à partir du point A, considéré comme *origine*, nous prenons sur cette circonférence un arc quelconque AM, et que de son *extrémité* M nous abaissions la perpendiculaire MP sur le diamètre A′A, cette perpendiculaire sera appelée le *sinus* de l'arc AM. Ainsi, *le sinus d'un arc est la perpendiculaire abaissée de son extrémité sur le rayon qui passe par son origine.* Fig. 1.

6. Prolongeons MP jusqu'en M‴; il est clair que le sinus MP est la moitié de la corde MM‴, de sorte que *le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double;* d'où l'on voit que la construction d'une table de sinus revient à la construction d'une table des cordes, *et vice versa.*

Il suit de là que $\sin 30° = \frac{1}{2}R$, en appelant R le rayon du cercle ABA′B′A; car ce sinus est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc de 60°, c'est-à-dire le sixième de la circonférence.

7. Si à l'extrémité du rayon OA on mène la tangente AT, terminée à la rencontre du prolongement du rayon OM, on

dira que AT est la tangente et OT la sécante de l'arc AM. Ainsi, *la* TANGENTE *d'un arc est la partie que les directions des rayons qui passent par les extrémités de l'arc interceptent sur la tangente menée à l'une d'elles, et la* SÉCANTE *est la droite qui, allant du centre à l'extrémité de l'arc, va se terminer à la rencontre de la tangente menée à son origine.*

8. Le *complément* d'un arc est, comme on sait, l'excès du quadran sur cet arc, de sorte que le complément d'un arc plus grand qu'un quadran est négatif.

Nous appellerons COSINUS, COTANGENTE *et* COSÉCANTE *d'un arc le* SINUS, *la* TANGENTE *et la* SÉCANTE *du complément de cet arc.* Ainsi, le complément de l'arc AM étant MB, on voit que MQ, BS et OS sont respectivement le cosinus, la cotangente et la cosécante de cet arc AM.

Si l'on remarque que MQ=OP, on pourra dire que *le cosinus d'un arc est égal à la distance du pied de son sinus au centre.*

9. Nous représenterons l'arc AM par a, et, en conséquence, son complément sera désigné par $(90^\circ - a)$, de sorte que les définitions précédentes du cosinus, de la cotangente et de la cosécante d'un arc, seront exprimées algébriquement par les formules :

$$\cos a = \sin(90^\circ - a),\quad \cot a = \text{tang}(90^\circ - a),$$
$$\text{coséc}\, a = \text{séc}(90^\circ - a).$$

Il est évident que réciproquement on aura aussi

$$\sin a = \cos(90^\circ - a),\quad \text{tang}\, a = \cot(90^\circ - a),$$
$$\text{séc}\, a = \text{coséc}(90^\circ - a),$$

car on peut regarder a comme le complément de $(90^\circ - a)$.

10. Avant d'aller plus loin, il est important d'établir quelques notions sur la considération des quantités négatives en
Fig. 2. géométrie. Soient A et B deux points fixes, situés sur la droite indéfinie UV, M un point qui se meut sur cette droite : si l'on désigne par a, x et y les distances respectives AB, AM et MB, il est clair que, quand le point M se trouvera à droite de B, on aura

$$x = a + y;$$

mais que, s'il vient occuper une position M′ située entre A et B, on aura $$x = a - y,$$

et que, s'il se trouve en M'' à gauche de A, sa distance à ce point sera donnée par l'équation

$$x=y-a.$$

Ainsi, il faut trois équations pour déterminer, dans tous les cas, la distance du point M au point A. Mais, si l'on regarde comme positives les distances comptées dans le sens UV et comme négatives celles qui seront mesurées dans le sens VU, la première formule

$$x=a+y$$

déterminera la distance du point M au point A, dans toutes les positions qu'il pourra occuper, et sera ainsi devenue générale. En effet, si ce point vient en M', $x=+AM'$, $y=-BM'$ et cette équation devient en substituant

$$+AM'=AB-BM',$$

ce qui est vrai; car le second membre de cette égalité signifie que le point mobile s'est éloigné du point A de la quantité AB dans le sens UV, et qu'il a ensuite rétrogradé, dans le sens contraire VU, de la quantité BM'; de sorte que sa distance au point A est actuellement AM', laquelle doit être précédée du signe $+$, puisqu'elle est comptée dans le sens UV.

Si le point M est en M'', on a $x=-AM''$, $y=-BM''$ et l'équation $x=a+y$ devient

$$-AM''=AB-BM'',$$

égalité identique, par la même raison que tout à l'heure.

Ainsi, *pour généraliser nos formules, nous* CONVIENDRONS *d'affecter de signes contraires deux distances qui seront comptées, sur une même ligne, droite ou courbe, dans des sens directement contraires*. Nous reviendrons plus tard sur ce principe, pour lui donner tous les développements qu'exige son importance (*Géom. anal.*, **34**).

11. Il suit de là que les arcs comptés dans le sens AB étant supposés positifs, ceux qui seront comptés de A vers B' seront négatifs, et qu'en regardant comme positives toutes les lignes trigonométriques d'un arc moindre que le premier quadran, il faudra donner le signe $+$ aux sinus des arcs dont l'extrémité se trouvera au-dessus du diamètre AA', et le signe $-$ aux sinus des arcs dont l'extrémité se trouvera au-dessous de ce diamètre. Ainsi le sinus de l'arc ABM' est $+M'P'$; mais celui de ABM'' est $-M''P'$. Fig. 1.

On verra de même que les tangentes des arcs dont l'extrémité est dans le premier ou dans le troisième quadran seront positives, mais que celles des arcs qui se termineront dans les autres quadrans seront négatives.

Quant aux sécantes, celles des arcs du premier et du quatrième quadran seront précédées du signe $+$, et celles des autres le seront du signe $-$. En effet, dans le quatrième, comme dans le premier quadran, la sécante est dirigée dans le sens même du rayon qui va à l'extrémité de l'arc, tandis que, pour les arcs qui se terminent dans le second et dans le troisième quadran, la sécante est dirigée suivant le prolongement de ce rayon.

Le cosinus d'un arc étant la perpendiculaire abaissée de son extrémité sur le diamètre BB', on voit que les cosinus des arcs qui se termineront dans le premier et dans le quatrième quadran seront positifs, et que ceux des autres seront négatifs, et que, par conséquent, la sécante et le cosinus d'un arc ont constamment les mêmes signes.

Enfin, on reconnaîtra facilement que la cotangente et la tangente d'un arc, et que sa cosécante et son sinus ont les mêmes signes.

12. Soient AM et AM''' deux arcs *quelconques*, égaux et de signes contraires : leurs extrémités sont sur une même corde perpendiculaire au diamètre AA', et qui par conséquent est coupée en deux parties égales par ce diamètre; mais l'une d'elles est le sinus de l'arc AM, l'autre est celui de AM'''; donc *les sinus de deux arcs égaux et de signes contraires sont eux-mêmes égaux et de signes contraires;* donc on a la formule générale :

$$\sin a = -\sin(-a).$$

Les arcs AM et —AM''' ont pour compléments respectifs

$$AB - AM = BM, \quad \text{et} \quad AB - (-AM''') = BM''';$$

ainsi, les compléments des arcs a et $-a$ ont pour origine commune le point B, et leurs extrémités se trouvent sur une même parallèle au diamètre BB'; donc leurs sinus sont égaux; mais ces sinus sont les cosinus des arcs a et $-a$; donc on a la formule générale :

$$\cos a = \cos(-a),$$

c'est-à-dire, que *les cosinus de deux arcs égaux et de signes contraires sont égaux et de mêmes signes.*

On établira, avec la même facilité, les formules :

$$\text{tang}\, a = -\text{tang}(-a), \quad \cot a = -\cot(-a);$$
$$\text{séc}\, a = \text{séc}(-a), \quad \text{cos\acute{e}c}\, a = -\text{cos\acute{e}c}(-a).$$

13. Nous allons examiner actuellement *comment varient les lignes trigonométriques d'un arc, lorsque cet arc croît depuis zéro jusqu'à l'infini positif et jusqu'à l'infini négatif*;* mais d'abord nous pourrons nous borner à considérer des arcs positifs, en vertu des formules établies au n° **12**; et nous ne nous occuperons non plus que des sinus et des cosinus, parce que nous donnerons bientôt des formules, au moyen desquelles on évalue facilement les tangente, cotangente, sécante et cosécante d'un arc dont on connaît le sinus et le cosinus (**21** et **22**), de sorte qu'au moyen de ces formules il sera facile de déduire, des variations du sinus et du cosinus d'un arc, celles de ses autres lignes trigonométriques (**25**).

Supposons donc que le point M coïncide avec le point A, origine des arcs; l'arc a sera nul, ainsi que son sinus; mais son cosinus sera égal au rayon. Donc, pour

$$a=0, \quad \sin a=0, \quad \cos a=\text{R}.$$

Si le *point décrivant* M s'avance vers B, il s'éloignera du diamètre A'A, et se rapprochera du diamètre BB'. Donc le sinus de l'arc AM augmentera, mais son cosinus diminuera; donc,

si a aug^{te}, $\sin a$ aug^{te}, $\cos a$ dimin^{e}.

Quand le point décrivant M, sera parvenu en B, le sinus MP sera devenu égal au rayon OB, mais le cosinus MQ sera nul. Donc

$$\text{si } a=90^\circ, \quad \sin a=\text{R}, \quad \cos a=0.$$

Il est bon d'observer que, quand a vaut 45°, le triangle

---

* Les angles d'un triangle étant chacun moindres que deux angles droits, les arcs qui les mesurent ne peuvent pas surpasser une demi-circonférence, mais l'usage des formules trigonométriques n'est pas borné à la résolution des triangles, comme nous l'avons dit ci-dessus (3); on les emploie dans une foule de questions où l'on a à considérer des arcs positifs et négatifs de toute grandeur.

OMP est isocèle-rectangle; qu'ainsi le sinus de 45° est égal au cosinus de cet arc, et que le théorème de *Pythagore* donnant $PM=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R}{2}\sqrt{2}$, on a

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{R}{2}\sqrt{2}.$$

Le point décrivant M, continuant son mouvement au delà de B, se rapprochera du diamètre AA′, et s'éloignera au contraire de BB′; ainsi le sinus de l'arc a diminuera, mais son cosinus augmentera en valeur absolue; je dis en valeur absolue, parce que ce cosinus sera négatif, tant que le point M n'aura pas dépassé le point B′ (11). Donc

$$\text{si } a \text{ aug}^{\text{te}},\quad \sin a \text{ dimin}^{\text{e}},\quad \overline{\cos a} \text{ aug}^{\text{te}}.$$

(Nous mettons le signe — au-dessus de $\cos a$ pour indiquer que ce cosinus est négatif.)

Lorsque le point M sera parvenu au point A′, le sinus de a sera redevenu nul, comme au point A, et le cosinus sera encore une fois égal au rayon, mais au rayon pris négativement. Donc

$$\text{si } a=180^\circ,\quad \sin a=0,\quad \cos a=-R.$$

Remarquons, avant d'aller plus loin, que le sinus et le cosinus de l'arc a ont repassé, depuis 90° jusqu'à 180°, par les mêmes valeurs absolues qu'ils avaient prises de 0° à 90°, et que ces valeurs étaient égales quand les extrémités des arcs correspondants se trouvaient sur une même corde parallèle au diamètre AA′. Ainsi les arcs AM et ABM′ ont des sinus égaux et de mêmes signes, mais leurs cosinus MQ et M′Q diffèrent par les signes. Or, ces arcs AM et ABM′ sont *supplémentaires*, puisque leur somme fait une demi-circonférence; donc

Les sinus de deux arcs supplémentaires sont égaux, mais les cosinus de deux pareils arcs sont égaux et de signes contraires, ce que l'on exprime algébriquement par les deux formules suivantes :

$$\sin(180^\circ-a)=\sin a \quad \text{et} \quad \cos(180^\circ-a)=-\cos a.$$

En supposant que le point décrivant M continue son mou-

vement au delà de A′, on verra facilement que

si a aug^{te}, en restant $< 270^\circ$,	$\overline{\sin a}$ aug^{te},	$\overline{\cos a}$ dimin^{e},
$a = 270^\circ$,	$\sin a = -\text{R}$,	$\cos a = 0$,
a aug^{te}, en restant $< 360^\circ$,	$\overline{\sin a}$ dimin^{e},	$\cos a$ aug^{te},
$a = 360^\circ$,	$\sin a = 0$,	$\cos a = \text{R}$.

Enfin si le point décrivant M continue son mouvement, on aura des arcs plus grands que la circonférence, et qui auront évidemment les mêmes lignes trigonométriques que ceux qui ont été décrits dans la première révolution, puisque le point M repassera successivement par toutes les positions qu'il avait occupées d'abord. D'où l'on conclut que *les lignes trigonométriques d'un arc ne changent pas lorsqu'on lui ajoute un nombre quelconque de circonférences.*

En résumant la discussion à laquelle nous venons de nous livrer, on reconnaîtra que *les sinus croissent avec les arcs correspondants dans le premier et dans le troisième quadran, et décroissent dans le deuxième et dans le quatrième. C'est le contraire pour les cosinus, dont la marche est inverse de celle des sinus.*

14. Il suit immédiatement de là qu'il y a une infinité d'arcs qui ont la même ligne trigonométrique : or, il sera très-important de rechercher les formules générales qui comprendront tous ces arcs. Si, d'après la remarque faite au commencement du nº **13**, nous voulons nous borner aux arcs correspondants à un même sinus ou à un même cosinus, il n'y aura qu'à chercher la solution générale du problème suivant :

Étant donné le sinus ou le cosinus d'un arc appartenant à une circonférence donnée, trouver cet arc.

Soient ABA′B′ la circonférence donnée et m la longueur du sinus donné. On tracera deux diamètres rectangulaires AA′ et BB′; puis, en considérant le point A comme l'origine des arcs, on prendra sur BB′ une distance $\text{OQ} = m$, et par le point Q on tirera la corde MM′ parallèle au diamètre AA′. Il est clair que tous les arcs positifs et négatifs qui, commençant au point A, finiront au point M ou au point M′, auront leur sinus égal à m, et qu'ils seront les seuls qui jouiront de cette propriété. La question est donc réduite à chercher les formules de tous ces arcs.

Pour y parvenir, *je désigne par* α *le plus petit de tous les arcs positifs qui ont* m *pour sinus*, ainsi $AM=\alpha$, et alors l'arc AM', qui en est le supplément, sera représenté par $\pi-\alpha$. Mais on obtiendra évidemment tous les arcs qui ont leur extrémité au point M, en ajoutant à l'arc AM un nombre *indéterminé* de circonférences positives ou négatives : donc tous ces arcs seront compris dans la formule $2k\pi+\alpha$, k étant un nombre *entier* quelconque, positif ou négatif. On verra de même que l'expression algébrique de tous les arcs qui finiront au point M' est

$$2k\pi+\pi-\alpha=(2k+1)\pi-\alpha.$$

Ainsi les deux formules

$$2k\pi+\alpha, \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi-\alpha,$$

résolvent le problème.

Nous avons supposé que le sinus donné m était positif; mais s'il est négatif, il n'y aura de changement qu'en ce qu'au lieu de le porter de O en Q sur OB, on le portera de O en Q' sur OB', et on retombera ainsi sur les mêmes formules, pourvu que l'on désigne toujours par α le plus petit de tous les arcs positifs qui ont $-m$ pour sinus.

13. Si l'on observe que la différence de deux arcs compris à la fois dans la première ou dans la seconde de ces formules est un nombre pair de demi-circonférences, tandis que la somme de deux arcs qui appartiennent respectivement à l'une et à l'autre est au contraire un multiple impair de la demi-circonférence, on en conclura ce théorème important :

Pour que deux arcs aient le même sinus, il faut et il suffit que leur différence soit un nombre pair de demi-circonférences, ou que leur somme soit un nombre impair de demi-circonférences. Ainsi a désignant un arc quelconque positif ou négatif, tous les arcs qui auront le même sinus que lui seront donnés par l'une ou par l'autre des deux formules

$$2k\pi+a \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi-a,$$

de sorte qu'on a

$$\sin(2k\pi+a)=\sin a, \quad \text{et} \quad \sin[(2k+1)\pi-a]=\sin a.$$

Mais on peut dans ces formules changer a en $-a$, et comme $\sin(-a)=-\sin a$ (**12**), on aura

$$\sin(2k\pi-a)=-\sin a, \quad \text{et} \quad \sin[(2k+1)\pi+a]=-\sin a.$$

Si maintenant on groupe ces deux formules avec les précédentes, il viendra

$$\sin(2k\pi \pm a) = \pm \sin a \qquad [1],$$
$$\sin[(2k+1)\pi \pm a] = \mp \sin a \qquad [2],$$

équations dans les deux membres desquelles il faut prendre en même temps les signes supérieurs ou les signes inférieurs.

16. Occupons-nous maintenant de la détermination des arcs qui ont pour cosinus une ligne donnée n. Nous prendrons sur le diamètre AA′ une partie $OP = n$; par le point P nous mènerons une parallèle au diamètre BB′, et les points M et M‴, où elle coupera la circonférence, seront les extrémités de tous les arcs qui, commençant au point A, auront n pour cosinus. Cherchons donc les formules de tous ces arcs. Si AM est représenté par α, AM‴ le sera par $2\pi - \alpha$, de sorte qu'on obtiendra tous les arcs qui finissent en M et en M‴, en ajoutant un nombre quelconque de circonférences positives ou négatives à chacun des deux arcs α et $2\pi - \alpha$, ce qui donnera

$$2k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad 2k\pi - \alpha,$$

ou, en groupant ces deux formules,

$$2k\pi \pm \alpha.$$

Cette formule convient encore au cas où le cosinus donné serait négatif.

17. On voit que la différence de deux arcs compris dans l'une ou dans l'autre de ces formules, et que la somme de deux arcs dont l'un appartient à la première et l'autre à la seconde, sont égales à un nombre pair de demi-circonférences : de là ce théorème :

Pour que deux arcs aient le même cosinus, il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit un multiple pair de la demi-circonférence. Ainsi a désignant un arc quelconque positif ou négatif, tous les arcs qui auront le même cosinus que lui seront donnés par la formule

$$2k\pi \pm a,$$

de sorte qu'on a

$$\cos(2k\pi \pm a) = \cos a \qquad [3].$$

Si à un arc quelconque on ajoute une demi-circonférence, le nouvel arc et le précédent se termineront aux extrémités d'un même diamètre, et partant leurs cosinus seront égaux

et de signes contraires; or, par cette addition, l'arc $2k\pi \pm a$ devient $(2k+1)\pi \pm a$; donc on a

$$\cos[(2k+1)\pi \pm a] = -\cos a \qquad [4].$$

18. Les formules [2] et [4] étant vraies, quelle que soit la valeur entière positive ou négative donnée à k, on pourra y faire $k=0$, et on en tirera ainsi

$$\sin(\pi - a) = \sin a, \quad \cos(\pi - a) = -\cos a.$$

Mais les arcs a et $(\pi - a)$ sont supplémentaires, et a représente ici un arc positif ou négatif d'une grandeur quelconque; donc le théorème que nous n'avions établi à la page 8 que pour des arcs positifs et plus petits qu'une demi-circonférence se trouve avoir maintenant le plus grand degré de généralité.

19. Pour retrouver au besoin le signe que doit porter le second membre dans les formules [1], [2], [3] et [4], il n'y aura qu'à faire $k=0$ dans le premier, et à voir à quoi il se réduit. Ainsi en supposant $k=0$ dans l'expression $\sin[(2k+1)\pi \pm a]$, il vient $\sin(\pi \pm a)$; mais les deux arcs a et $(\pi + a)$, différant d'une demi-circonférence, se terminent aux extrémités d'un même diamètre, et ont par conséquent leurs sinus égaux et de signes contraires; ceux des arcs $(\pi - a)$ et a sont égaux, puisque ces arcs sont supplémentaires; donc $\sin(\pi \pm a) = \mp \sin a$, et on retrouve par conséquent la formule

$$\sin[(2k+1)\pi \pm a] = \mp \sin a.$$

20. Les formules [1], [2], [3] et [4] nous montrent que *le calcul du sinus ou du cosinus d'un arc quelconque peut toujours se ramener à celui du sinus ou du cosinus d'un arc positif moindre qu'un quadran;* car tout arc peut évidemment être considéré comme un multiple de la demi-circonférence, augmenté ou diminué d'un arc plus petit qu'un quadran; de sorte qu'en vertu des formules citées, son sinus ou son cosinus est égal à *plus* ou à *moins* le sinus ou le cosinus de cet arc moindre qu'un quadran. Veut-on, par exemple, le sinus de 1422 degrés : on divisera 1422 par 180, et comme le reste 162° surpasse 90°, on forcera l'unité sur le quotient 7, de sorte qu'on aura $1422^\circ = 180^\circ.8 - 18^\circ$; or $180^\circ.8$ est un multiple pair de la demi-circonférence; donc $\sin 1422^\circ = -\sin 18^\circ$.

21. Nous allons maintenant établir les relations qui lient entre elles les diverses lignes trigonométriques d'un même arc. Et d'abord si l'on considère le triangle rectangle OMP, dont les deux côtés de l'angle droit sont le sinus et le cosinus de l'arc quelconque $AM = a$, on aura

$$\sin^2 a + \cos^2 a = R^2.$$

Ensuite si l'on observe que les deux triangles OMP et OTA sont semblables, on aura entre leurs côtés homologues la suite de rapports égaux

$$MP : AT :: OP : OA :: OM : OT,$$

ou bien $\sin a : \operatorname{tang} a :: \cos a : R :: R : \text{séc}\, a.$

On tire de la proportion formée par les deux premiers rapports

$$\operatorname{tang} a = R \frac{\sin a}{\cos a},$$

et de celle que forment les deux derniers

$$\text{séc}\, a = \frac{R^2}{\cos a}.$$

Remarquons que ces deux formules donnent les valeurs absolues de $\operatorname{tang} a$ et de $\text{séc}\, a$, quels que soient la grandeur et le signe de l'arc a, parce que dans les deux triangles rectangles OMP et OAT les angles en O seront toujours égaux, puisque les trois points O, P, A sont constamment en ligne droite, ainsi que les points O, M, T, de sorte que ces triangles ne cesseront pas d'être équiangles.

Nos formules seraient encore vraies, même si les deux triangles OPM et OAT n'existaient plus, ce qui arriverait si l'arc a était un multiple du quadran ; car, si ce multiple est pair, on a

$$\sin a = 0, \quad \cos a = \pm R, \quad \operatorname{tang} a = 0, \quad \text{séc}\, a = \pm R,$$

et si a est un multiple impair du quadran, on a

$$\sin a = \pm R, \quad \cos a = 0, \quad \operatorname{tang} a = \infty, \quad \text{séc}\, a = \infty\ ^*,$$

et ces valeurs vérifieront encore nos formules.

Il n'y a donc plus, pour constater leur généralité, qu'à

* On voit, en effet, que si un arc se termine en B ou en B', la direction de la sécante, coïncidant avec celle du diamètre BB', est alors parallèle à la tangente TOT', de sorte que ces deux lignes peuvent être considérées comme se rencontrant à une distance infinie.

examiner si les signes des seconds membres s'accordent avec ceux des premiers. Or, si l'on considère la formule $\operatorname{tang} a = R\frac{\sin a}{\cos a}$, on voit que quand l'arc a aura son extrémité dans le premier ou dans le troisième quadran, le second membre sera positif comme le premier, et que tous deux seront négatifs, lorsque l'arc a se terminera dans le second ou dans le quatrième quadran (**11**). Ainsi la formule $\operatorname{tang} a = R\frac{\sin a}{\cos a}$ est vraie dans tous les cas. On en dirait autant de l'équation $\operatorname{séc} a = \frac{R^2}{\cos a}$.

22. Si on applique ces deux formules à l'arc $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, on trouvera les équations

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = R\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}, \quad \operatorname{séc}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{R^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)},$$

qui reviennent à

$$\cot a = R\frac{\cos a}{\sin a}, \quad \operatorname{coséc} a = \frac{R^2}{\sin a},$$

puisque $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ est le complément de a. Ces deux dernières équations ont évidemment le même degré de généralité que celles dont on les a déduites.

23. Si dans l'expression de $\operatorname{tang} a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$, on change a en $(k\pi \pm a)$, on trouvera

$$\operatorname{tang}(k\pi \pm a) = R\frac{\sin(k\pi \pm a)}{\cos(k\pi \pm a)};$$

mais si k est pair, le second membre de cette équation revient à $R \cdot \frac{\pm \sin a}{\cos a} = \pm \operatorname{tang} a$; et à $R \cdot \frac{\mp \sin a}{-\cos a} = \pm \operatorname{tang} a$, si k est impair; donc enfin

$$\operatorname{tang}(k\pi \pm a) = \pm \operatorname{tang} a \qquad [5].$$

On verra de même que

$$\cot(k\pi \pm a) = \pm \cot a \qquad [6],$$

les signes se correspondant dans les deux membres de cette équation et de la précédente.

Ces deux formules [5] et [6] nous apprennent que *pour que deux arcs aient la même tangente ou la même cotangente,*

il faut et il suffit que leur différence soit un multiple quelconque de la demi-circonférence, puisque l'expression générale de tous les arcs qui ont la même tangente ou la même cotangente que l'arc a est $k\pi + a$.

24. Si on suppose $k = 1$, et qu'on se borne aux signes inférieurs, il viendra

$$\text{tang}\,(\pi - a) = -\text{tang}\,a, \quad \cot\,(\pi - a) = -\cot a.$$

Donc *les tangentes ou les cotangentes de deux arcs supplémentaires sont égales et de signes contraires.*

Enfin, on pourra faire sur les formules [5] et [6] les mêmes observations que nous avons faites au nº **20** sur les formules [1], [2], [3] et [4].

25. Pour voir comment varient la tangente, la sécante, la cotangente et la cosécante d'un arc quand cet arc varie, on supposera que l'arc a croisse depuis zéro jusqu'à l'infini dans les formules des nºˢ **21** et **22**, et comme les variations correspondantes de $\sin a$ et de $\cos a$ sont connues (**13**), il sera facile de suivre la marche des seconds membres de ces équations (on fera bien de vérifier les résultats sur la figure). On formera ainsi le tableau suivant :

$a = 0$,	$\text{tang}\,a = 0$,	$\text{séc}\,a = R$	$\cot a = \infty$,	$\text{coséc}\,a = \infty$.
a augᵗᵉ $< 90^\circ$,	$\text{tang}\,a$ augᵗᵉ,	$\text{séc}\,a$ augᵗᵉ,	$\cot a$ diminᵉ,	$\text{coséc}\,a$ diminᵉ.
$a = 45^\circ$,	$\text{tang}\,a = R$,	$\text{séc}\,a = R\sqrt{2}$,	$\cot a = R$,	$\text{coséc}\,a = R\sqrt{2}$.
$a = 90^\circ$,	$\text{tang}\,a = \infty$,	$\text{séc}\,a = \infty$,	$\cot a = 0$,	$\text{coséc}\,a = R$.
a augᵗᵉ $< 180^\circ$,	$\text{tang}\,a$ diminᵉ,	$\text{séc}\,a$ diminᵉ,	$\cot a$ augᵗᵉ,	$\text{coséc}\,a$ augᵗᵉ.
$a = 180^\circ$,	$\text{tang}\,a = 0$,	$\text{séc}\,a = -R$,	$\cot a = \infty$,	$\text{coséc}\,a = \infty$.
a augᵗᵉ $< 270^\circ$,	$\text{tang}\,a$ augᵗᵉ,	$\text{séc}\,a$ augᵗᵉ,	$\cot a$ diminᵉ,	$\text{coséc}\,a$ diminᵉ.
$a = 270^\circ$,	$\text{tang}\,a = \infty$,	$\text{séc}\,a = \infty$,	$\cot a = 0$,	$\text{coséc}\,a = -R$.
a augᵗᵉ $< 360^\circ$,	$\text{tang}\,a$ diminᵉ,	$\text{séc}\,a$ diminᵉ,	$\cot a$ augᵗᵉ,	$\text{coséc}\,a$ augᵗᵉ.
$a = 360^\circ$,	$\text{tang}\,a = 0$,	$\text{séc}\,a = R$,	$\cot a = \infty$,	$\text{coséc}\,a = \infty$.

26. Si, comme on le suppose ordinairement, pour plus de simplicité, les arcs que l'on considère sont décrits avec un rayon égal à l'unité linéaire, les formules trouvées aux nºˢ **21** et **22** deviendront :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad [7];$$

$$\text{tang}\,a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad [8]; \qquad \text{séc}\,a = \frac{1}{\cos a} \quad [9];$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad [10]; \qquad \text{coséc}\,a = \frac{1}{\sin a} \quad [11].$$

27. Mais si, après avoir obtenu une formule en prenant l'unité linéaire pour rayon, on voulait savoir ce qu'elle aurait été dans toute autre hypothèse, on observera que si du sommet d'un angle quelconque, comme centre, on décrit entre ses côtés deux arcs MB et M'B', ces arcs seront du
Fig. 3. même nombre de degrés et que leurs lignes trigonométriques seront proportionnelles à leurs rayons, de sorte que l'on aura, par exemple,

$$\frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM'}.$$

Or, si les rayons AM et AM', sont respectivement égaux à l'unité et à r, et que représentant par b la longueur du sinus MP, on appelle a le nombre de degrés des arcs MB et M'B', l'équation précédente deviendra

$$b = \frac{\sin a}{r},$$

d'où l'on voit que dans l'équation trouvée, il suffira de remplacer b, c'est-à-dire $\sin a$ par $\frac{\sin a}{r}$; et comme on en dirait autant des autres lignes trigonométriques, on voit que *pour rétablir le rayon dans les formules trouvées en le supposant égal à l'unité linéaire, il faudra y remplacer chaque ligne trigonométrique par son rapport au rayon.*

Si l'on avait trouvé, par exemple,

$$\text{tang}\,(a+b) = \frac{\text{tang}\,a + \text{tang}\,b}{1 - \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b},$$

on remplacerait $\text{tang}\,(a+b)$, $\text{tang}\,a$ et $\text{tang}\,b$ respectivement par $\frac{\text{tang}\,(a+b)}{r}$, $\frac{\text{tang}\,a}{r}$ et $\frac{\text{tang}\,b}{r}$, et il viendrait ainsi :

$$\frac{\text{tang}\,(a+b)}{r} = \frac{\frac{\text{tang}\,a}{r} + \frac{\text{tang}\,b}{r}}{1 - \frac{\text{tang}\,a}{r} \cdot \frac{\text{tang}\,b}{r}},$$

d'où l'on tirerait facilement

$$\text{tang}\,(a+b) = \frac{r^2(\text{tang}\,a + \text{tang}\,b)}{r^2 - \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}.$$

CHAPITRE II.

DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

---

28. Les *cinq* équations du n° **26** ayant lieu entre les *six* lignes trigonométriques de l'arc a, on pourra toujours, connaissant l'une de ces lignes, trouver les cinq autres. Pour en donner un exemple, nous nous proposerons de *calculer le sinus et le cosinus d'un arc dont la tangente est connue.* Il n'y aura, pour cela, qu'à résoudre les équations

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad [7]; \qquad \text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad [8].$$

Pour y parvenir de la manière la plus simple, nous ajouterons l'unité aux carrés des deux membres de l'équation [8], ce qui donnera, en ayant égard à l'équation [7],

$$1 + \text{tang}^2 a = 1 + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a};$$

et on déduit facilement de cette dernière

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 a = \dfrac{1}{1 + \text{tang}^2 a}, \quad \text{d'où } \cos a = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}}; \\ \text{mais l'équation [8] donne } \sin a = \text{tang}\, a \cos a : \\ \text{donc} \qquad \sin a = \pm \dfrac{\text{tang}\, a}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a}} \end{array}\right\} [12].$$

Dans ces deux formules les signes se correspondent, c'est-à-dire qu'il faut prendre dans toutes deux les signes supérieurs ou les signes inférieurs en même temps, et le problème admet deux solutions, si l'arc a n'est pas donné. En effet, ces formules exprimant le sinus et le cosinus de l'arc a en fonction de la quantité tang a, doivent nous donner le sinus et le cosinus de chacun des arcs dont la tangente est égale à cette grandeur; mais tous les arcs qui ont la même tangente que l'arc a sont compris (**23**) dans la formule

$$k\pi + a;$$

donc nos formules déterminent (**15** et **17**)

$$\sin(k\pi + a) = \pm \sin a, \quad \text{et} \quad \cos(k\pi + a) = \pm \cos a;$$

donc elles devaient nous donner chacune deux valeurs égales et de signes contraires.

Mais si l'arc a est donné, il n'y a plus qu'une seule solution; et, en examinant à quel quadran il appartient, on saura lequel des deux signes il faut prendre devant les valeurs de $\sin a$ et de $\cos a$.

Exemple. Soit $\operatorname{tang} a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; on aura

$$\cos a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin a = \mp\frac{1}{2},$$

de sorte que les deux solutions du problème sont

$$\left(\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin a = -\frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(\cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin a = +\frac{1}{2}\right).$$

Si l'on ajoute que l'arc a est de $150°$, son sinus sera positif, et son cosinus sera négatif, et on aura en conséquence

$$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin 150° = \frac{1}{2}.$$

29. Cherchons actuellement à *calculer les sinus et cosinus de la somme de deux arcs en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs.*

Fig. 4. 1[re] DÉMONSTRATION. Soient $CA = a$ et $CB = b$ deux arcs dont la somme $BCA = a + b$ est *moindre qu'un quadran.* J'abaisse du point C les perpendiculaires CPA′ et CQB′ sur les rayons OA et OB : CP et OP seront le sinus et le cosinus de a, CQ et OQ seront le sinus et le cosinus de l'arc b; de plus, les arcs CA′ et CB′ étant les doubles de CA et de CB, l'arc A′CB′ sera le double de ACB, de sorte que le sinus de ce dernier sera la moitié de la corde A′B′ (6); or, si l'on joint les points A′ et B′ avec l'extrémité D du diamètre CD, on formera un quadrilatère CA′DB′, dans lequel on aura, en vertu du théorème de PTOLÉMÉE (*dans tout quadrilatère inscriptible le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés*),

$$CD.A'B' = CA'.DB' + CB'.DA',$$

d'où, en divisant par 4,

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a;$$

car $\quad DB' = 2OQ = 2\cos b$ et $DA' = 2OP = 2\cos a$.

Pour avoir le cosinus de l'arc $(a+b)$, je tire le diamètre A′E et je joins B′E : cette droite sera le double de $\cos(a+b)$; car, à cause du triangle rectangle A′B′E, on a

$$B'E = \sqrt{4 - 4\sin^2(a+b)} = 2\cos(a+b).$$

Je tire DE, et le quadrilatère inscrit CDEB', donne

$$CD.B'E = DB'.CE - CB'.DE,$$

d'où, en divisant par 4,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

(La figure CA'DE est un rectangle.)

2e DÉMONSTRATION. Soient $CA=a$ et $AB=b$, deux arcs dont je suppose la somme CB moindre qu'un quadran, je joins OA et je tire BE perpendiculairement à cette droite; puis des points A et B j'abaisse sur OC les perpendiculaires AD et BF : on aura évidemment Fig. 5.

$$AD = \sin a,\ OD = \cos a,\ BE = \sin b,\ OE = \cos b,$$
$$BF = \sin(a+b),\ OF = \cos(a+b).$$

Cela posé, je mène par le point E les droites EG et EI parallèlement à AD et à OC; il en résulte

$$\sin(a+b) = EG + BI \quad \text{et} \quad \cos(a+b) = OG - EI,$$

de sorte qu'il s'agit de calculer ces quatre lignes EG, BI, OG et EI en fonction des sinus et des cosinus des arcs a et b. Or, les triangles semblables OAD et OEG donnent

$$OD : OG :: OA : OE :: AD : EG,$$

ou

$$\cos a : OG :: 1 : \cos b :: \sin a : EG.$$

On tire de là

$$OG = \cos a \cos b \quad \text{et} \quad EG = \sin a \cos b.$$

Les triangles OAD et BEI étant aussi semblables, puisque leurs côtés sont perpendiculaires chacun à chacun, on aura pareillement

$$OD : BI :: OA : BE :: AD : EI,$$

ou

$$\cos a : BI :: 1 : \sin b :: \sin a : EI,$$

d'où

$$BI = \sin b \cos a \quad \text{et} \quad EI = \sin a \sin b.$$

En remplaçant, dans les valeurs de $\sin(a+b)$ et de $\cos(a+b)$, EG, BI, OG et EI par les valeurs que nous venons de trouver, il viendra

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad [13],$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad [14].$$

Ces formules nous apprennent :

1° Que *le sinus de la somme de deux arcs est égal à la*

somme des produits que l'on obtient, en multipliant le sinus de chacun d'eux par le cosinus de l'autre;

2° Que *le cosinus de la somme de deux arcs est égal au produit des cosinus de ces arcs diminué du produit de leurs sinus.*

30. Pour prouver que les formules [13] et [14] sont générales, il suffira de faire voir qu'elles sont vraies dans les trois cas qui suivent:

1er CAS. *Les arcs* a *et* b *étant tous deux positifs et moindres qu'un quadran, leur somme* (a+b) *surpasse* 90°.

Soient a' et b' les compléments respectifs de a et de b, leur somme $(a'+b')$ sera le supplément de $(a+b)$ et, par conséquent, sera moindre qu'un quadran; donc on aura (page 8)

$$\sin(a+b)=\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\sin b'\cos a'$$
$$=\cos a\sin b+\cos b\sin a;$$
$$\cos(a+b)=-\cos(a'+b')=-\cos a'\cos b'+\sin a'\sin b'$$
$$=-\sin a\sin b+\cos a\cos b.$$

Donc les formules [13] et [14] conviennent au cas où chacun des arcs positifs a et b étant plus petit que 90°, leur somme surpasse un quadran. Ainsi *elles sont vraies pour toutes les valeurs positives de* a *et de* b *moindres que* 90°.

2e CAS. a *et* b *sont deux arcs positifs quelconques.*

Si nous prouvons que les formules [13] et [14] étant vraies pour deux arcs positifs quelconques, elles le seront encore lorsqu'on augmentera l'un de ces arcs de 90°, on devra conclure que puisqu'elles s'appliquent à deux arcs a' et b' moindres qu'un quadran (1er cas), elles conviendront de même aux arcs a et b formés en ajoutant un certain nombre de quadrans aux arcs a' et b'.

Supposons donc que a' et b soient deux arcs tels que l'on ait

$$\sin(a'+b)=\sin a'\cos b+\sin b\cos a',$$
$$\cos(a'+b)=\cos a'\cos b-\sin a'\sin b':$$

je pose $a=90°+a'$, et il en résulte

$$\sin(a+b)=\sin(90°+a'+b)=\cos(a'+b),$$
$$\cos(a+b)=\cos(90°+a'+b)=-\sin(a'+b);$$

on aura en conséquence

$$\sin(a+b)=\cos a'\cos b-\sin a'\sin b;$$
$$\cos(a+b)=-\sin a'\cos b-\cos a'\sin b.$$

Mais, parce que $a=90°+d'$, $\sin a=\cos d'$ et $\cos a=-\sin d'$; remplaçant donc $\cos d'$ par $\sin a$ et $-\sin d'$ par $\cos a$, il viendra enfin

$$\sin(a+b)=\sin a \cos b+\sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b)=\cos a \cos b-\sin a \sin b.$$

Les formules [13] et [14] conviennent donc à des arcs *positifs* quelconques.

3ᵉ Cas. a *et* b *sont deux arcs quelconques positifs ou négatifs.*

On pourra toujours trouver deux nombres entiers et positifs n et n' assez grands pour que les arcs $2n\pi+a$ et $2n'\pi+b$ soient positifs, de sorte que l'on appliquera les formules [13] et [14] aux développements du sinus et du cosinus de la somme de ces deux arcs; d'un autre côté, il est évident que $\sin(2n\pi+a+2n'\pi+b)=\sin(a+b)$ et que $\cos(2n\pi+a+2n'\pi+b)=\cos(a+b)$; donc on aura

$$\sin(a+b)=\sin\{(2n\pi+a)+(2n'\pi+b)\}=\sin(2n\pi+a)\cos(2n'\pi+b) \\ +\sin(2n'\pi+b)\cos(2n'\pi+a)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,$$

$$\cos(a+b)=\cos\{(2n\pi+a)+(2n'\pi+b)\}=\cos(2n\pi+a)\cos(2n'\pi+b) \\ -\sin(2n\pi+a)\sin(2n'\pi+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$

31. Les formules [13] et [14] étant ainsi démontrées, quels que soient les grandeurs et les signes des arcs a et b, on peut y changer b en $-b$, et les formules résultantes

$$\sin(a-b)=\sin a \cos b-\sin b \cos a \qquad [15],$$
$$\cos(a-b)=\cos a \cos b+\sin a \sin b \qquad [16],$$

auront le même degré de généralité.

Ces deux dernières formules serviront à *calculer le sinus et le cosinus de la différence entre deux arcs quelconques.* On aurait pu les obtenir par une construction géométrique analogue à celle qui a conduit aux formules [13] et [14]. Fig. 4 et 6.

32. Si dans ces formules [13] et [14] on suppose $a=b$, elles deviendront

$$\sin 2a=2\sin a\cos a \quad [17]; \quad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a \quad [18],$$

et au moyen de celles-ci, on pourra *calculer le sinus et le cosinus du double d'un arc en fonction du sinus et du cosinus de cet arc.*

33. Je change, dans ces dernières formules, a en $\frac{1}{2}a$, et je combine la seconde des équations résultantes

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \quad [19], \qquad \cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} \quad [20],$$

avec l'équation $1 = \cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2}$ par voie d'addition et de soustraction : il vient

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} \quad [21], \quad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2} \quad [22],$$

formules au moyen desquelles on pourra *calculer le sinus et le cosinus de la moitié d'un arc en fonction du cosinus de sa moitié*.

34. Combinons les équations [13] et [15] successivement par addition et par soustraction, et nous trouverons

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b \quad [23],$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b\cos a \quad [24].$$

Ces formules nous montrent 1° que *la somme des sinus de deux arcs est égale au double produit du sinus de la demi-somme de ces arcs par le cosinus de leur demi-différence;* car a est la demi-somme des arcs $(a+b)$ et $(a-b)$, et b est leur demi-différence; 2° que *la différence des sinus de deux arcs est égale au double produit du sinus de la demi-différence de ces arcs par le cosinus de leur demi-somme.*

35. En opérant sur les formules [14] et [16] comme nous venons de le faire sur [13] et sur [15], on trouvera

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b \quad [25],$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a\sin b \quad [26].$$

Ces formules, que l'on fera bien de traduire en langage ordinaire, donnent, ainsi que les formules [23] et [24], le moyen de *transformer en un produit de deux facteurs la somme ou la différence des cosinus ou des sinus de deux arcs*, et par conséquent de calculer cette somme ou cette différence par logarithmes.

36. Si l'on multiplie membre à membre les équations [23] et [24], on obtiendra l'équation suivante :

$$\sin^2(a+b) - \sin^2(a-b) = \sin 2a\sin 2b \quad [27];$$

car

$$2\sin a\cos b.2\sin b\cos a = 2\sin a\cos a.2\sin b\cos b = \sin 2a\sin 2b.$$

Ainsi *la différence des carrés des sinus de deux arcs est égale au produit du sinus de la somme de ces arcs par le sinus de leur différence.*

On tirera de même des équations [25] et [26] la suivante:

$$\cos^2(a+b)-\cos^2(a-b) = -\sin 2a\sin 2b \quad [28].$$

Au moyen de ces formules [27] et [28], on pourra encore *calculer par logarithmes la différence des carrés des sinus ou des cosinus des deux arcs.* Si ces arcs étaient, par exemple, de 120° et de 30°, on aurait

$$\sin^2 120^\circ - \sin^2 30^\circ = \sin 150^\circ \sin 90^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

37. Si l'on divise membre à membre les équations

$$\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b \quad [23],$$
$$\sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\sin b\cos a \quad [24],$$

il viendra

$$\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)} = \frac{\sin a\cos b}{\sin b\cos a} = \operatorname{tang} a\cot b,$$

ou, parce que $\cot b = \frac{1}{\operatorname{tang} b}$, en vertu des formules [8] et [10],

$$\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)} = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b} \quad [29].$$

Ainsi *la somme des sinus de deux arcs est à leur différence comme la tangente de la demi-somme de ces arcs est à la tangente de leur demi-différence;* car a est la demi-somme et b la demi-différence des arcs $(a+b)$ et $(a-b)$.

On peut donner de ce théorème une démonstration géométrique qui est remarquable par sa simplicité, mais aussi qui est bien moins générale que la précédente. Soient CA$=a$, Fig. 7.
CB$=b$ les deux arcs que l'on considère; si par les points A et B nous menons une perpendiculaire AA′ et une parallèle BDE au diamètre OC, il est clair que l'arc BA′ est la somme des arcs a et b, que BA est leur différence, et que

$$DA' = \sin a + \sin b, \quad DA = \sin a - \sin b.$$

Or, si l'on joint EA et EA′, les angles A′EB et AEB auront respectivement pour mesures $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$. Il faut donc

construire les tangentes de ces angles. Pour cela, je décris du point E, comme centre et avec le rayon du cercle donné, un arc de circonférence FGF′ : l'angle A′EB aura GF′ pour mesure, et celle de AEB sera GF ; donc $GF' = \frac{a+b}{2}$, et $GF = \frac{a-b}{2}$. Si donc on mène la tangente KK′ au point G, on aura $GK' = \operatorname{tang}\frac{a+b}{2}$ et $GK = \operatorname{tang}\frac{a-b}{2}$. Mais la droite EB partage AA′ et sa parallèle KK′ en parties proportionnelles ; donc

$$\frac{DA'}{DA} = \frac{GK'}{GK} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

38. Si on divise les deux membres de l'équation

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \qquad [19]$$

respectivement par les deux membres de l'équation

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} \quad [21], \qquad \text{ou} \qquad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2} \quad [22],$$

on trouvera

$$\frac{\sin a}{1+\cos a} = \operatorname{tang}\frac{a}{2} \quad [30], \qquad \frac{\sin a}{1-\cos a} = \cot\frac{a}{2} \quad [31],$$

et, en divisant les équations [22] et [21] membre à membre, il viendra

$$\frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \operatorname{tang}^2\frac{a}{2} \quad [32], \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \quad [33].$$

Au moyen de cette formule, on pourra *calculer la tangente de la moitié d'un arc dont on connaîtra le cosinus*, et si cet arc n'est pas donné, le problème aura deux solutions, comme il était facile de le prévoir. En effet, la formule demandée devant exprimer la tangente de la moitié de l'arc a en fonction de la quantité $\cos a$, donnera la tangente de la moitié de tous les arcs qui ont pour cosinus la grandeur donnée $\cos a$; mais tous ces arcs sont compris dans la formule $(2k\pi \pm a)$; donc la formule cherchée déterminera (**23**)

$$\operatorname{tang}\left(k\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \pm\operatorname{tang}\frac{a}{2} ;$$

donc elle doit donner deux valeurs égales et de signes contraires.

Mais si l'arc a est donné, la tangente de sa moitié ne pourra avoir qu'une valeur, et la considération du quadran dans lequel se trouvera l'extrémité de l'arc $\frac{a}{2}$, indiquera s'il faut prendre dans la formule [33] le signe supérieur ou le signe inférieur.

39. Problème. *Étant donné le cosinus d'un arc, trouver le sinus et le cosinus de sa moitié.*

Les formules

$$\sin\frac{a}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\cos a)} \qquad [34],$$

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos a)} \qquad [35],$$

qui résolvent ce problème, résultent immédiatement des équations [21] et [22]. Elles nous indiquent que, si l'arc a n'est pas donné, la question a deux solutions. On devra répéter ici la discussion du n° **38**.

Ces formules conduisent à la construction géométrique que l'on emploie pour *partager un arc en deux parties égales.* Rétablissons, en effet, le rayon (**27**) dans la formule [34], par exemple, ce qui donnera

$$\sin\frac{a}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2R(R-\cos a)},$$

et supposons que l'arc à partager soit AA'B : son cosinus est —OP, de sorte que la formule deviendra Fig. 8.

$$\sin\frac{a}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{AA'.AP}.$$

Mais $\sqrt{AA'.AP}$ est une moyenne proportionnelle entre AA' et AP ; donc $\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}AB$; si donc on abaisse de O une perpendiculaire KOK' sur AB, on aura $\sin\frac{a}{2}=AI$; or, AI est le sinus commun des arcs AK et AK', et comme la moitié de AA'B doit avoir son sinus positif, il s'ensuit que cette moitié est AK.

40. Problème. *Étant donné le sinus d'un arc, trouver le sinus et le cosinus de sa moitié.*

On sait que $\cos a = \pm\sqrt{1-\sin^2 a}$; donc, en substituant cette valeur dans les formules [34] et [35], on aura les équations

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2(1\mp\sqrt{1-\sin^2 a})}$$

et
$$\cos\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2(1\pm\sqrt{1-\sin^2 a})},$$

qui seront la réponse à la question. Toutefois on peut les simplifier en leur appliquant la formule

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

qui sert à calculer, au moyen de deux racines carrées séparées, la racine carrée d'une quantité qui est en partie rationnelle et en partie irrationnelle du second degré (*Alg.*, **227**). On posera donc $A=2$, $B=4(1-\sin^2 a)$, ce qui donnera $A^2-B=4\sin^2 a$, et par suite

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}),$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}).$$

On parvient directement à ces formules et d'une manière plus simple, ainsi qu'il suit :

On a entre les deux inconnues $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ et la quantité donnée $\sin a$, les deux équations

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}, \qquad 1 = \sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}.$$

Si l'on combine ces deux équations par voie d'addition, le second membre de l'équation résultante sera le carré de $\left(\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}\right)$, de sorte qu'en extrayant la racine carrée du premier, on aura

$$\pm\sqrt{1+\sin a} = \sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}.$$

On connaît donc la somme $\pm\sqrt{1+\sin a}$ des deux inconnues et leur produit $\frac{1}{2}\sin a$; donc elles sont racines de la

double équation du second degré

$$x^2 \mp \sqrt{1+\sin a}\,.x + \frac{1}{2}\sin a = 0 \qquad [\alpha];$$

or, on en tire

$$x = \frac{\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}}{2},$$

et de ces quatre valeurs chacune appartient également à $\sin\frac{a}{2}$ et à $\cos\frac{a}{2}$; car il n'y a pas de raison pour regarder l'une d'elles comme la valeur de $\sin\frac{a}{2}$ plutôt que celle de $\cos\frac{a}{2}$, à cause de la symétrie des équations proposées : seulement il faudra grouper ces valeurs de manière que le premier radical ait les mêmes signes dans les valeurs de ces inconnues, et que le second y ait des signes contraires, puisque chaque groupe doit représenter les deux racines de l'une ou de l'autre des équations [α]. On aura donc

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{a}{2} &= \frac{\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}}{2} \\ \cos\frac{a}{2} &= \frac{\pm\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [36];$$

formules dans lesquelles les signes du même radical se correspondent.

Le problème a, comme on voit, quatre solutions, et c'est ce qu'on pouvait prévoir. En effet, la première des formules cherchées, par exemple, devant exprimer la valeur de $\sin\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$, déterminera le sinus de la moitié de chacun des arcs qui ont pour sinus la grandeur donnée $\sin a$; or, tous ces arcs sont compris dans les formules

$$2k\pi + a, \quad \text{et} \quad (2k+1)\pi - a,$$

donc cette formule fera connaître les valeurs de

$$\sin\left(k\pi + \frac{a}{2}\right) = \pm\sin\frac{a}{2}, \text{ et de } \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right) = \pm\cos\frac{a}{2};$$

ainsi elle aura quatre valeurs, savoir, $\pm\sin\frac{a}{2}$ et $\pm\cos\frac{a}{2}$, égales deux à deux et de signes contraires.

Si l'arc a est donné, on sent qu'une seule des valeurs comprises dans chacune des deux formules [36] pourra convenir

au sinus ou au cosinus de l'arc $\frac{a}{2}$; mais comment la distinguer? On verra facilement si l'arc $\frac{a}{2}$ doit avoir son sinus positif ou négatif, en le transformant en un multiple de la demi-circonférence, augmenté ou diminué d'un arc moindre que 90° (**20**); supposons, par exemple, que ce sinus doive être positif, alors on rejettera les deux valeurs négatives, et comme des deux autres valeurs l'une doit être le sinus de $\frac{a}{2}$ et l'autre $\pm\cos\frac{a}{2}$, il ne s'agira, pour lever la difficulté, que d'examiner laquelle de ces deux lignes a la plus grande valeur absolue, ce qui sera facile, puisque nous avons déterminé un arc moindre que 90°, dont le sinus et le cosinus sont égaux en valeur absolue au sinus et au cosinus de l'arc $\frac{a}{2}$ (**15** et **16**), et que dans le premier quadran le sinus d'un arc moindre que 45° est plus petit que son cosinus, tandis que c'est le contraire si cet arc est plus grand que 45°. Si, par exemple, on nous dit que le sinus de 1650° est égal à $\frac{1}{2}$, et qu'on demande le sinus de 825°, on verra d'abord que 825° valent cinq demi-circonférences —75°, et qu'ainsi le sinus de 825° est positif et égal à celui de 75°; or, cet arc étant plus grand que 45°, son sinus est plus grand que son cosinus; donc

$$\sin 825° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

et

$$\cos 825° = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

41. PROBLÈME. *Étant donné le sinus d'un arc, calculer le sinus du tiers de cet arc.*

On résoudra ce problème en cherchant une relation entre le sinus d'un arc et celui du tiers de cet arc. Faisons donc $b=2a$, dans la formule [13], et il viendra

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a;$$

mais $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$;

donc $\sin 3a = \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a \cos^2 a,$

ou en remplaçant $\cos^2 a$ par $(1-\sin^2 a)$, et réduisant

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \qquad [37],$$

formule qui donne le sinus du triple d'un arc en fonction du sinus de cet arc.

Changeons a en $\frac{a}{3}$, cette formule deviendra, après avoir transposé et divisé tous ses termes par 4,

$$\sin^3\frac{a}{3} - \frac{3}{4}\sin\frac{a}{3} + \frac{1}{4}\sin a = 0 \qquad [38],$$

ou, en remplaçant, pour abréger, $\sin\frac{a}{3}$ par x, et $\sin a$ par b,

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = 0 \qquad [39].$$

Ainsi, en résolvant cette équation, on obtiendra trois valeurs pour l'inconnue $\sin\frac{a}{3}$, de sorte que la question a trois solutions, si les trois racines sont réelles.

Pour nous en rendre compte, nous répéterons ici les raisonnements des n^{os} **38** et **40**, et nous verrons que cette équation doit avoir pour racines les sinus de tous les arcs compris dans les formules

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{a}{3} \quad \text{et} \quad \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{a}{3}.$$

Or, le nombre entier k est de la forme $(3n+k')$, n étant un nombre positif ou négatif, et k' un nombre entier positif moindre que 3; on a donc

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{2k'\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \sin\left(\frac{2k'\pi}{3}+\frac{a}{3}\right),$$

et $$\sin\left\{\frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{a}{3}\right\} = \sin\left(2n\pi + \frac{2k'\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{2k'\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{a}{3}\right).$$

Ainsi, en faisant successivement $k'=0$, $=1$, $=2$, on verra que les sinus de tous les arcs déterminés par l'équation [39], reviennent à ceux des six arcs

$$\frac{a}{3},\quad \frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3},\quad \frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3},$$
$$\frac{\pi}{3}-\frac{a}{3},\quad \pi-\frac{a}{3},\quad \frac{5\pi}{3}-\frac{a}{3}.$$

Or, nous savons que deux arcs ont le même sinus lorsque leur

somme fait un multiple impair de la demi-circonférence; donc les arcs $\frac{a}{3}$ et $\left(\pi-\frac{a}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{3}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{a}{3}\right)$ ont leurs sinus égaux, de sorte que l'équation [39] a pour racines les sinus des trois arcs $\frac{a}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$, $\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}$; ainsi ses trois racines sont réelles et généralement inégales*.

Si l'on veut déterminer trigonométriquement quels sont les signes des racines de l'équation [39], on distinguera deux cas, selon que b sera >0 ou <0.

1° Si $b>0$, le plus petit de tous les arcs positifs qui auront b pour sinus sera $<\frac{\pi}{2}$, de sorte que, α représentant ce plus petit arc, on aura

$$\frac{\alpha}{3}<\frac{\pi}{6},\ \frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}<\frac{5\pi}{6},\ \frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}<\frac{3\pi}{2};$$

ainsi l'équation aura deux racines positives et une négative. On voit d'ailleurs que $\sin\frac{\pi}{6}$ étant égal à $\frac{1}{2}$(6)$\sin\frac{\alpha}{3}<\frac{1}{2}$ et que $\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}$, car $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}$(13).

2° Si $b<0$, α sera $>\pi$ et $<\frac{3\pi}{2}$, de sorte qu'on aura

$$\frac{\alpha}{3}\left\{\begin{matrix}>\frac{\pi}{3}\\<\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\},\quad \frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\left\{\begin{matrix}>\pi\\<\frac{7\pi}{6}\end{matrix}\right\},\quad \frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\left\{\begin{matrix}>\frac{5\pi}{3}\\<\frac{11\pi}{6}\end{matrix}\right\}.$$

---

* Et, en effet, la condition $4p^3+27q^2<0$ est satisfaite (*Alg.*, 482); car elle revient ici à $b^2-1<0$; ce qui est vrai, puisque b est un sinus.

On peut dire encore : si $b>0$, $x=0$ donnera un résultat positif et $x=\frac{1}{2}$ donnera $\frac{-1+b}{4}<0$; donc l'équation a deux racines positives l'une plus petite et l'autre plus grande que $\frac{1}{2}$; et comme elle en a une négative, il s'ensuit que ses trois racines sont réelles. On verrait de même que si $b<0$, l'équation a deux racines réelles négatives, l'une plus petite que $\frac{1}{2}$ et l'autre plus grande. Il suffira, pour cela, de changer x en $-x$ dans l'équation [39].

Ainsi le sinus du premier de nos trois arcs est positif et ceux des deux autres sont négatifs, de sorte que l'équation [39] a alors une racine positive et deux négatives. Comme $\sin\frac{7\pi}{6}$ et $\sin\frac{11\pi}{6}$ sont égaux en valeur absolue à $\sin\frac{\pi}{6}$, on voit que, dans le cas de $b<0$, les deux racines négatives sont l'une plus petite et l'autre plus grande que $\frac{1}{2}$.

Si l'arc a n'est pas donné, il n'y aura pas de raison pour prendre l'une des racines de l'équation [39] plutôt qu'une autre pour réponse à la question, et le problème aura trois solutions.

Si l'arc a est donné, il s'agit de reconnaître parmi les trois racines de l'équation [39] celle qui est le sinus de $\frac{a}{3}$. Pour cela, on ramènera l'arc $\frac{a}{3}$ au premier quadran (**20**), et on trouvera ainsi que $\sin\frac{a}{3}$ est égal à $\pm\sin\alpha$, α étant $<90°$. Si $b>0$ et que $\sin\frac{a}{3}=-\sin\alpha$, il faudra prendre pour la valeur de $\sin\frac{a}{3}$ la racine négative de l'équation [39]; mais si $\sin\frac{a}{3}=+\sin\alpha$, alors la valeur cherchée sera l'une des deux racines positives. On ramènera pareillement les arcs $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}$ au premier quadran, et si l'on trouve, par exemple, que $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=+\sin\beta$, β étant $<90°$, on prendra pour la valeur cherchée la plus petite ou la plus grande des deux racines positives, selon que α sera $<$ ou $>\beta$. On agirait de même si b était négatif.

Supposons, par exemple, que $a=1635°$; on verra facilement que $\sin a=\sin(9\pi+15°)<0$, et qu'ainsi l'équation [39] a une racine positive et deux racines négatives. On trouvera ensuite que $\sin\frac{a}{3}=-\sin 5°$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=-\sin 60°$, et qu'en conséquence la valeur de $\sin\frac{1635°}{3}$ est la plus petite des deux racines négatives.

Fig. 9. Si ABC est l'arc donné a, et qu'on veuille le diviser en trois parties égales, on n'aura qu'à mener à AA' une parallèle qui en soit éloignée d'une quantité égale à la plus grande des deux racines positives de l'équation [39], et la portion AM de ABC comprise entre cette parallèle et le point A sera le tiers de cet arc.

42. Les trois racines de l'équation [39] jouissent de cette propriété remarquable, que leur somme algébrique est nulle *. Il est facile de le vérifier en observant que

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=2\sin\left(\pi+\frac{a}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=-2\sin\frac{a}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\sin\frac{a}{3},$$

et qu'ainsi $\sin\frac{a}{3}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)=0.$

On peut aussi le démontrer par des considérations géométriques.

En effet, les extrémités M, M', M'', des trois arcs $AM=\frac{a}{3}$, $AM'=\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$, $AM''=\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}$, déterminent les sommets d'un triangle équilatéral; si donc on joint le sommet M'' au milieu N de MM', on aura OM''=2ON; donc M''P, sinus de l'arc AA'M'', est double de la perpendiculaire NQ, menée du point N sur le diamètre AA'; mais celle-ci est la demi-somme des sinus des arcs AM et AM'; donc la proposition est démontrée.

43. Nous avons dit que les trois racines de l'équation [39] sont généralement inégales. Examinons quelle hypothèse on doit faire sur $\sin a$, pour que cette équation ait deux racines égales. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les sinus de deux des trois arcs $\frac{a}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$, $\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}$ soient égaux, et qu'en conséquence la différence de' deux de ces arcs soit un multiple pair de la demi-circonférence, ou que leur somme en soit un multiple impair. Or, les trois arcs dont il s'agit ne peuvent satisfaire à la première de ces conditions : pour qu'ils

* On sait, en effet, que quand une équation manque de son second terme, la somme de ses racines est nulle (*Alg.*, 457).

vérifient la seconde, il faut que l'on ait

$$\frac{2a}{3}+\frac{2\pi}{3}=(2k+1)\pi,\quad \text{d'où}\quad a=(6k+1)\frac{\pi}{2};$$

ou $$\frac{2a}{3}+\frac{4\pi}{3}=(2k+1)\pi,\quad \text{d'où}\quad a=(6k-1)\frac{\pi}{2};$$

ou encore $$\frac{2a}{3}+\frac{6\pi}{3}=(2k+1)\pi,\quad \text{d'où}\quad a=(6k-3)\frac{\pi}{2}.$$

Or, tout nombre impair est de la forme $(6k+1)$, $(6k-1)$ ou $(6k-3)$; car, si on le divise par 6, on ne peut avoir pour reste que 1, 3 ou 5. Donc, pour que l'équation [39] ait deux racines égales, il faut et il suffit que l'arc a soit un multiple impair du quadran, ou, en d'autres termes, que $\sin a=\pm 1$ *.

44. Problème. *Étant donné le cosinus d'un arc, calculer le cosinus du tiers de cet arc.*

En raisonnant comme au n° **41**, on trouvera d'abord

$$\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a \qquad [40],$$

puis $$\cos^3\frac{a}{3}-\frac{3}{4}\cos\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\cos a=0 \qquad [41].$$

La discussion de cette formule sera tout à fait la même que celle de l'équation [38].

45. Il sera facile, en imitant la marche que nous avons suivie au n° **41**, d'exprimer $\sin\frac{a}{5}$, $\cos\frac{a}{5}$, $\sin\frac{a}{7}$, $\cos\frac{a}{7}$,.... en fonction de $\sin a$ ou de $\cos a$. Mais on peut obtenir une équation qui donne généralement la valeur de $\sin\frac{a}{m}$ ou de $\cos\frac{a}{m}$ en fonction de $\sin a$ ou de $\cos a$. Le moyen de parvenir à cette équation se déduit d'un théorème très-important dû au géomètre français Moivre, dont il a reçu le nom.

---

* En effet, l'équation [39] devient ainsi $x^3-\frac{3}{4}x\pm\frac{1}{4}=0$. Or, on reconnaît immédiatement qu'elle a pour racine ∓ 1; donc son premier membre est divisible par $(x\pm 1)$. Le quotient de cette division est $x^2\mp x+\frac{1}{4}=\left(x\mp\frac{1}{2}\right)^2$. Ainsi, outre la racine ∓ 1, elle en a encore deux autres qui sont égales à $\pm\frac{1}{2}$.

Nous allons d'abord faire connaître et l'énoncé et la démonstration de ce théorème.

*46. Soient les deux expressions

$$\cos a + \sqrt{-1}\sin a \quad \text{et} \quad \cos b + \sqrt{-1}\sin b:$$

multiplions-les entre elles, et nous trouverons

$$(\cos a\cos b - \sin a\sin b) + \sqrt{-1}(\cos a\sin b + \sin a\cos b).$$

Donc, en vertu des formules [13] et [14],

$$(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)(\cos b + \sqrt{-1}\sin b)$$
$$= \cos(a+b) + \sqrt{-1}\sin(a+b).$$

Ainsi le produit de deux facteurs de la forme $(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)$ est de même forme que chacun de ces facteurs, et s'obtient en remplaçant dans l'un d'eux l'arc qui y entre par la somme des deux arcs que l'on considère. Il suit de là que le produit des trois facteurs $(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)$, $(\cos b + \sqrt{-1}\sin b)$ et $(\cos c + \sqrt{-1}\sin c)$ sera

$$\cos(a+b+c) + \sqrt{-1}\sin(a+b+c),$$

et ainsi de suite. Par conséquent, si on veut élever le binôme $(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)$ à la puissance m, ce qui revient à faire le produit de m facteurs égaux à ce binôme, il suffira d'y remplacer a par ma, ce qui donnera

$$(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)^m = \cos ma + \sqrt{-1}\sin ma \quad [42].$$

Telle est la formule connue sous le nom de *théorème de Moivre*. La démonstration que nous venons d'en donner suppose que m est un nombre entier et positif; mais, comme nous n'aurons besoin de cette formule que dans ce seul cas, nous nous dispenserons de faire voir comment on parvient à en prouver la généralité (*Alg.*, **661**).

*47. Si on développe le premier membre de l'équation [42], par la formule du binôme de *Newton*, et que l'on mette $\sqrt{-1}$ en facteur commun des quantités qu'il multiplie, on trouvera une équation de la forme

$$\cos ma + \sqrt{-1}\sin ma = A + B\sqrt{-1};$$

or, cette équation se partage dans les deux suivantes

$$\cos ma = A \quad \text{et} \quad \sin ma = B;$$

car, comme on en tire

$$(\cos ma - \mathrm{A}) = -\sqrt{-1}\,(\sin ma - \mathrm{B}),$$

on voit que si $\cos ma$ n'était pas égal à A, la différence de deux quantités réelles serait imaginaire. Si l'on substitue à A et à B les quantités qu'elles représentent, il viendra enfin *

$$\left.\begin{array}{l}\cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2} a \sin^2 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4} a \sin^4 a - \text{etc.}\end{array}\right\} [43];$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin ma = m\cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} a \sin^3 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5} a \sin^5 a - \text{etc.}\end{array}\right\} [44].$$

Remarquons que l'expression de $\cos ma$ ne renfermant que des puissances paires de $\sin a$, on pourra en éliminer cette quantité au moyen de la relation $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, et on aura ainsi la valeur de $\cos ma$ en fonction rationnelle de $\cos a$. Mais on ne pourra pas éliminer $\cos a$ de la formule [44] sans y introduire des radicaux, à moins que m ne soit un nombre impair. Si m est pair, comme la formule [43] ne renfermera que des puissances paires de $\cos a$, on pourra remplacer $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, et $\cos ma$ se trouvera exprimé en fonction rationnelle de $\sin a$.

Si dans les équations [43] et [44], on remplace a par $\frac{a}{m}$, on aura des équations du degré m au moyen desquelles on pourra calculer $\cos\frac{a}{m}$ et $\sin\frac{a}{m}$. Si m est un nombre pair, on déduira de la première de ces deux équations les valeurs de $\sin\frac{a}{m}$ et de $\cos\frac{a}{m}$ en fonction de $\cos a$. Il est bon toutefois de remarquer que l'on pourra se borner au cas de m impair; car, pour trouver, par exemple, le sinus de l'arc $\frac{a}{2n}$, on peut commencer par calculer $\sin\frac{a}{2}$ au moyen de $\sin a$ (40), et chercher ensuite $\sin\frac{a}{2n}$ en fonction de $\sin\frac{a}{2}$, à l'aide de la formule [44].

* N'oublions pas que $(\sqrt{-1})^{4n} = +1$, $(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$ et que $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$ (*Alg.*, 253).

48. En groupant les formules [13] et [15], [14] et [16], on trouve

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b;$$

et si l'on divise ces deux équations membre à membre, il viendra (26)

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b \mp \sin b \sin a} \qquad [\alpha].$$

Je divise les deux termes du second membre de cette équation par $\cos a \cos b$, et je trouve, en ayant égard à la formule [8],

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b}{1 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} \qquad [45].$$

Ainsi *la tangente de la somme ou de la différence de deux arcs est égale au quotient qu'on obtient en divisant la somme ou la différence des tangentes de ces arcs par l'unité diminuée ou augmentée du produit de ces tangentes.*

Comme on a obtenu cette formule en divisant les deux termes du second membre de l'équation [α] par $\cos a \cos b$, on voit que pour ne conserver aucun doute sur la généralité de la formule [45], il faut vérifier qu'elle est vraie lorsque l'une des quantités $\cos a$ et $\cos b$ est nulle, ou lorsqu'elles le sont toutes deux en même temps.

Or, si $\cos a = 0$, il en résultera $\operatorname{tang} a = \infty$ et $a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$: en conséquence, on divisera d'abord les deux termes du second membre de l'équation [45] par $\operatorname{tang} a$, ce qui donnera

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{1 \pm \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}}{\frac{1}{\operatorname{tang} a} \mp \operatorname{tang} b},$$

et, en faisant $a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ dans cette équation, elle se réduira à l'identité $\mp \frac{1}{\operatorname{tang} b} = \frac{1}{\mp \operatorname{tang} b}$; car

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \operatorname{tang}\left(k\pi + \frac{\pi}{2} \pm b\right) = \mp \frac{1}{\operatorname{tang} b}.$$

Enfin, si on a à la fois $\cos a = 0$ et $\cos b = 0$ et partant $\operatorname{tang} a = \infty$ et $\operatorname{tang} b = \infty$, on divisera par $\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b$ les deux termes du second membre de l'équation [45]; et en y

supposant ensuite tang a et tang b infinies, ce second membre se réduira à zéro; mais le premier membre devient alors $\text{tang}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm(2k'+1)\frac{\pi}{2}\right]=\text{tang}\,n\pi=0$; donc cette équation est encore vérifiée.

49. Si l'on suppose $b=a$, la première des formules [45] deviendra

$$\text{tang}\,2a=\frac{2\,\text{tang}\,a}{1-\text{tang}^2 a} \qquad [46],$$

équation qui servira à *calculer la tangente du double d'un arc en fonction de la tangente de cet arc.*

50. Si l'on veut *déduire la tangente de la moitié d'un arc de la tangente de cet arc*, on changera dans cette dernière formule a en $\frac{a}{2}$, et on tirera facilement, de l'équation résultante, la suivante :

$$\text{tang}\,a\,\text{tang}^2\frac{a}{2}+2\,\text{tang}\frac{a}{2}-\text{tang}\,a=0 \qquad [47].$$

Ainsi la question a deux solutions, si l'arc a n'est pas donné. Il sera facile de s'en rendre raison, en répétant ici les raisonnements dont nous avons donné plusieurs exemples, et on reconnaîtra ainsi que, les racines de l'équation [47] étant $\text{tang}\frac{a}{2}$ et $\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right)$, les sécantes qui correspondent aux deux racines de cette équation se coupent à angles droits. De plus, comme $\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right)=-\cot\frac{a}{2}=-\frac{1}{\text{tang}\frac{a}{2}}$, on verra que le produit des deux racines de l'équation [47] est -1.

51. PROBLÈME. *Calculer la tangente du tiers d'un arc en fonction de la tangente de cet arc.*

Je fais $b=2a$ dans la première des formules [45], puis je remplace, dans le résultat, tang $2a$ par sa valeur donnée par l'équation [46], et il viendra, après avoir chassé les dénominateurs,

$$\text{tang}\,3a=\frac{3\,\text{tang}\,a-\text{tang}^3 a}{1-3\,\text{tang}^2 a} \qquad [48].$$

Si l'on veut vérifier cette formule, il faudra donner à tang a une valeur particulière, qui conduise à une valeur de tang $3a$ connue d'avance : en conséquence, je suppose

$a=45°$, ce qui entraîne $\tang a=1$, et $\tang 3a=-1$. En substituant ces valeurs dans l'équation [48], elle se réduit à $-1=\frac{3-1}{1-3}=-1$.

Maintenant je change a en $\frac{a}{3}$, et, après avoir fait évanouir le dénominateur et transposé, je trouverai

$$\tang^3\frac{a}{3}-3\tang a \tang^2\frac{a}{3}-3\tang\frac{a}{3}+\tang a=0 \quad [49],$$

équation qu'il sera bon de discuter *, et dont la solution conduira aux trois valeurs dont $\tang\frac{a}{3}$ est susceptible, si l'arc a n'est pas donné. On trouvera que ses trois racines sont les tangentes des arcs $\frac{a}{3}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{a}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$; que si $\tang a>0$, il y en a une négative et deux positives, lesquelles sont l'une plus petite que 1 et l'autre >1; mais que si $\tang a<0$, il y a une racine positive et deux négatives, l'une plus petite et l'autre plus grande que 1.

Cette remarque fournira le moyen de distinguer quelle est celle des trois racines de l'équation [49] qui sera la tangente de l'arc $\frac{a}{3}$, lorsque le nombre des degrés de cet arc sera donné. Il suffira de suivre la marche que nous avons indiquée au n° **41**.

Si l'on suppose $a=45°$, l'arc $\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}$ sera égal à 135°, et ainsi sa tangente sera -1; donc, on pourra alors achever la résolution de l'équation [49].

32. Applications. I. *Calculer par logarithmes les quantités :*

$$\frac{\sin a\pm\sin b}{\cos a\pm\cos b};\quad \frac{\sin a+\cos b}{\sin a-\cos b};\quad \tang a\pm\tang b;$$

$$\cot a\pm\cot b;\quad \frac{\tang a+\cot b}{\tang a-\cot b};\quad \text{séc}\,a\pm\text{coséc}\,b.$$

II. *Étant donné le cosinus d'un arc, calculer le cosinus du quart de cet arc.* — La discussion de l'équation d'où dé-

* On reconnaîtra algébriquement qu'elle a ses racines réelles, en y substituant zéro et $+1$, si $\tang a>0$; et zéro et -1, si $\tang a<0$.

pend la valeur de $\cos\frac{a}{4}$ et la détermination de ce cosinus, quand l'arc a est donné, sont tout à fait analogues à ce qui a été fait au n° **40**.

III. *Étant donnée* $\tan\text{g}\,a$, *calculer* $\tan\text{g}\frac{a}{4}$. — *Discuter cette équation algébriquement et trigonométriquement. — La résoudre. — Déterminer la racine qui est la tangente de* $\frac{a}{4}$, *en supposant l'arc* a *connu.* — On pouvait prévoir que l'équation s'abaisserait au second degré, parce que, pour partager un arc en quatre parties égales, on emploie deux bissections successives, et chacune dépend d'une équation du second degré (**50**).

IV. *Étant donnée* $\tan\text{g}\,a$, *calculer* $\sin\frac{a}{2}$. — *Discussion.*

V. *Étant donnée la tangente d'un arc, calculer le sinus des* $\frac{2}{3}$ *de cet arc.* — *Discussion.*

VI. *Calculer* $\tan\text{g}\frac{2a}{3}$ *en fonction de* $\cos a$. — *Discussion.*

VII. *De quel degré et de quelle forme sera l'équation qui établira une relation entre* $\sin 2a$ *et* $\cos 3a$?



CHAPITRE III.

CONSTRUCTION DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

53. Une TABLE TRIGONOMÉTRIQUE est un tableau à cinq colonnes dont la première renferme tous les arcs croissant en progression par différence depuis zéro jusqu'à 90°, et dont les autres contiennent les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de ces mêmes arcs. Les tables de *Callet*, dont nous allons exposer la construction, ont été calculées de 10″ en 10″, et les logarithmes des lignes trigonométriques des arcs correspondants sont exacts à moins d'un demi-dix-millionième près. Comme le sinus et le cosinus d'un arc quelconque sont toujours plus petits que le rayon, les logarithmes de ces lignes auraient leurs caractéristiques négatives, si l'on prenait l'unité linéaire pour rayon de cet arc, ce qui ne serait pas commode. On a évité cet inconvénient en choisissant le rayon des tables égal à dix billions, c'est-à-dire à 10^{10}*. Or, les lignes trigonométriques d'arcs semblables étant proportionnelles aux rayons de ces arcs (27), il en résulte que, si l'on avait calculé une table de sinus, de cosinus, tangentes et cotangentes dans l'hypothèse où le rayon est l'unité linéaire, il suffirait d'ajouter 10 unités aux caractéristiques des logarithmes de ces lignes pour obtenir ces logarithmes dans le cas où le rayon est égal à 10^{10}. Ainsi, nous allons, en prenant l'unité linéaire pour rayon, calculer les valeurs des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de tous les arcs croissant en progression arithmétique, dont la raison est 10″, depuis zéro jusqu'à 90°; nous chercherons ensuite les logarithmes des nombres ainsi trouvés, et en ajoutant enfin dix unités à chacun de ces logarithmes, la table sera construite.

Il est clair que le calcul de toutes les lignes trigonométriques peut se réduire à celui des sinus; car d'abord, pour

* Nous verrons, en effet, dans un instant que la valeur du sinus de 10″, calculée dans l'hypothèse du rayon égal à l'unité, est 0,00004 84813 681 et qu'ainsi la *caractéristique* de son logarithme est — 5.

avoir le cosinus d'un arc, il suffit de chercher le sinus de son complément, et ensuite il sera facile de trouver les valeurs des tangentes et des cotangentes d'après les relations qui existent entre ces dernières lignes et les premières (**26**). Mais, en calculant ainsi les sinus de 10″ en 10″ depuis zéro jusqu'à 90°, nous aurions à exécuter 32400 opérations (le quadran vaut 324000″, et par conséquent 32400 fois l'arc de 10″) dont chacune dépendrait de toutes celles qui la précèdent, de sorte que les erreurs commises sur les sinus des arcs compris entre 45° et 90°, c'est-à-dire sur les cosinus des arcs moindres que 45°, pourraient être fort considérables. En conséquence, nous préférerons déterminer *séparément* les sinus et cosinus de tous les arcs de la progression

$$\div 0.10''.20''.30''....45^\circ,$$

et nous nous trouverons avoir ainsi calculé les sinus et cosinus des arcs compris entre 45° et 90°, puisque le sinus ou le cosinus d'un arc plus grand que 45° est égal au cosinus ou au sinus de son complément, lequel est plus petit que 45°.

La première chose à faire est évidemment de calculer le sinus et le cosinus de 10″. Pour y parvenir d'une manière élémentaire, nous commencerons par établir que *l'unité est la limite vers laquelle converge le rapport du sinus d'un arc à cet arc, lorsqu'on suppose que ce même arc tend vers zéro*. Considérons, en effet, un arc AM$=$a *moindre qu'un quadran*: Fig. 10
du point M abaissons la perpendiculaire MM′ sur le rayon OA, menons au point M la tangente MT, terminée au prolongement de OA, et joignons M′T. Cette droite sera tangente à la circonférence au point M′, et nous aurons évidemment

$$\text{MM}' < \text{MAM}' \quad \text{et} \quad \text{MAM}' < \text{MTM}',$$

d'où, en divisant par 2,

$$\sin a < a \quad \text{et} \quad a < \text{tang}\, a;$$

c'est-à-dire, que *tout arc moindre qu'un quadran est plus grand que son sinus, et plus petit que sa tangente*. On tire de ces inégalités

$$\frac{\sin a}{a} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin a}{a} > \frac{\sin a}{\text{tang}\, a} = \cos a.$$

Ainsi, le rapport $\frac{\sin a}{a}$ est compris entre l'unité et $\cos a$. Mais,

à mesure que l'arc a diminue, la différence $(1-\cos a)$ diminue et tend à devenir nulle, puisque, quand un arc décroît jusqu'à zéro, son cosinus augmente jusqu'à l'unité, donc, *a fortiori*, le rapport $\frac{\sin a}{a}$ tend-il vers l'unité. *Il en est de même du rapport* $\frac{\tang a}{a}$.

Il suit immédiatement de là que, l'arc $10''$ étant très-petit, on pourra, sans commettre une erreur considérable, prendre sa longueur pour celle de son sinus; mais avec quel degré d'approximation cette valeur de $\sin 10''$ sera-t-elle exacte? Soit a un arc moindre qu'un quadran : on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} > \cos\frac{a}{2},$$

d'où, en multipliant les deux membres de cette inégalité par $2\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$,

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} > a\cos^2\frac{a}{2} = a\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\right).$$

Mais la quantité $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$ est égale à $\sin a$; la quantité $\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\right)$ est plus grande que $\left(1-\frac{a^2}{4}\right)$, puisque $\sin\frac{a}{2} < \frac{a}{2}$; donc

$$\sin a > a\left(1-\frac{a^2}{4}\right), \quad \text{d'où} \quad a-\sin a < \frac{a^3}{4},$$

ce qui nous apprend que *la différence entre un arc plus petit qu'un quadran et son sinus est moindre que le quart du cube de cet arc.*

Or, dans le cercle dont le rayon est l'unité linéaire, la longueur de l'arc de $10''$ est égale à $\frac{\pi}{64800}$, quantité moindre que 5 cent-millièmes, ou que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4}$; donc la différence entre cet arc et son sinus est moindre que $\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{10^{12}}$ et, *a fortiori*, moindre que $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^{13}}$. Ainsi, en prenant la longueur de l'arc

de $10''$ pour la valeur du sinus de cet arc, l'erreur sera moindre qu'une demi-unité du treizième ordre décimal. Cette valeur est

$$\sin 10'' = 0,00004\,84813\,681.$$

Calculons maintenant le cosinus de $10''$, et, pour cela, nous emploierons la formule [22]

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}.$$

Si on y remplace $\sin\frac{a}{2}$ par $\frac{a}{2}$, ce qui donnera

$$\cos a = 1 - 2\frac{a^2}{4},$$

il est clair que l'erreur commise sur $\cos a$ sera

$$2\left(\frac{a^2}{4} - \sin^2\frac{a}{2}\right) = 2\left(\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right);$$

or,

$$\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2} < a, \quad \frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2} < \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3;$$

donc $\frac{a^2}{4} - \sin^2\frac{a}{2} < \frac{a^4}{32}$; et par conséquent, en prenant $1 - \frac{a^2}{2}$ pour la valeur de $\cos a$, on commettra une erreur moindre que $2\frac{a^4}{32} = \frac{a^4}{16}$; mais nous avons trouvé que a, qui représente l'arc de $10''$, est moindre que $\frac{1}{2.10^4}$; donc $\frac{a^4}{16} < \frac{1}{256.10^{16}}$, quantité moindre que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{18}}$. Donc, en calculant $\cos 10''$ au moyen de la formule $\cos a = 1 - \frac{a^2}{2}$, l'erreur sera moindre qu'une demi-unité du 18ᵉ ordre décimal; à plus forte raison, pourrons-nous nous borner aux treize premiers chiffres décimaux, comme nous l'avons fait pour le sinus, et nous trouverons ainsi que

$$\cos 10'' = 0,99999\,99988\,248.$$

Cela posé, si nous nous rappelons que la somme des sinus de deux arcs est égale au double produit du sinus de la demi-somme de ces arcs par le cosinus de leur demi-différence (34), et que la somme des cosinus de deux arcs est égale au double produit du cosinus de la demi-somme de ces arcs par le cosinus de leur demi-différence (35), nous aurons, en désignant par a un terme quelconque de la progression,

$$\div 0.10''.20''.30''.40''\ldots.45^\circ;$$

nous aurons, dis-je,

$$\sin(a+10'')+\sin(a-10'')=2\sin a\cos 10'',$$
$$\cos(a+10'')+\cos(a-10'')=2\cos a\cos 10''.$$

On tire de ces équations :

$$\sin(a+10'')=2\cos 10''.\sin a-\sin(a-10'') \quad [p],$$
$$\cos(a+10'')=2\cos 10''.\cos a-\cos(a-10'') \quad [q].$$

Or, $a-10''$, a, $a+10''$ sont trois termes consécutifs de notre progression; donc, *pour calculer le sinus de l'un quelconque des termes de cette progression, multipliez le double du cosinus de la raison par le sinus de l'arc précédent, et retranchez du produit le sinus de l'arc antéprécédent.* Mais on connaît le sinus et le cosinus des arcs 0° et 10''; donc, on pourra calculer, par cette règle, le sinus de 20'', puis celui de 30'', de 40'',.... et s'élever ainsi, de 10'' en 10'', jusqu'au sinus de 45°. On calculera les cosinus de ces mêmes arcs d'une manière analogue.

La valeur que nous avons trouvée plus haut pour cos 10'' diffère très-peu de l'unité : cette remarque a fourni le moyen de simplifier considérablement les calculs précédents. Désignons, en effet, par k le double de la différence entre l'unité et cos 10'', c'est-à-dire, posons

$$k=2(1-\cos 10'')=0{,}00000\,00023\,504;$$

il en résultera que $2\cos 10''=2-k$, et, en substituant cette expression dans les formules [p] et [q], on pourra écrire les valeurs de $\sin(a+10'')$ et de $\cos(a+10'')$ ainsi qu'il suit :

$$\sin(a+10'')=\sin a+[\sin a-\sin(a-10'')]-k\sin a,$$
$$\cos(a+10'')=\cos a+[\cos a-\cos(a-10'')]-k\cos a.$$

Ainsi, *pour calculer le sinus de l'un quelconque des arcs de la progression proposée, ajoutez au sinus de l'arc précédent l'excès de ce sinus sur celui de l'arc anté-précédent, et retranchez de la somme le produit du nombre constant* k *par le sinus de l'arc précédent.* Le cosinus se calculera d'une manière analogue.

On voit que l'application de cette règle n'exige d'opération qui puisse paraître laborieuse, que la multiplication de k par $\sin a$ ou par $\cos a$; or, on peut d'abord réduire cette multiplication à une simple addition, en formant, une fois pour toutes, les neuf premiers multiples de ce nombre constant k.

D'un autre côté, cette multiplication de k par $\sin a$ se réduira, dans les cas les plus compliqués, à l'addition de 5 produits partiels, tels que le premier contiendra 5 chiffres significatifs, et chacun des autres un de moins que le précédent. Supposons, en effet, que $\sin a = 0{,}73496\,88987\,654$, par exemple. Pour faire le produit de k par ce nombre, nous devrons ajouter ensemble les 7ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, 9ᵉ, 6ᵉ, 8ᵉ,.... multiples de k, mais dans lesquels on aura reculé la virgule de 1, 2, 3, 4, 5, 6,.... rangs vers la gauche, puisque les chiffres 7, 3, 4, 9, 6, 8.... représentent respectivement des unités décimales du 1ᵉʳ, 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, 5ᵉ, 6ᵉ,.... ordre; or, ces multiples de k se composant de treize chiffres décimaux dont les sept premiers au moins sont des zéros, on voit que le produit de k par 0,7 ne renfermera pas plus de 5 chiffres significatifs, si, comme on le doit, on ne conserve dans ce produit que 13 décimales. De même, le produit de k par 0,03 ne pourra pas contenir plus de 4 chiffres significatifs, etc. Ainsi la multiplication de k par $\sin a$ s'effectuera très-rapidement.

Lorsqu'il s'agit d'exécuter tant de calculs, on doit chercher à vérifier les résultats aussi souvent qu'il est possible, et ces vérifications sont d'ailleurs utiles pour savoir sur quel degré de précision on peut compter. En conséquence nous allons indiquer le moyen de calculer *directement* les sinus et cosinus des arcs de la progression

$$\div 0.9^\circ.18^\circ.27^\circ.36^\circ.45^\circ.$$

Nous avons vu précédemment que $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Il est facile aussi d'avoir le sinus de 18°; car il est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc de 36°, c'est-à-dire le dixième de la circonférence; mais le côté du décagone régulier est égal à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; donc $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. On tire de là $\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ}$ $= \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

En substituant ces valeurs de $\sin 18^\circ$ et de $\cos 18^\circ$ dans les formules [17] et [18], on obtiendra celles de $\sin 36^\circ$ et de $\cos 36^\circ$, et, au moyen des formules [36], il sera également facile de calculer le sinus et le cosinus de 9°. Les mêmes équations [36] nous conduiront aux valeurs du sinus et du cosinus

de 27°; car le sinus de 54° est connu, puisque cet arc est le complément de 36°. On formera de cette manière le tableau suivant :

$\sin 9^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}})$; $\cos 9^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}})$.

$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

$\sin 27^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})$; $\cos 27^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})$.

$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$.

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il sera facile de calculer ces formules aussi exactement qu'on le voudra, et, en comparant les résultats ainsi obtenus, avec ceux fournis par le calcul de 10″ en 10″, on verra quelles sont les décimales communes aux valeurs trouvées pour le sinus ou pour le cosinus d'un même arc, et on saura, de cette manière, sur quel degré d'approximation il est permis de compter pour les valeurs intermédiaires. On supprimera les décimales inexactes, on cherchera les logarithmes des nombres exprimés par celles que l'on aura conservées; et la table des logarithmes des sinus et des cosinus sera construite. On en déduira facilement celles des logarithmes des tangentes et des cotangentes, et il ne restera plus qu'à ajouter 10 unités à chaque logarithme trouvé pour avoir les *tables trigonométriques* usuelles.

CHAPITRE IV.

FORMULES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

54. Nous allons maintenant nous occuper de former les équations qui ont lieu entre les côtés d'un triangle et ses angles, mais auparavant nous rappellerons que si du sommet d'un angle quelconque A on décrit entre ses cotés les arcs MB, M'B', M''B'',.... les sinus de tous ces arcs seront proportionnels à leurs rayons, de sorte que l'on aura $\frac{MP}{AM}=\frac{M'P'}{AM'}=\frac{M''P''}{AM''}=$etc. Ainsi l'angle A étant donné, le rapport du sinus de l'un quelconque de ces arcs au rayon de cet arc est déterminé, et réciproquement*; par conséquent ce rapport suffit à la détermination de l'angle A. On l'a nommé le sinus de l'angle A. *Nous appellerons donc* SINUS D'UN ANGLE *le rapport du sinus de l'un quelconque des arcs compris entre ses côtés et décrits de son sommet comme centre au rayon de cet arc.* Ce rayon étant arbitraire, nous conviendrons, pour plus de simplicité, de le prendre égal à l'unité linéaire, et alors *le sinus d'un angle sera le nombre abstrait qui exprime la longueur du sinus de l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre avec l'unité linéaire pour rayon.* Comme cette définition s'étend aux autres lignes trigonométriques, on voit que les symboles sin A, cos A, tang A, cot A, etc., qui entreront dans nos formules, ne seront que des nombres abstraits. Fig. 3.

55. THÉORÈME. *Dans tout triangle, le double produit du cosinus d'un angle par les deux côtés qui le comprennent est égal à la somme des carrés de ces deux côtés diminuée du carré du troisième.*

Soit ABC le triangle proposé, nous conviendrons de dési- Fig. 11.

* Observons cependant que, comme deux arcs supplémentaires ont des sinus égaux, la connaissance du rapport du sinus d'un arc intercepté par les côtés d'un angle au rayon de cet arc, ne détermine pas complétement cet angle, puisqu'il y en a deux pour lesquels ce rapport est le même. Il faut encore savoir si l'angle dont il s'agit est aigu ou obtus.

gner les angles de ce triangle par les lettres A, B, C placées à leurs sommets, et les côtés opposés respectivement par a, b, c. Ainsi A et a désigneront l'angle BAC et le côté BC. Cela posé, abaissons du sommet C une perpendiculaire CI sur le côté opposé AB, et nous aurons, en vertu d'un théorème connu de géométrie,

$$a^2=b^2+c^2-2c.\mathrm{AI}.$$

Or, si du point A comme centre avec l'unité linéaire pour rayon, on décrit l'arc DE entre les cotés de l'angle CAI, et qu'on abaisse DF perpendiculairement sur AI, cette droite DF sera le sinus de l'angle CAI, et partant de l'angle A (34), et AF en sera le cosinus; mais les triangles ACI et ADF sont semblables; donc

$$\mathrm{AD}:\mathrm{AC}::\mathrm{AF}:\mathrm{AI},$$

ou

$$1:b::\cos\mathrm{A}:\mathrm{AI}=b\cos\mathrm{A}.$$

Substituant à AI cette valeur dans l'expression de a^2, il viendra

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}.$$

Quoique cette formule ait été établie en supposant que l'angle A fût aigu, elle n'en convient pas moins au cas où cet angle serait obtus; car, au lieu d'avoir

$$a^2=b^2+c^2-2c.\mathrm{AI},$$

on aurait

$$a^2=b^2+c^2+2c.\mathrm{AI};$$

mais aussi l'angle CAI étant alors le supplément de l'angle BAC, son cosinus AF serait égal à $-\cos\mathrm{A}$, et par conséquent on aurait encore

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}.$$

Enfin cette équation est encore vraie quand l'angle A est droit, puisque, d'après le théorème de *Pythagore*, on a, dans ce cas,

$$a^2=b^2+c^2.$$

En transposant les termes a^2 et $-2bc\cos\mathrm{A}$, il viendra

$$2bc\cos\mathrm{A}=b^2+c^2-a^2,$$

ce qui est la traduction algébrique de notre théorème.

36. Si l'on applique le théorème que nous venons de dé-

montrer successivement aux trois angles A, B et C du triangle ABC, on obtiendra les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 2bc\cos A &= b^2+c^2-a^2, \\ 2ac\cos B &= a^2+c^2-b^2, \\ 2ab\cos C &= a^2+b^2-c^2, \end{aligned}\right\} \qquad [50]$$

qui fournissent la solution complète du problème général que se propose la trigonométrie, puisqu'elles renferment les six éléments de tout triangle, et qu'ainsi, lorsque l'on connaîtra trois de ces quantités, on pourra en déduire les trois autres. Cependant, s'il s'agissait de calculer les trois côtés en fonction des trois angles, on devrait trouver des valeurs indéterminées pour les inconnues a, b, c, puisque tous les triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels.

Le problème de la résolution des triangles est donc ramené à une simple question d'algèbre, à la résolution des équations [50]. Or, les formules qui donneront les valeurs des inconnues, contiendront chacune l'inconnue et les trois données, c'est-à-dire quatre des éléments du triangle; et comme, avec ces six éléments, on ne peut former que les quatre combinaisons suivantes :

Un côté et les trois angles ;

Deux côtés et les angles opposés ;

Deux côtes, l'angle compris et l'angle opposé à l'un d'eux ;

Trois côtés et un angle,

il ne peut pas y avoir plus de quatre classes de formules à chercher. Mais une équation ne peut pas renfermer *un côté et les trois angles*, sans quoi il serait possible de résoudre un triangle dont on ne connaîtrait que les angles; d'un autre côté, notre théorème fondamental nous donne une relation entre les *trois côtés et un angle;* ainsi il n'y a réellement à chercher que les formules de la seconde et de la troisième classe : c'est ce que nous allons faire en commençant par le cas des triangles rectangles.

Comme l'angle droit est alors une donnée de la question, et que les deux angles aigus d'un pareil triangle étant complémentaires, le sinus ou la tangente de l'un pourra être remplacé par

le cosinus ou par la cotangente de l'autre, *et vice versa*, il faudra trouver deux équations qui contiendront respectivement :

L'hypoténuse, un côté de l'angle droit et un angle ;

Les deux côtés de l'angle droit et un angle.

Fig. 12. **57**. Je suppose donc que l'angle A soit droit : j'exprimerai cette condition dans la seconde des équations [50], en y écrivant que $a^2=b^2+c^2$, et je trouverai ainsi, toutes réductions faites,

$$c=a\cos B,$$

ce qui nous apprend que, *dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est le produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle adjacent ou par le sinus de l'angle opposé;* car $\cos B=\sin C$.

58. Il suit de là que *la projection d'une droite sur une autre est égale au produit de cette droite multipliée par le cosinus de l'angle* AIGU *qu'elles font entre elles*. En effet,
Fig. 13. supposons que par les extrémités de la droite AB on ait mené deux plans perpendiculaires à la droite indéfinie UV, la portion A'B' de cette droite comprise entre eux sera la projection de AB. Mais, si par le point A on tire une parallèle AC à UV, terminée en C à la rencontre du plan qui passe par le point B, cette droite AC sera égale à A'B', et l'angle BAC qu'elle formera avec AB sera ce qu'on est convenu d'appeler l'angle α de AB avec UV ; or, le triangle rectangle ABC donne $AC=AB.\cos BAC$, ou bien $A'B'=AB.\cos\alpha$, ce qu'il fallait démontrer.

59. Le théorème du n° 57 nous donne les deux équations

$$c=a\cos B,\quad b=a\sin B:$$

si l'on divise ces deux équations membre à membre et qu'on se reporte à la formule [8], on trouvera

$$b=c\tang B;$$

Fig. 12. c'est-à-dire que, *dans tout triangle rectangle, un côté quelconque de l'angle droit est égal à la tangente de l'angle opposé multipliée par l'autre côté de l'angle droit.*

60. Si l'on veut démontrer synthétiquement les deux théorèmes que nous venons d'établir sur le triangle rectangle, on décrira, du point B comme centre et avec l'unité linéaire pour rayon, un arc de cercle DE entre les côtés de l'an-

gle ABC, puis en tirant par les points D et E les perpendiculaires DF et EG au côté AB, on formera deux triangles BDF, BGE semblables au triangle ABC, et en comparant leurs côtés homologues, on trouvera

$$BD:BC::DF:AC::BF:AB, \quad \text{et} \quad BE:BA::EG:AC,$$

ou bien

$$1:a::\sin B:b::\cos B:c, \qquad \text{et} \qquad 1:c::\text{tang} B:b;$$

relations d'où l'on tire

$$b=a\sin B, \quad c=a\cos B, \quad b=c\,\text{tang}B.$$

Ces formules sont la traduction algébrique des théorèmes énoncés aux n°s 57 et 59.

61. Venons maintenant au cas des triangles obliquangles. Il s'agit de *trouver* d'abord *une relation entre les deux angles* A *et* B, par exemple, *et les côtés opposés* a *et* b (56).

Les deux premières des équations [50] renferment ces quatre quantités et en outre le côté c; donc en éliminant ce côté, nous aurons la relation cherchée. Pour cela, il faudra, conformément aux règles de l'élimination entre deux équations du second degré à deux inconnues (*Algèbre*, **224**), éliminer d'abord c^2 entre ces équations

$$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2, \quad \text{et} \quad 2ac\cos B=a^2+c^2-b^2,$$

ce qui se fera en les retranchant membre à membre. On trouvera ainsi, toutes réductions faites,

$$c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2.$$

On devrait actuellement tirer c de cette équation pour en substituer la valeur dans l'une des proposées; mais il sera plus simple de tâcher de déduire de ces mêmes équations une nouvelle équation où c n'entrera encore qu'à la première puissance, et il suffit, pour cela, de les ajouter, ce qui donnera, après avoir divisé par $2c$,

$$a\cos B+b\cos A=c.$$

Or, si l'on multiplie cette équation et la précédente membre à membre, on pourra supprimer le facteur c qui sera commun aux deux membres de l'équation-produit, et on trouvera

$$a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A=a^2-b^2.$$

Cette équation ne renfermant plus que les deux angles A et

B et les côtés a et b qui leur sont opposés, est par conséquent la relation cherchée. Mais on peut lui donner une forme plus simple; car, en transposant les termes $a^2\cos^2 B$ et $-b^2$, et en ayant égard à la formule [7], il viendra

$$b\sin A = a\sin B,\quad \text{d'où}\quad \sin A : \sin B :: a : b.$$

C'est donc à dire que, *dans tout triangle rectiligne, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés qui sont opposés à ces angles.*

On peut donner de cet élégant théorème une démonstration synthétique qui, ne s'appuyant que sur des définitions, permettrait d'en faire le théorème fondamental de la trigo-
Fig. 14. nométrie *. Soit ABC le triangle proposé, je lui circonscris une circonférence de cercle, et du centre O avec l'unité linéaire pour rayon, j'en décris une seconde qui coupe en A', B' et C' les droites OA, OB et OC. Je détermine ainsi un

---

* Il faudrait alors pouvoir en déduire le théorème du n° 55. Or, la chose est facile. En effet, le théorème de la proportionnalité des sinus des angles d'un triangle aux côtés opposés, donne les deux équations

$$a\sin B = b\sin A,\quad a\sin C = c\sin A.$$

On a de plus

$$A + B + C = 180^\circ.$$

En éliminant C entre les deux dernières, on trouvera (18)

$$c\sin A = a\sin(A + B).$$

Mais on sait (29) que

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A;$$

donc

$$c\sin A = a\sin A\cos B + a\sin B\cos A.$$

Je remplace $a\sin B$ par son égal $b\sin A$, et en divisant les deux membres de l'équation résultante par $\sin A$, ce qui est permis, puisque l'angle A ne peut être égal ni à zéro ni à 180°, il viendra

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Mais de la première équation, on tire $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$, et comme $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B}$, on aura

$$\cos B = \sqrt{1 - \frac{b^2\sin^2 A}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}}{a},\ \text{donc}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A} + b\cos A.$$

Enfin, si on fait évanouir le radical, on tirera de là

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2.$$

triangle A'B'C', qui est évidemment semblable au triangle proposé ABC, de sorte que l'on a

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'.$$

Or, l'angle A, étant égal à A', a pour mesure la moitié de l'arc B'C', et par conséquent son sinus est la moitié de la corde B'C' de cet arc (**54** et **6**). Par une raison semblable,
$\sin B = \frac{1}{2} A'C'$ et $\sin C = \frac{1}{2} A'B'$. Si donc on divise par 2 tous les conséquents de la suite ci-dessus, on trouvera

$$c : \sin C :: b : \sin B :: a : \sin A,$$

ce qui démontre notre théorème.

62. Nous allons maintenant *chercher une relation entre deux côtés d'un triangle, l'angle qu'ils comprennent et l'angle opposé à l'un d'eux;* par exemple, entre a, b, C et A. Or, puisque $\sin B = \sin(A+C)$, l'équation $a \sin B = b \sin A$, devient

$$a \sin(A+C) = b \sin A \qquad [51].$$

Telle est la relation demandée.

Si l'inconnue de la question est une des trois quantités a, b, C, il sera facile de tirer sa valeur de cette équation; mais si cette inconnue est l'angle A, comment faire? L'équation [51] revient à

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A},$$

d'où l'on tire, par un principe connu d'arithmétique,

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\sin(A+C)+\sin A}{\sin(A+C)-\sin A};$$

et par conséquent, en vertu du théorème du n° **37**,

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\tang\left(A+\frac{C}{2}\right)}{\tang\frac{C}{2}},$$

formule au moyen de laquelle il sera facile de calculer la valeur de l'angle A.

On peut lui donner une autre forme, en observant que $\frac{C}{2}$ est le complément de $\frac{A+B}{2}$, et que $\frac{B-A}{2}$ est le complément

de $\left(A+\frac{C}{2}\right)$: il en résulte que $\tang\frac{C}{2}=\cot\frac{B+A}{2}=\frac{1}{\tang\frac{B+A}{2}}$

et que $$\tang\left(A+\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{B-A}{2}=\frac{1}{\tang\frac{B-A}{2}}.$$

La formule précédente devient par la substitution de ces valeurs

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\tang\frac{1}{2}(B+A)}{\tang\frac{1}{2}(B-A)} \qquad [52].$$

Ainsi, *dans tout triangle, la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de leur demi-différence.*

Pour démontrer directement ce théorème, on partira de la formule

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A},$$

d'où l'on tirera (37)

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\sin B+\sin A}{\sin B-\sin A}=\frac{\tang\frac{1}{2}(B+A)}{\tang\frac{1}{2}(B-A)}.$$

Comme nous supposons que a, b, C sont donnés, on connaît trois termes dans la formule [52], puisque $\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$; on pourra donc en déduire $\frac{A-B}{2}$ et par suite calculer A et B. Ainsi la formule [52] peut très-bien remplacer la formule [51].

A l'aide de ce théorème et de ceux que nous avons démontrés aux n^{os} **55** et **61**, on pourra résoudre un triangle obliquangle quelconque, pourvu que parmi les trois données il y ait au moins un côté.

63. *Prouvons* ANALYTIQUEMENT *que la connaissance des angles d'un triangle ne peut pas suffire à la détermination de ses côtés*. Pour démontrer ce principe, je commence par établir qu'au système de trois équations à trois inconnues

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0 \qquad [\alpha],$$

on peut substituer les équations

$$A+B=0, \quad A+C=0, \quad B+C=0 \quad [\beta],$$

formées en les ajoutant deux à deux. Il est d'abord évident que tout système de valeurs des inconnues qui satisfait aux équations [α] vérifie les équations [β]. On voit ensuite que tout système de valeurs qui vérifie les équations [β] vérifie aussi celle qu'on obtient en retranchant la troisième de la somme des deux premières, c'est-à-dire l'équation $(A+B)+(A+C)-(B+C)=0$, ou $A=0$: par une raison semblable, ce système satisfait aussi aux équations $B=0$, et $C=0$; donc le système des équations [β] est équivalent à celui des équations [α].

D'après cela, je combine les équations [50] deux à deux par voie d'addition, et en supprimant les facteurs c, b, a, communs aux deux membres des équations résultantes, ce qui est permis, puisque ces quantités ne sauraient être nulles, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} a\cos B+b\cos A=c \\ a\cos C+c\cos A=b \\ b\cos C+c\cos B=a \end{array}\right\} \quad [\gamma],$$

de sorte qu'au lieu de trois équations du second degré, nous n'avons plus à résoudre que trois équations du premier. J'élimine donc c entre les deux premières, et je trouve

$$a(\cos A\cos B+\cos C)+b\cos^2 A=b,$$

ou

$$\cos A\cos B+\cos C=\frac{b}{a}\sin^2 A \quad [\delta].$$

Pour éliminer c entre la première et la troisième des équations [γ], on observera que la première ne change pas quand on y permute a et b, A et B, tandis que par cette même permutation la seconde devient la troisième : si donc on fait cette permutation dans l'équation [δ], on aura précisément l'équation finale que fournirait l'élimination de c entre la première et la troisième des équations [γ]. Cette équation finale est donc

$$\cos B\cos A+\cos C=\frac{a}{b}\sin^2 B \quad [\varepsilon].$$

Mais, en vertu du n° 61, on a

$$a\sin B=b\sin A, \quad \text{d'où l'on tire} \quad a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A,$$

et, en divisant les deux membres de cette dernière par ab,

$$\frac{a}{b}\sin^2 B = \frac{b}{a}\sin^2 A.$$

Les équations [δ] et [ε] sont donc identiques; donc on n'a qu'une seule équation entre les deux inconnues a et b, qui sont par conséquent *indéterminées*. Quant à leur rapport $\frac{a}{b}$, il est au contraire déterminé, puisqu'il a pour valeur $\frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin^2 A}$.

Pour reconnaître que les équations [γ] sont indéterminées, on pourrait observer que les termes tous connus de ces équations étant nuls, il suffit de vérifier que le dénominateur commun des valeurs des inconnues a, b, c, est égal à zéro (*Algèbre*, **152**). Or, en formant ce dénominateur par la règle de *Cramer* (*Algèbre*, **140**), on trouve

$$-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C + 1;$$

quantité qui se réduit à *zéro*, lorsqu'on y remplace $\cos C$ par son égal $-\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B$.

64. Comme les tables trigonométriques donnent les logarithmes des *sinus*, *cosinus*, etc. des arcs moindres que 90°, et non pas les valeurs mêmes de ces lignes, il faudra préparer les formules que nous avons données pour la résolution des triangles, de manière qu'on puisse y appliquer les logarithmes, c'est-à-dire qu'on ne soit obligé de passer des nombres aux logarithmes et de revenir des logarithmes aux nombres que le moins souvent possible. On atteindra ce but en transformant l'expression de l'inconnue en produits ou quotients de puissances quelconques de quantités dont les tables fassent connaître immédiatement les logarithmes, si cette expression a une tout autre forme, et la chose sera possible; car

On peut toujours calculer par logarithmes la somme ou la différence de deux quantités, et par suite la somme algébrique de tant de quantités que l'on voudra.

1° Soit d'abord un binôme $(a+b)$ dont les deux termes sont positifs. Je mets a en facteur commun, ce qui donne $a+b = a\left(1+\frac{b}{a}\right)$. Or, nous avons vu que si un arc croît

d'une manière continue depuis *zéro* jusqu'à 90°, sa tangente augmente pareillement d'une manière continue depuis *zéro* jusqu'à l'*infini* : ainsi, quelle que soit la grandeur de la quantité *positive* $\frac{b}{a}$, nous pourrons toujours trouver dans le premier quadran un arc φ dont la tangente soit égale à $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Posons donc

$$\operatorname{tang}\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

et il viendra

$$a+b=a(1+\operatorname{tang}^2\varphi)=a\left(1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)=\frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Ainsi on pourra, au moyen d'une table de sinus, déterminer d'abord l'angle φ, puis son cosinus, et calculer ensuite la somme $(a+b)$ par logarithmes.

2° Soit $(a-b)$ un binôme dont le second terme est négatif, et supposons en outre $a > b$. On mettra encore a en facteur commun, ce qui donnera $a-b=a\left(1-\frac{b}{a}\right)$. Ici $\frac{b}{a}$ étant une quantité positive moindre que l'unité, on pourra toujours trouver dans le premier quadran un arc φ dont le sinus soit égal à la racine carrée de $\frac{b}{a}$: ainsi on posera

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

et il viendra

$$a-b=a(1-\sin^2\varphi)=a\cos^2\varphi.$$

Donc on pourra calculer $(a-b)$ par logarithmes.

Le rayon des tables de sinus n'étant pas l'unité linéaire, on remplacera, dans les formules précédentes, chaque ligne trigonométrique par son rapport à ce rayon que je désignerai par R (27), et en prenant ensuite les logarithmes des deux membres, on trouvera

1° $$\log\operatorname{tang}\varphi=\log R+\frac{\log b-\log a}{2};$$
$$\log(a+b)=\log a+2\log R-2\log\cos\varphi.$$

2° $$\log\sin\varphi=\log R+\frac{\log b-\log a}{2};$$
$$\log(a-b)=\log a+2\log\cos\varphi-2\log R.$$

65. Supposons que des deux termes du binôme que l'on veut transformer en un monôme, l'un contienne le sinus et l'autre le cosinus d'un certain arc, et soit, par exemple, le binôme

$$A\sin\alpha + B\cos\alpha:$$

on mettra d'abord le coefficient de $\sin\alpha$ ou de $\cos\alpha$ en facteur commun, ce qui donnera

$$A\sin\alpha + B\cos\alpha = A\left(\sin\alpha + \frac{B}{A}\cos\alpha\right),$$

puis on posera $$\frac{B}{A} = \operatorname{tang}\varphi,$$

et il en résultera

$$A\sin\alpha + B\cos\alpha = A(\sin\alpha + \operatorname{tang}\varphi\cos\alpha)$$
$$= \frac{A(\sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha)}{\cos\varphi} = \frac{A\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

En rétablissant le rayon R, on aura donc, pour calculer la valeur de notre binôme, les deux équations

$$\log\operatorname{tang}\varphi = \log R + \log B - \log A,$$
$$\log(A\sin\alpha + B\cos\alpha) = \log A + \log\sin(\alpha+\varphi) - \log\cos\varphi.$$

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

§ I. Triangles rectangles.

66. 1er Cas. *Résoudre un triangle rectangle dans lequel on connaît l'hypoténuse* a *et un angle aigu* B. Fig. 42.

Les inconnues de la question sont l'angle C et les deux côtés de l'angle droit b et c.

Comme les formules que nous avons établies pour la résolution des triangles l'ont été en supposant que le rayon des tables trigonométriques fût l'unité, tandis que les tables usuelles ont été construites dans une tout autre hypothèse, il faudra, avant d'employer ces formules, y remplacer chaque ligne trigonométrique par son rapport au rayon (27), que nous représenterons par R. Nous supposerons donc désormais que cette substitution y ait été faite. De plus, il faudra toujours préparer les formules de manière qu'on puisse y appliquer les logarithmes (64).

Cela posé, revenons à la question proposée. Nous aurons d'abord la valeur de l'angle inconnu C, en prenant le complément de l'angle B. Ensuite, on déterminera les deux côtés b et c en employant la formule qui renferme l'hypoténuse, un angle et un côté de l'angle droit (57). Donc

$$b=a\frac{\sin B}{R},\quad \text{et}\quad c=a\frac{\cos B}{R};$$

d'où l'on tire

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log R,$$

et

$$\log c=\log a+\log\cos B-\log R,$$

et il sera facile d'obtenir ainsi les valeurs de b et de c. Pour les verifier, on pourra calculer de nouveau le côté c par le théorème de *Pythagore,* au moyen de la formule

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)},$$

d'où

$$\log c=\frac{\log(a+b)+\log(a-b)}{2}.$$

67. 2e Cas. *Étant donnés l'hypoténuse* a *et un côté* b, *calculer le troisième côté* c, *et les deux angles* B *et* C.

On calculera le troisième côté c, par le théorème de *Pythagore*, au moyen de la formule

$$\log c = \frac{\log(a+b)+\log(a-b)}{2}.$$

Ensuite pour obtenir l'angle B, par exemple, on fera usage de la relation qui a lieu entre l'hypoténuse, un angle et un côté (**57**), ce qui donnera

$$b = a\frac{\sin B}{R}, \quad \text{d'où} \quad \log\sin B = \log b + \log R - \log a.$$

On cherchera dans les tables la valeur trouvée pour log sin B, et à côté on lira celle de l'angle B. Il n'y aura qu'à retrancher cet angle de 90°, pour connaître l'angle C.

Si l'on veut vérifier les résultats que l'on aura trouvés, on pourra calculer l'angle C en fonction de c par la formule

$$c = a\frac{\sin C}{R}, \quad \text{d'où} \quad \log\sin C = \log c + \log R - \log a,$$

et si la nouvelle valeur de C s'accorde avec la première, on en conclura non-seulement que cette première valeur de C est exacte, mais que celle de c l'est aussi.

68. 3ᵉ Cas. *Résoudre un triangle rectangle dans lequel on connaît un côté* b *de l'angle droit et un angle* B.

Il s'agit de trouver l'angle C, l'hypoténuse a et le côté c. On aura immédiatement l'angle C en prenant le complément de B; on obtiendra ensuite l'hypoténuse a et le côté c, en faisant usage 1° de la relation qui existe entre l'hypoténuse, un côté et un angle (**57**); 2° de celle qui lie les deux côtés de l'angle droit avec un angle (**59**). Donc

$$b = a\frac{\sin B}{R}, \quad \text{d'où} \quad \log a = \log b + \log R - \log\sin B;$$

$$b = c\frac{\tang B}{R}, \quad \text{d'où} \quad \log c = \log b + \log R - \log\tang B.$$

Si l'on veut vérifier les valeurs trouvées pour a et c, on pourra s'en servir pour calculer de nouveau l'angle C (**67**) à l'aide de l'équation

$$\log\sin C = \log c + \log R - \log a.$$

69. 4ᵉ Cas. *Connaissant les deux côtés de l'angle droit, trouver l'hypoténuse* a *et les angles* B *et* C.

On calculera l'angle B par le théorème du n° **59**, c'est-à-dire par la formule

$$b = c\frac{\text{tang}\,B}{R}, \quad \text{d'où} \quad \log\text{tang}\,B = \log b + \log R - \log c.$$

L'angle B étant connu, on aura C par l'équation $C = 90° - B$, et enfin l'hypoténuse a par le théorème du n° **57**, qui nous donnera

$$b = a\frac{\sin B}{R}, \quad \text{d'où} \quad \log a = \log b + \log R - \log\sin B.$$

On vérifiera les valeurs trouvées en calculant c à l'aide du théorème de *Pythagore* (**66**).

§ II. Trangles obliquangles.

70. 1er Cas. *Résoudre un triangle connaissant un côté et deux angles.*

On aura immédiatement le troisième angle, en prenant le supplément de la somme des deux angles connus. Ensuite on déterminera un des côtés inconnus au moyen de la relation qui existe entre deux côtés et les angles opposés, c'est-à-dire à l'aide du théorème du n° **61**. Si donc c est le côté connu, on posera les équations

$$c\sin A = a\sin C, \quad \text{d'où} \quad \log a = \log c + \log\sin A - \log\sin C;$$
$$c\sin B = b\sin C, \quad \text{d'où} \quad \log b = \log c + \log\sin B - \log\sin C;$$

71. 2e Cas. *Étant donnés deux côtés* a *et* b *et l'angle* A *opposé au premier, calculer le troisième côté* c *et les deux angles* B *et* C.

Si l'on veut calculer l'angle B, il faudra employer une formule qui renferme les données a, b, A et l'inconnue B. On aura donc recours au théorème du n° **61**, et on posera, en conséquence, l'équation

$$a\sin B = b\sin A, \quad \text{d'où} \quad \log\sin B = \log b + \log\sin A - \log a.$$

Mais il se présente ici une difficulté qui ne s'était pas encore rencontrée, c'est que l'angle B, étant donné par son sinus, est susceptible en général de deux valeurs, puisque les sinus de deux angles supplémentaires sont égaux. Faut-il donc prendre la valeur moindre que 90° indiquée par la table de sinus, ou bien son supplément?

Si l'angle A est droit ou obtus, il est clair que l'angle B

est aigu, et qu'en conséquence il n'y a aucune incertitude. Supposons donc que l'angle A soit plus petit que 90° : trois cas pourront se présenter, suivant qu'on aura $a>b$, $a=b$, et $a<b$.

Dans les deux premiers, l'angle B est aigu, puisqu'il doit être plus petit que A ou égal à A, d'après des théorèmes de géométrie élémentaire. Mais si $a<b$, l'angle $A<B$, et cette condition est également satisfaite, en prenant, pour valeur de l'angle B, l'angle aigu donné par les tables de sinus ou son supplément, attendu que le calcul déterminera pour B une valeur supérieure à celle de A. En effet, l'équation $b\sin A=a\sin B$ prouve que a étant $<b$, $\sin A$ sera $<\sin B$; et comme de deux angles aigus celui qui a le plus grand sinus est le plus grand (**13**), il s'ensuit que $B>A$. *Le problème aura donc deux solutions dans le cas où l'angle* A *étant aigu, on aura* $a<b$.

Observons toutefois que pour que ce problème soit possible, il faut, en supposant le rayon égal à l'unité, que l'équation $b\sin A=a\sin B$, donne pour $\sin B$ une valeur moindre que l'unité (**13**), ce qui exige que $b\sin A$ soit plus petit que a; et en effet $b\sin A$ est la mesure de la perpendiculaire CI
Fig. 11. abaissée de l'extrémité C du côté $AC=b$ sur le côté AB (**57**); or, il est évident que si le côté a était moindre que cette perpendiculaire, le triangle ABC ne saurait exister.

Toute cette discussion est parfaitement d'accord avec celle à laquelle conduit la construction géométrique d'un triangle dans lequel on connaît b, a et A (*Géom.*, **210**).

L'angle B étant connu, on déterminera l'angle C par l'équation $C=180°-(A+B)$, et on obtiendra ensuite le côté c par l'équation

$$c\sin A=a\sin C.$$

72. Si on veut calculer directement le côté c en fonction des données, on devra employer une formule qui contienne à la fois les trois côtés et l'angle A; ainsi on fera usage du théorème fondamental (**55**) :

$$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2, \quad \text{d'où} \quad c^2-2b\cos A.c+b^2-a^2=0.$$

On tire de cette équation

$$c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}.$$

Cette formule n'étant pas calculable par logarithmes, il faut

la transformer en une autre qui le soit. Pour cela, conformément à la règle du n° **64**, je mets a^2 en facteur commun sous le radical, ce qui donne $a^2\left(1-\frac{b^2\sin^2 A}{a^2}\right)$, et comme $\frac{b\sin A}{a}$ ne surpasse pas l'unité, sans quoi la valeur de c serait imaginaire, et il n'y aurait pas lieu de la calculer, je pose $\frac{b\sin A}{a}=\sin\varphi$; de cette manière la valeur de c se réduit à

$$c=b\cos A\pm a\cos\varphi,$$

quantité binôme, et par conséquent réductible à un monôme (**64**). Pour l'y ramener par la voie la plus simple, je remplace b par sa valeur $\frac{a\sin\varphi}{\sin A}$ tirée de l'équation de condition, et je trouve

$$c=\frac{a(\sin\varphi\cos A\pm\sin A\cos\varphi)}{\sin A},$$

d'où, en ayant égard aux formules [13] et [15],

$$c=\frac{a\sin(\varphi\pm A)}{\sin A}.$$

Ainsi l'on calculera d'abord l'angle φ par la formule

$$\sin\varphi=\frac{b\sin A}{a},$$

puis on substituera la valeur que la table de sinus donnera pour φ dans la dernière expression de c, et on obtiendra facilement cette inconnue.

Remarquons, au surplus, que cette solution rentre dans la première (**71**); en effet, en vertu de l'équation qui le détermine, l'angle aigu φ est égal à l'angle B ou supplémentaire de cet angle, puisque leurs sinus sont égaux : par conséquent, $\sin(\varphi\pm A)=\sin(B'\pm A)$ ou $=\sin(180^\circ-B'\pm A)=\sin(B'\mp A)$, en désignant par B' la valeur tabulaire de l'angle B, de sorte que $c=\frac{a\sin(B'\pm A)}{\sin A}$. Mais le calcul indiqué au n° **71** donne

$$\sin C=\sin(180^\circ-B'-A)=\sin(B'+A)$$

ou $$\sin C=\sin(180^\circ-180^\circ+B'-A)=\sin(B'-A);$$

donc il en résulte $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{a\sin(B'\pm A)}{\sin A}$.

La formule $c=\frac{a\sin(\varphi\pm A)}{\sin A}$ donnera lieu à une discussion analogue à celle que nous avons faite sur l'angle B, et c'est un exercice qu'il sera bon de ne pas négliger. On pourra même observer que l'équation $\sin\varphi=\frac{b\sin A}{a}$ donne, pour l'angle φ, une infinité de valeurs comprises dans les formules $\varphi=2k\pi+\alpha$ et $\varphi=(2k+1)\pi-\alpha$, en appelant α le plus petit des angles qui ont $\frac{b\sin A}{a}$ pour sinus (**14**); mais on ramènera immédiatement la discussion au cas où $\varphi=\alpha$.

73. 3[e] Cas. *Résoudre un triangle connaissant deux côtés* a, b *et l'angle compris* C.

Il s'agit de trouver les angles A et B et le troisième côté c. Deux méthodes se présentent, comme dans le problème précédent, pour déterminer ces inconnues, et nous allons les exposer successivement.

1[re] Méthode. L'angle C étant donné, on aura immédiatement la demi-somme des deux autres, en retranchant $\frac{C}{2}$ de 90°; quant à leur demi-différence, il sera facile de la calculer au moyen du théorème du n° **62**; ainsi, en supposant que a soit plus grand que b, on posera l'équation

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}},$$

d'où

$$\log\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\log\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}+\log(a-b)-\log(a+b).$$

On cherchera dans les tables trigonométriques la valeur trouvée pour le logarithme de $\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}$, et on lira à côté celle de l'angle $\frac{A-B}{2}$. Il n'y aura donc qu'à combiner successivement par addition et par soustraction les valeurs de $\frac{A+B}{2}$ et de $\frac{A-B}{2}$, et on aura celles des angles A et B.

Ces angles étant connus, on calculera le côté c par le théorème du n° **61**

$$c\sin A=a\sin C\,*.$$

* Pour obtenir la valeur de c, à l'aide de cette formule, on a trois

74. 2ᵉ MÉTHODE. Nous allons calculer directement le côté c par l'équation

$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2, \quad \text{d'où} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Le second membre n'étant pas calculable par logarithmes, nous le réduirons à un binôme. Il suffira, pour cela, de remplacer $\cos C$ par sa valeur donnée en fonction de $\cos\frac{C}{2}$, ou de $\sin\frac{C}{2}$ par les formules [21] et [22] : par exemple, par $\left(2\cos^2\frac{C}{2} - 1\right)$, car il viendra ainsi

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{C}{2}.$$

En appliquant à cette formule la méthode du nº **64**, on trouvera

$$\sin\varphi = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{a+b}\sqrt{ab}\,^*, \quad \text{puis} \quad c = (a+b)\frac{\cos\varphi}{R},$$

nouveaux logarithmes à chercher : or, on peut, en calculant c d'une autre manière, n'avoir besoin que de deux nouveaux logarithmes. En effet, de la suite

$$a : \sin A :: b : \sin B :: c : \sin C,$$

on tire

$$a - b : \sin A - \sin B :: c : \sin C, \quad \text{d'où} \quad c = \frac{(a-b)\sin C}{\sin A - \sin B}.$$

Or, $\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$, et $\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$: donc

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}},$$

et le logarithme de $(a-b)$ est connu.

* On a le droit de poser cette équation; car le triangle dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris étant toujours possible, il faut que l'équation précédente donne pour c une valeur réelle, ce qui exige que l'on ait $\frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2\frac{C}{2} < 1$. Au reste, si l'on ajoute $4ab$ aux deux membres de l'inégalité $(a-b)^2 > 0$, il viendra $(a+b)^2 > 4ab > 4ab\cos^2\frac{C}{2}$.

équations desquelles on tire

$$\log \sin \varphi = \frac{\log a + \log b}{2} + \log 2 + \log \cos \frac{C}{2} - \log (a+b),$$

et $$\log c = \log(a+b) + \log \cos \varphi - \log R.$$

On commencera donc par calculer l'angle φ par la première de ces deux formules, et, en substituant la valeur trouvée dans la seconde, on en déduira celle de c.

Il s'agit maintenant d'évaluer les angles A et B; mais, pour éviter l'ambiguïté qui se présente toujours lorsqu'un angle est déterminé par son sinus, à moins qu'on ne sache *a priori* que cet angle est aigu ou obtus, nous calculerons d'abord le plus petit des angles A et B. Ainsi, en supposant $a > b$, nous poserons l'équation

$$c \sin B = b \sin C,$$

de laquelle on tirera log sin B, et on prendra pour B la valeur tabulaire correspondante, puisque cet angle $B < 90°$. On pourra obtenir l'angle A, en prenant le supplément de $B + C$; mais il vaudra mieux le calculer par la formule

$$c \sin A = a \sin C,$$

ce qui peut se faire sans ambiguïté, puisque la connaissance des angles B et C détermine la nature de A; et on aura une vérification de tous les calculs, en examinant si la somme des trois angles A, B et C vaut 180°.

75. 4ᵉ Cas. *Résoudre un triangle dont on connaît les trois côtés.*

Nous déterminerons l'angle A par le théorème fondamental (**55**), et nous trouverons

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Pour rendre cette formule calculable par logarithmes, je remarque que si j'ajoute une unité aux deux membres de cette équation, le second membre se réduira à un binôme; car il deviendra $\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$, et le premier qui deviendra le binôme $1 + \cos A$ se réduira immédiatement (**33**) au monôme

$2\cos^2\frac{A}{2}$. On trouvera donc ainsi

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc},$$

puisque la différence des carrés de deux quantités est égale au produit de la somme de ces quantités par leur différence. Or, si l'on représente par $2p$ le périmètre du triangle, c'est-à-dire si l'on pose

$$b+c+a=2p,$$

on en tirera

$$b+c-a=2(p-a),$$

et par suite

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc},\quad \text{d'où}\quad \cos\frac{A}{2}=R\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\qquad [53],$$

en extrayant la racine carrée et restituant le rayon R. Je ne mets pas le double signe $\pm$ devant le radical, parce que $\cos\frac{A}{2}$ est nécessairement positif. Cette formule nous apprend que *pour calculer le cosinus de la moitié d'un angle d'un triangle, il faut du demi-périmètre retrancher le côté opposé à cet angle, multiplier le reste par le demi-périmètre, diviser le résultat par le produit des côtés qui comprennent l'angle cherché, extraire la racine carrée du quotient et la multiplier par le rayon.*

Pour que le triangle puisse être résolu, il faut 1° que cette valeur de $\cos\frac{A}{2}$ soit réelle; 2° qu'elle soit moindre que R. Nous allons exprimer successivement ces deux conditions. La première exige que $(p-a)=\frac{b+c-a}{2}$ soit positif, c'est-à-dire que l'on ait $a<b+c$. Pour satisfaire à la seconde, il faut poser

$$\frac{p(p-a)}{bc}<1,$$

d'où l'on tire successivement

$$(b+c+a)(b+c-a)<4bc,\quad (b+c)^2-a^2<4bc,$$
$$(b-c)^2<a^2,\quad \pm(b-c)<a,$$

suivant que b est $>$ ou $<c$ (*Alg.*, **164**). Ainsi, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le côté opposé à

l'angle A soit plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence. L'angle A étant connu, on calculera les deux autres par des formules analogues, et on ne devra pas craindre de trouver pour $\cos\frac{B}{2}$ et pour $\cos\frac{C}{2}$ des valeurs imaginaires ou plus grandes que le rayon R, puisque l'angle A ayant été calculé, on connaît dans le triangle demandé un angle et les deux côtés qui le comprennent, et qu'un pareil triangle est toujours possible.

Si au lieu d'ajouter une unité aux deux membres de l'équation $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, on en eût retranché une unité, on serait parvenu à la formule

$$\sin\frac{A}{2}=R.\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad [54],$$

avec laquelle on pourrait encore calculer l'angle A.

Si on divise cette formule par celle qui donne $\cos\frac{A}{2}$, on trouvera (21)

$$\text{tang}\frac{A}{2}=R.\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad [55],$$

équation qui pourra servir aussi à trouver la valeur de l'angle A.

De ces trois formules, la première est celle qui donne le plus simplement l'angle A; mais, si l'on veut calculer les trois angles A, B, C, c'est de la dernière qu'il faudra faire usage; car elle n'exigera l'emploi que de quatre logarithmes, tandis que, avec la première, il faudra chercher les logarithmes des sept nombres a, b, c, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ et p, et ceux des six premiers si l'on emploie la formule [54].

On fera bien de discuter les formules qui déterminent $\sin\frac{A}{2}$ et $\text{tang}\frac{A}{2}$, et, pour en faciliter la discussion, on fera une hypothèse sur les grandeurs relatives des trois côtés; ainsi on supposera, par exemple, que a soit le plus grand.

76. Il est quelquefois utile d'évaluer l'aire d'un triangle en fonction des éléments qui servent à le déterminer. Nous allons, en conséquence, chercher l'expression de cette aire dans les quatre cas où nous avons résolu le triangle; mais,

pour plus de simplicité, nous commencerons par le troisième cas.

1° *On donne deux côtés* b *et* c *et l'angle compris* A.

Si du sommet C on abaisse la perpendiculaire CI sur la base, on aura évidemment (57) $CI = b \sin A$; donc, en appelant S l'aire du triangle, Fig. 11.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \qquad [56];$$

ainsi, *l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés par le sinus de l'angle compris.*

Si l'on applique les logarithmes à cette formule, il viendra

$$\log S = \log b + \log c + \log \sin A - (\log R + \log 2).$$

2° *On donne le côté* c *et les deux angles* A *et* B.

On a $S = \frac{1}{2} bc \sin A$; mais (61) $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{c \sin B}{\sin(A+B)}$; donc

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)} \qquad [57].$$

3° *On connaît les côtés* a *et* b *et l'angle* A.

On a $S = \frac{ab \sin C}{2}$ ou $S = \frac{ab \sin(A+B)}{2}$, l'angle B étant déterminé par l'équation $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ (61).

4° *Les trois côtés sont donnés.* On a $S = \frac{1}{2} bc \sin A$.

Mais si l'on multiplie le double de la valeur trouvée pour $\sin \frac{A}{2}$ (75) par celle de $\cos \frac{A}{2}$, on aura (32), en supposant le rayon égal à l'unité linéaire,

$$\sin A = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc};$$

donc

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

77. APPLICATIONS. I. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant son hypoténuse et le rapport des deux autres côtés. — Calculer son aire.*

II. *Résoudre un triangle rectangle connaissant son périmètre et le rapport de l'hypoténuse à la somme des deux autres côtés.*

III. *Résoudre un triangle rectangle dont on connaît l'aire et le périmètre.*

IV. *Résoudre un triangle rectangle dans lequel on connaît l'hypoténuse et la différence des deux autres côtés.*

V. *Résoudre un triangle, connaissant ses angles et son aire.*

VI. *Résoudre un triangle, connaissant un angle, un côté adjacent et la somme ou la différence des deux autres côtés.*

VII. *Résoudre un triangle, connaissant un angle, le côté opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.*

VIII. *Calculer l'aire d'un quadrilatère inscriptible en fonction de ses quatre côtés.*

On additionnera les aires des deux triangles dans lesquels le décompose une de ses diagonales, et on éliminera du résultat l'angle qui y entre, en appliquant successivement à ces deux triangles le théorème du n° 55. La formule est

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

IX. *Calculer l'aire d'un quadrilatère dans lequel on connaît les deux diagonales et l'angle qu'elles forment.*

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS PRATIQUES.

78. *Mesurer la hauteur d'un point* A *situé dans l'espace, au-dessus d'un plan horizontal donné, ainsi que sa distance à un point* B *donné dans ce plan.* Fig. 15.

On mesurera avec le plus grand soin, sur le plan donné, une *base* BC, dont B soit une des extrémités; puis, ayant placé le centre d'un graphomètre dans la verticale du point B, on dirigera la lunette fixe horizontalement sur un jalon planté à l'autre extrémité C de la base, et la lunette mobile sur le point A; puis on lira sur le limbe le nombre de degrés et de parties de degrés compris entre les deux rayons visuels B'A et B'C'. On disposera ensuite l'instrument de manière que le point A étant dans le plan du cercle, la direction d'un fil à plomb passe à la fois par le centre du graphomètre et par le point de 90°, auquel cas la lunette fixe sera horizontale; on pointera de nouveau la lunette mobile sur le point A, et on lira la mesure de l'angle AB'D'. Enfin, on ira au point C mesurer l'angle AC'B', et il sera alors facile de déterminer les inconnues de la question. En effet, on pourra calculer le côté AB' du triangle AB'C', dans lequel on connaît un côté et deux angles, ce qui donnera la distance du point A au point B', et par suite celle de A au point B; car il est évident qu'on peut, sans erreur appréciable, substituer à la droite AB une moyenne arithmétique entre la droite AB' et la ligne brisée (AB' + B'B), surtout si la distance AB' est un peu grande *. En résolvant ensuite le triangle rectangle AD'B', déterminé par son hypoténuse AB' et par l'angle AB'D', on obtiendra le côté AD', de sorte qu'en lui ajoutant la hauteur BB' de l'instrument, on aura l'élévation du point A au-dessus du plan horizontal dans lequel la base BC a été mesurée.

Si, pendant que l'instrument était disposé de manière à prendre la mesure de l'angle AB'D', on a fait planter un jalon

* Au reste, si l'on veut calculer *exactement* la distance AB, il n'y aura qu'à résoudre le triangle AB'B dans lequel on connaît les deux côtés AB' et B'B et l'angle compris AB'B = AB'D' + 90°.

EE′ dans la direction de l'axe de la lunette fixe, il n'y aura plus qu'à mesurer l'angle E′B′C′, dont les côtés sont horizontaux, pour pouvoir fixer la projection D du point A sur le plan; car la résolution du triangle rectangle AB′D′ fera connaître la distance B′D′.

Supposons que l'on ait trouvé BC=257^{m},36, AB′D′=64° 36′ 28″, AC′B′=62° 48′ 16″, et AB′D′=38° 17′ 12″, on fera le calcul suivant :

$$B'AC'=52^{\circ}\,35'\,16'',$$
$$c\sin A=a\sin C$$
$$\begin{aligned}\log a&=2,410\ 5410\\ \log\sin C&=9,949\ 1224\\ \hline &\ 12,359\ 6634\\ \log\sin A&=9,899\ 9764\\ \hline \log c&=2,459\ 6870\\ c&=288^{m},20\end{aligned}$$

$$AD'=c.\frac{\sin AB'D'}{R}$$
$$\begin{aligned}\log c&=2,459\ 6870\\ \log\sin AB'D'&=9,792\ 1088\\ \hline &\ 12,251\ 7958\\ \log R&=10\\ \hline \log AD'&=2,251\ 7958\\ AD'&=178^{m},56\end{aligned}$$

Si donc BB′=1^{m},15, on aura AD=179^{m},71 et AB =288^{m},20+0^{m},575=288^{m},77.

Fig. 16. **79.** *Déterminer la distance de deux points inaccessibles* A *et* B.

On mesurera une base CD et les angles AC′D′, AC′B, BC′D′, AD′C′, BD′C′ (**78**), dans lesquels le côté C′D′ est horizontal; puis, en résolvant les triangles AC′D′, et BC′D′, on obtiendra les côtés AC′ et BC′ du triangle ABC′, qui sera alors déterminé par les valeurs trouvées pour ces deux côtés et par l'angle AC′B qu'ils comprennent. Il sera donc facile de calculer la distance cherchée AB (**73**, **74**).

Mais j'observe que l'on pourra, sans passer des logarithmes de AC′ et de BC′ aux nombres correspondants, calculer cependant le côté AB. En effet, si dans la formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B),$$

que l'on emploiera pour calculer la demi-différence des angles A et B, on divise par a, qui est supposé plus grand que b, les deux termes de la fraction $\frac{a-b}{a+b}$, cette fraction deviendra $\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{1-\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi}$, en posant $\frac{b}{a}=\operatorname{tang}\varphi$. Or, on peut regarder

cette expression comme étant la tangente de $(45^\circ - \varphi)$, en vertu de la formule [45]; on aura donc :

$$\tang\frac{1}{2}(A-B) = \tang\frac{1}{2}(A+B).\tang(45^\circ-\varphi).$$

Supposons que l'on ait trouvé

CD = 270ᵐ; AC'D' = 102°48'57", AC'B = 54°43'36", BC'D' = 52°6'17", BD'C' = 93°58'46", AD'C' = 44°18". On conclura de ces valeurs que C'AD' = 33°10'45", et que C'BD' = 33°54'57".

Calcul de AC'.

$$AC'.\sin A = C'D'.\sin AD'C'.$$

$$\begin{aligned} \log C'D' &= 2{,}431\ 3638 \\ \log\sin AD'C' &= 9{,}841\ 8105 \\ \hline &12{,}273\ 1743 \\ \log\sin C'AD' &= 9{,}738\ 1929 \\ \hline \log AC' &= 2{,}534\ 9814 = \log b \end{aligned}$$

Calcul de BC'.

$$BC'.\sin C'BD' = C'D'.\sin BD'C'.$$

$$\begin{aligned} \log C'D' &= 2{,}431\ 3638 \\ \log\sin BD'C' &= 9{,}998\ 9517 \\ \hline &12{,}430\ 3155 \\ \log\sin C'BD' &= 9{,}746\ 6143 \\ \hline \log BC' &= 2{,}683\ 7012 = \log a \end{aligned}$$

Calcul de φ.

$$\tang\varphi = \frac{b.R}{a}$$

$$\begin{aligned} \log b + \log R &= 12{,}534\ 9814 \\ \log a &= 2{,}683\ 7012 \\ \hline \log\tang\varphi &= 9{,}851\ 2802 \\ \varphi &= 35^\circ22'34'' \\ 45^\circ - \varphi &= 9^\circ37'26'' \end{aligned}$$

Calcul de $\frac{1}{2}(A-B)$.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(A+B) &= 62^\circ38'12'' \\ \log\tang\tfrac{1}{2}(A+B) &= 10{,}286\ 0568 \\ \log\tang(45^\circ-\varphi) &= 9{,}229\ 3394 \\ \hline &19{,}515\ 3962 \\ \log R &= 10 \\ \hline \log\tang\tfrac{1}{2}(A-B) &= 9{,}515\ 3962 \\ \tfrac{1}{2}(A-B) &= 18^\circ8'27'' \end{aligned}$$

Il résulte des valeurs de $\frac{1}{2}(A+B)$ et de $\frac{1}{2}(A-B)$ que $B = 44^\circ29'45''$; on posera $AC'.\sin AC'B = AB.\sin B$; d'où

$$\begin{aligned} \log AC' &= 2{,}534\ 9814 \\ \log\sin AC'B &= 9{,}911\ 9064 \\ \hline &12{,}446\ 8878 \\ \log\sin B &= 9{,}845\ 6296 \\ \hline \log AB &= 2{,}601\ 2582 \quad AB = 399^m{,}26. \end{aligned}$$

Fig. 17. **80.** *Trois points* A, B, C, *étant donnés sur la carte d'un pays, on propose de déterminer la position d'un quatrième point* M, *situé dans le même plan que les trois premiers, et duquel on puisse les apercevoir.*

On se transportera au point M, et on y mesurera les deux angles AMC et BMC formés par les rayons visuels, qui vont aux trois points qui sont représentés sur la carte par A, B, C. Donc, en décrivant sur AC et sur BC deux arcs de cercle, capables respectivement de ces deux angles, on obtiendra par leur intersection le point demandé. Mais, comme cette construction ne serait pas suffisamment exacte, nous calculerons les deux angles CAM et CBM, ce qui suffira pour déterminer le point M, et nous vérifierons la position trouvée pour ce point, en cherchant aussi la valeur de CM.

Soient donc a, b les distances connues AC et BC, C l'angle connu ACB, α et β les angles observés AMC et BMC, x et y les angles cherchés CAM et CBM : je remarque d'abord que ACBM étant un quadrilatère plan, on a l'équation :

$$x+y+C+\alpha+\beta=360^\circ, \text{ d'où } x+y=360^\circ-(C+\alpha+\beta);$$

ainsi, la somme des angles x et y est connue, de sorte que, si l'on pouvait obtenir leur différence, le problème serait résolu. Or, le théorème du n° **61** nous donnera :

$$MC=\frac{a\sin x}{\sin\alpha}=\frac{b\sin y}{\sin\beta} \qquad [k],$$

d'où

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}.$$

On tire de là

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}.$$

Mais, en vertu du théorème du n° **37**, le premier membre de cette équation est égal à

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)}.$$

D'un autre côté, si l'on divise les deux termes du second membre de cette même équation par $b\sin\alpha$, et que l'on pose $\operatorname{tang}\varphi=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$, ce second membre prendra la forme $\frac{1-\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi}$,

quantité qui est égale à tang $(45^\circ - \varphi)$, comme nous l'avons remarqué au n° **79**; donc enfin et en rétablissant le rayon

$$\operatorname{tang}\frac{x-y}{2} = \frac{\operatorname{tang}\frac{x+y}{2}\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi)}{R}.$$

Cette équation fera connaître $\frac{x-y}{2}$, et en combinant la valeur trouvée, successivement par addition et par soustraction avec celle de $\frac{x+y}{2}$, on connaîtra les angles x et y, et par suite, la distance MC, au moyen de l'équation $[k]$.

Supposons que $a=200^m$, $b=170^m$, $\alpha=46^\circ 17' 13'',2$, $\beta=30^\circ 9'$, $C=114^\circ 40' 8'',4$. On aura $\frac{C+\alpha+\beta}{2}=95^\circ 33' 10'',8$, et par conséquent $\frac{x+y}{2}=84^\circ 26' 49'',2$.

$$\begin{array}{rr|rr}
\operatorname{Log} R + \log a = & 12,301\ 0300 & \log b = & 2,230\ 4489 \\
\log\sin\beta = & 9,700\ 9334 & \log\sin\alpha = & 9,859\ 0244 \\
\hline
& 22,001\ 9634 & & 12,089\ 4733 \\
& 12,089\ 4733 & & \\
\hline
\log\operatorname{tang}\varphi = & 9,912\ 4901; & & \\
\varphi = & 39^\circ 15' 58'',14; & 45^\circ - \varphi = & 5^\circ 44' 1'',86.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\log\operatorname{tang}(45-\varphi) = & 9,001\ 7769 \\
\log\operatorname{tang}\frac{x+y}{2} - \log R = & 1,012\ 2322 \\
\hline
\log\operatorname{tang}\frac{x-y}{2} = & 10,014\ 0091 \ldots \frac{x-y}{2} = 45^\circ 55' 26'',2.
\end{array}$$

Mais $\qquad \frac{x+y}{2}=84^\circ 26' 49'',2;$

donc $\qquad x=130^\circ 22' 15''$ et $y=38^\circ 31' 23''$.

$$\begin{array}{rr}
\log b = & 2,230\ 4489 \\
\log\sin y = & 9,794\ 3691 \\
\hline
& 12,024\ 8180 \\
\log\sin\beta = & 9,700\ 9334 \\
\hline
\log MC = & 2,323\ 8846, \quad MC = 210^m,81.
\end{array}$$

81. PROBLÈME. I. *Déterminer le diamètre d'un bassin*

circulaire et inaccessible, sur la circonférence duquel il
Fig. 18. *n'y a aucun point remarquable*. Des extrémités d'une base AB tirez les rayons visuels AC, AC', BD, BD', tangents à la circonférence du bassin, et mesurez les angles qu'ils forment avec AB, vous en déduirez facilement les valeurs des angles CAO, OAB et OBA, et par suite celles des droites AO et OC.

II. *Étant donnés trois points inaccessibles, reconnaître s'ils sont en ligne droite* (79).

Fig. 17. III. *Reconnaître si quatre points inaccessibles* A, B, C, M, *sont dans un même plan; et, dans le cas où ils s'y trouveraient, si le quadrilatère qu'ils déterminent est inscriptible.* Calculez (79) les distances de ces points, pris deux à deux, et vous en déduirez les valeurs des trois angles BAC, BAM, CAM, et si le dernier vaut la somme des deux autres, vous en conclurez que les quatre points A, B, C, M sont dans un même plan; s'ils y sont, vous n'aurez plus qu'à déterminer l'angle CBM; et sa comparaison avec CAM vous apprendra si ces quatre points appartiennent à une circonférence de cercle.

CHAPITRE VII.

FORMULES POUR LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

---

82. THÉORÈME. *Dans tout triangle sphérique, le produit du cosinus d'un angle par les sinus des côtés qui le comprennent est égal au cosinus du côté opposé, diminué du produit des cosinus des deux autres côtés.*

Soit ABC un triangle sphérique quelconque. Joignons ses trois sommets au centre O de la sphère à laquelle il appartient, et menons aux côtés AB et AC les tangentes AD et AE terminées aux prolongements des rayons OB et OC. Si nous supposons que l'on prenne le rayon de la sphère pour unité, et que l'on désigne les angles du triangle ABC par A, B, C et les côtés qui leur sont respectivement opposés par a, b, c, on aura Fig. 19.

$$\mathrm{AD}=\operatorname{tang} c=\frac{\sin c}{\cos c},\quad \mathrm{OD}=\operatorname{séc} c=\frac{1}{\cos c},$$
$$\mathrm{AE}=\operatorname{tang} b=\frac{\sin b}{\cos b},\quad \mathrm{OE}=\operatorname{séc} b=\frac{1}{\cos b}.$$

Cela posé, tirons DE, et en appliquant successivement aux deux triangles ADE et ODE le théorème fondamental de la trigonométrie rectiligne (55), il viendra

$$2\mathrm{AD}.\mathrm{AE}\cos \mathrm{A}=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2-\overline{\mathrm{DE}}^2,$$
$$2\mathrm{OD}.\mathrm{OE}\cos a=\overline{\mathrm{OD}}^2+\overline{\mathrm{OE}}^2-\overline{\mathrm{DE}}^2;$$

car l'angle DAE n'est autre que l'angle A du triangle sphérique, et le côté a est la mesure de l'angle DOE (*Géométrie*, **556**). Si on retranche ces deux équations membre à membre, et que l'on observe que $\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2=1$, et que $\overline{\mathrm{OE}}^2-\overline{\mathrm{AE}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2=1$, on trouvera

$$2\mathrm{OD}.\mathrm{OE}\cos a-2\mathrm{AD}.\mathrm{AE}\cos \mathrm{A}=2.$$

En divisant tous les termes de cette équation par 2, remplaçant OD, OE, AD et AE par leurs valeurs, chassant les dénominateurs et transposant, il viendra enfin

$$\sin b \sin c \cos \mathrm{A}=\cos a-\cos b \cos c \qquad [\alpha],$$

formule qui est la traduction algébrique de notre théorème.

83. La construction qui nous y a conduits semble exiger que les côtés b et c soient chacun moindres qu'un quadran, de sorte qu'il est important de prouver que l'équation [α] est générale. Il suffira, pour cela, de considérer les quatre cas qui suivent.

Fig. 20. 1er Cas. $b > 90°$, $c < 90°$. Je prolonge CA et CB jusqu'à leur rencontre en C', et je formerai ainsi un triangle ABC', dont les deux côtés AC' et AB sont moindres qu'un quadran, de sorte qu'on aura

$$\sin b' \sin c \cos \mathrm{BAC'} = \cos a' - \cos b' \cos c;$$

mais $\quad b' = 180° - b,\ a' = 180° - a$ et $\mathrm{BAC'} = 180° - \mathrm{A};$

donc $\quad -\sin b \sin c \cos \mathrm{A} = -\cos a + \cos b \cos c,$

ou $\quad \sin b \sin c \cos \mathrm{A} = \cos a - \cos b \cos c.$

2e Cas. $b > 90°$ et $c > 90°$. On pourra (1er cas) appliquer, comme tout à l'heure, le théorème au triangle ABC', puisque l'un des côtés qui comprennent l'angle BAC' est $< 90°$, et par suite, il sera vrai pour le triangle proposé.

Fig. 21. 3e Cas. $b = 90°$. Je prends sur l'arc AB, $\mathrm{AA'} = 90°$ et je décris l'arc de grand cercle A'C. A est ainsi le pôle de cet arc (*Géom.*, 554) qui en conséquence est la mesure de l'angle A. Si donc A'C est égal à 90°, le point C est le pôle de l'arc AA', de sorte que $\mathrm{CB} = a$ vaut aussi 90°. L'équation [α] est alors vraie, puisqu'elle est vérifiée en y faisant $\cos a = 0$, $\cos b = 0$, $\cos \mathrm{A} = \cos \mathrm{A'C} = 0$.

Supposons donc que CA' ne soit pas un quadran. Comme BA' n'en est pas un non plus, nous pourrons appliquer la formule [α] à l'angle A' du triangle A'BC, ce qui donnera

$$\sin \mathrm{BA'} \sin \mathrm{A'C} \cos \mathrm{BA'C} = \cos \mathrm{BC} - \cos \mathrm{BA'} \cos \mathrm{A'C};$$

mais $\quad \cos \mathrm{BA'C} = \cos 90° = 0, \quad \cos \mathrm{BC} = \cos a,$

$$\cos \mathrm{BA'} = \cos\{\pm(90° - c)\} = \sin c \text{ et } \cos \mathrm{A'C} = \cos \mathrm{A}:$$

donc $\quad 0 = \cos a - \sin c \cos \mathrm{A} \quad$ ou $\quad \sin c \cos \mathrm{A} = \cos a;$

mais c'est à cette égalité que se réduit la formule [α], si on y fait $b = 90°$; donc elle est encore vraie dans le cas actuel.

4e Cas. $b = 90°$ et $c = 90°$: l'arc a est alors la mesure de l'angle A, et la formule [α] devient ainsi une identité.

84. Si l'on applique le théorème du n° **82** successivement aux trois angles du triangle ABC, on formera les trois équations

$$\left.\begin{array}{l}\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c, \\ \sin a \sin c \cos B = \cos b - \cos a \cos c, \\ \sin a \sin b \cos C = \cos c - \cos a \cos b\end{array}\right\} [58],$$

qui fournissent la solution complète du problème de la résolution des triangles sphériques; car elles suffiront toujours pour calculer trois des six éléments de tout triangle, quand on connaître les trois autres. Il s'agit donc de déduire des équations [58] des formules qui renferment toutes les combinaisons quatre à quatre essentiellement différentes que l'on peut faire avec les trois côtés et les trois angles d'un triangle (**56**), de sorte que nous n'aurons à chercher que quatre classes de formules comprenant respectivement

Trois côtés et un angle;

Deux côtés et les deux angles opposés;

Deux côtés, l'angle compris et l'angle opposé à l'un d'eux;

Un côté et les trois angles.

Le théorème fondamental répond à la première combinaison.

85. Pour obtenir la seconde combinaison, c'est-à-dire une relation entre les côtés a et b, par exemple, et les angles opposés A et B, il n'y a qu'à éliminer c entre les deux premières des équations [58]. En conséquence, on combinera ces deux équations successivement par addition et par soustraction, ce qui donnera

$$\sin c(\sin b \cos A + \sin a \cos B) = (\cos a + \cos b)(1 - \cos c),$$
$$\sin c(\sin b \cos A - \sin a \cos B) = (\cos a - \cos b)(1 + \cos c);$$

puis, en multipliant ces deux équations membre à membre et observant que $(1+\cos c)(1-\cos c) = \sin^2 c$, on trouvera, en divisant par $\sin^2 c$,

$$\sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B = \cos^2 a - \cos^2 b,$$

d'où en transposant

$$\sin^2 b \sin^2 A = \sin^2 a \sin^2 B$$

et enfin $$\sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

Telle est la relation demandée. On voit par là que *dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés qui leur sont opposés*. On a donc les trois nouvelles équations

$$\left.\begin{array}{l}\sin b \sin A = \sin a \sin B, \\ \sin c \sin A = \sin a \sin C, \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B\end{array}\right\} \quad [59].$$

86. Pour trouver la troisième formule, c'est-à-dire une relation entre a, b, A et C, par exemple, il faudra éliminer c entre la première et la troisième des formules [58]; mais, comme $\sin c$ et $\cos c$ y entrent tous deux, il faudra y joindre une équation entre ces deux quantités. Nous prendrons, pour cela, la seconde des équations [59]

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C, \quad \text{d'où} \quad \sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}.$$

De $\sin a \sin b \cos C = \cos c - \cos a \cos b$,

nous tirerons

$$\cos c = \sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b,$$

et, en substituant ces valeurs de $\sin c$ et de $\cos c$ dans

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c,$$

nous trouverons

$$\frac{\sin a \sin b \sin C \cos A}{\sin A} = \cos a - \sin a \sin b \cos b \cos C - \cos a \cos^2 b.$$

Je divise les deux membres de cette équation par

$$\sin a \sin b \cos b \cos C,$$

et en observant que $\cos a - \cos a \cos^2 b = \cos a \sin^2 b$, il viendra

$$\frac{1}{\cos b} \cot A \operatorname{tang} C = \frac{1}{\cos C} \cot a \operatorname{tang} b - 1,$$

d'où
$$\frac{\cot a}{\cot b} \cdot \frac{1}{\cos C} = 1 + \frac{\cot A}{\cot C} \cdot \frac{1}{\cos b} \quad [\beta].$$

Ainsi, en appelant *premier côté* et *premier angle le côté et l'angle qui sont opposés l'un à l'autre*, on pourra dire que *le rapport de la cotangente du premier côté à celle du deuxième, multiplié par la sécante du second angle, est égal à l'unité augmentée du produit du rapport de la cotangente du premier angle à celle du deuxième multiplié par la sécante du second côté*.

Si dans la formule [β] on remplace les cotangentes du

deuxième côté b et du deuxième angle C par leurs valeurs $\frac{\cos b}{\sin b}$ et $\frac{\cos C}{\sin C}$, puis que l'on chasse les dénominateurs, on trouvera, en formant toutes les combinaisons que l'on peut faire avec deux côtés, l'angle compris et l'angle opposé à l'un d'eux,

$$\left.\begin{aligned}
\cot a \sin b &= \cos b \cos C + \cot A \sin C \\
\cot a \sin c &= \cos c \cos B + \cot A \sin B \\
\cot b \sin a &= \cos a \cos C + \cot B \sin C \\
\cot b \sin c &= \cos c \cos A + \cot B \sin A \\
\cot c \sin a &= \cos a \cos B + \cot C \sin B \\
\cot c \sin b &= \cos b \cos A + \cot C \sin A
\end{aligned}\right\} [60].$$

87. Enfin pour obtenir la quatrième combinaison, on appliquera le théorème fondamental au triangle A'B'C' supplémentaire de ABC, c'est-à-dire au triangle sphérique compris entre les faces du trièdre supplémentaire de celui qui répond à ABC. Remplaçons donc dans la formule [α] du n° **82**, a, b, c, et A respectivement par $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$ et $180^\circ - a$, et nous trouverons

$$\sin B \sin C \cos a = \cos A + \cos B \cos C.$$

Ainsi *le produit du cosinus d'un côté par les sinus des angles adjacents est égal au cosinus de l'angle opposé, diminué du produit des cosinus des deux autres angles.*

En appliquant ce théorème successivement aux trois côtés a, b, c, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}
\sin B \sin C \cos a &= \cos A + \cos B \cos C \\
\sin A \sin C \cos b &= \cos B + \cos A \cos C \\
\sin A \sin B \cos c &= \cos C + \cos A \cos B
\end{aligned}\right\} [61].$$

88. Les quatre groupes de formules que nous venons d'obtenir présentent les quinze combinaisons que l'on peut faire avec les six quantités a, b, c, A, B, C, prises quatre à quatre, de sorte que, pour résoudre un triangle sphérique, il suffira de choisir celle qui conviendra au cas proposé, et de la rendre propre au calcul logarithmique, ce qui sera facile à l'aide de la transformation que nous avons indiquée au n° **65**; car l'inconnue aura toujours pour expression un binôme dont l'un des termes renfermera le sinus et l'autre le cosinus d'un même arc, comme nous le montrerons dans le chapitre suivant.

89. Si le triangle proposé est rectangle en A, par exemple, les formules précédentes se simplifieront considérablement; car, en introduisant cette hypothèse dans celles de nos quinze formules où entre l'angle A, elles deviendront

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad [62];$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin b = \sin a \sin B\\ \sin c = \sin a \sin C\end{array}\right\} \qquad [63];$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan b = \tan a \cos C\\ \tan b = \sin c \tan B\\ \tan c = \tan a \cos B\\ \tan c = \sin b \tan C\end{array}\right\} \qquad [64];$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cot B \cot C\\ \cos B = \cos b \sin C\\ \cos C = \cos c \sin B\end{array}\right\} \qquad [65].$$

Ces dix formules, auxquelles le calcul logarithmique s'applique immédiatement, renferment toutes les combinaisons que l'on peut faire de deux données et d'une seule inconnue avec les cinq quantités B, C, a, b, c, de sorte qu'elles fournissent la résolution complète des triangles sphériques rectangles.

90. La première de ces équations

$$\cos a = \cos b \cos c$$

Fig. 22. nous apprend que *dans tout triangle sphérique rectangle le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés. La réciproque de cette proposition est vraie*, de sorte qu'elle est pour les triangles sphériques ce qu'est le théorème de *Pythagore* pour les triangles rectilignes.

91. Il résulte de cette formule [62] que *les côtés d'un triangle rectangle sont tous trois moindres qu'un quadran, ou bien qu'un seul est plus petit que* 90° *et que les deux autres sont plus grands;* car, si les trois côtés a, b, c étaient plus grands que 90°, le premier membre de l'équation [62] serait négatif, et le second serait positif.

92. L'équation

$$\tan b = \sin c \tan B$$

montre qu'*un angle oblique est toujours de même espèce que le côté opposé*, c'est-à-dire qu'ils sont tous deux moindres ou tous deux plus grands que 90°; car, sin c étant positif, tang b et tang B ont les mêmes signes.

93. Nous ne traduisons pas en langage ordinaire les dix formules comprises sous les nos 62, 63, 64 et 65, parce que, dans chaque cas particulier de la résolution des triangles rectangles, il suffira de faire l'application des théorèmes démontrés aux nos **82, 85, 86** et **87**, dont l'énoncé renfermera l'angle droit A, les deux données et l'inconnue. Si, par exemple, on *veut résoudre un triangle dans lequel on connaît l'hypoténuse* a *et l'angle* B, on remarquera :

1° que la formule, qui donnera b, renfermera a, b, A et B; on aura donc, en vertu du théorème n° **85**,

$$\sin b = \sin a \sin B;$$

2° que la valeur de c dépendra d'une équation qui devra contenir les deux côtés a, c, l'angle compris B et l'angle opposé A, de sorte qu'en employant le théorème du n° **86**, on écrira l'équation

$$\frac{\cot a}{\cot c} \cdot \frac{1}{\cos B} = 1, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B;$$

3° que, pour obtenir C, on fera usage du quatrième théorème (**87**), en l'appliquant aux trois angles A, B, C, et au côté a, ce qui donnera

$$\sin B \sin C \cos a = \cos B \cos C, \quad \text{d'où} \quad \cot C = \cos a \operatorname{tang} B.$$

CHAPITRE VIII.

DE LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

§ I. De la résolution des triangles sphériques rectangles.

94. Un triangle sphérique peut être *tri-rectangle*, mais alors ses trois côtés sont des quadrans, puisque le sommet de chaque angle est le pôle du côté qui lui est opposé; il peut aussi être bi-rectangle, mais les côtés opposés aux deux angles droits valent chacun $90°$, et le troisième côté est la mesure du troisième angle; ainsi nous n'avons à nous occuper ici que des triangles où un *seul* angle est droit avec deux autres angles *obliques*.

Fig. 22. 1er Cas. *On donne l'hypoténuse* a *et un côté* b *de l'angle droit, trouver le côté* c *et les angles* B *et* C.

Les formules [62], [63] et [64] donneront

$$\cos c = \frac{R\cos a}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{R\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{R\,\text{tang}\, b}{\text{tang}\, a}$$

en rétablissant le rayon (**27**).

Quoique l'angle B soit donné par son sinus, il n'y a pas d'ambiguïté, parce que cet angle doit être de même espèce que le côté b qui est connu (**92**).

95. 2e Cas. *Connaissant l'hypoténuse* a *et un angle* B, *calculer l'autre angle* C *et les côtés* b *et* c.

On emploiera les formules [65], [63] et [64].

$$\cot C = \frac{\cos a\,\text{tang}\, B}{R}, \quad \sin b = \frac{\sin a \sin B}{R}, \quad \text{tang}\, c = \frac{\text{tang}\, a \cos B}{R}.$$

96. 3e Cas. *On donne les deux côtés* b *et* c, *trouver l'hypoténuse* a *et les angles* B *et* C.

On tirera des formules [62] et [64]

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{R}, \quad \text{tang}\, B = \frac{R\,\text{tang}\, b}{\sin c}, \quad \text{tang}\, C = \frac{R\,\text{tang}\, c}{\sin b}.$$

97. 4e Cas. *Connaissant un côté* b *et l'angle opposé* B, *trouver les deux autres côtés* a *et* c *et l'angle* C.

Les formules [63], [64] et [65] donneront

$$\sin a = \frac{R \sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{R \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}, \quad \sin C = \frac{R \cos B}{\cos b}.$$

a, c et C étant donnés par leurs sinus, chacun de ces éléments admettra deux valeurs, mais le problème n'admettra cependant que deux solutions.

1° Soit $B < 90°$: $\cos b > 0$ (**92**) et, comme $\cos a = \cos b \cos c$, on voit que a et c étant de même espèce aussi bien que c et C, suivant que l'on prendra pour a une valeur plus petite ou plus grande que 90°, les valeurs correspondantes de c et de C seront aussi plus petites ou plus grandes que 90°.

2° Si $B > 90°$, $\cos b < 0$ (**92**) et, comme $\cos a = \cos b \cos c$, on voit que a et c étant d'espèce différente, tandis que c et C sont en même temps plus petits ou plus grands que 90°, suivant qu'on adoptera pour a une valeur $<$ ou $>$ 90°, les valeurs correspondantes de c et de C devront être $>$ ou $<$ 90°.

$\sin b$ étant $< \sin B$, sans quoi la valeur de $\sin a$ serait $> R$, le problème ne sera possible que si b est $<$ ou $>$ B, selon que l'angle B est aigu ou obtus.

Si $b = B$, alors $a = 90°$, $c = 90°$, $C = 90°$, ainsi le triangle est bi-rectangle.

La géométrie confirme ces résultats du calcul; car, si ABC est un triangle qui satisfasse à la question, on n'aura qu'à prolonger les côtés BA et BC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en B′, et on formera un second triangle AB′C rectangle en A, dont le côté AC et l'angle B′ sont égaux à b et à B. De plus, les côtés CB′ et AB′ et l'angle ACB′ sont les suppléments de a, c et C. Fig. 23.

98. 5e Cas. *Étant donnés un côté* b *et l'angle adjacent* C, *trouver les deux autres côtés* a *et* c *et l'angle* B.

On tirera des formules [64] et [65]

$$\operatorname{tang} a = \frac{R \operatorname{tang} b}{\cos C}, \quad \operatorname{tang} c = \frac{\sin b \operatorname{tang} C}{R}, \quad \cos B = \frac{\cos b \sin C}{R}.$$

99. 6e Cas. *Connaissant les deux angles obliques* B *et* C, *calculer les trois côtés* a, b, c.

On emploiera les formules [65]

$$\cos a = \frac{\cot B \cot C}{R}, \quad \cos b = \frac{R \cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{R \cos C}{\sin B}.$$

§ II. De la résolution des triangles sphériques obliquangles.

100. 1er Cas. *Résoudre un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés.*

Les formules que l'on doit employer devant renfermer les trois côtés et un angle, elles seront données par le théorème du n° **82**. On aura donc

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \qquad [\gamma].$$

Pour rendre cette formule calculable par logarithmes, nous agirons comme au n° **75**, c'est-à-dire que nous ajouterons l'unité aux deux membres, ce qui donnera

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

d'où (**35**),

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c}.$$

Si l'on représente par $2p$ le périmètre $b+c+a$ du triangle, on aura $b+c-a=2(p-a)$, et partant

$$\cos\frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} \qquad [66],$$

en rétablissant le rayon.

Si, au lieu d'ajouter l'unité aux deux membres de l'équation [γ], on y eût ajouté -1, on aurait trouvé, comme au n° **75**,

$$\sin\frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}};$$

et enfin, en divisant membre à membre cette équation et la précédente,

$$\tang\frac{A}{2} = R\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}.$$

Si on n'a qu'un angle à calculer, on emploiera la formule qui donne $\cos\frac{A}{2}$; mais, si l'on demande les trois angles, on fera usage de la troisième.

101. Discutons la formule [66]. Je dis d'abord que les deux facteurs du numérateur ne sauraient être négatifs, sans quoi leur somme serait aussi < 0, et cette somme est égale à $2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{a}{2}$, quantité positive, puisque, d'après la définition même des triangles sphériques, chaque côté est moindre que 180°; donc il faut que l'on ait $\sin p > 0$ et $\sin(p-a) > 0$. La première de ces conditions donne $p < 180°$, et partant $2p < 360°$. La seconde revient à $a < b+c$. Telles sont les conditions nécessaires pour que la valeur de $\cos\frac{A}{2}$ soit réelle.

Il faut de plus qu'elle soit moindre que le rayon; donc

$$\sin p \sin(p-a) < \sin b \sin c,$$

ou bien (**35**)

$$\cos a - \cos(b+c) < \cos(b-c) - \cos(b+c),$$

inégalité qui se réduit à

$$\cos a < \cos(b-c).$$

Si donc $a < 90°$, auquel cas la valeur absolue de $(b-c)$ est aussi $< 90°$, on aura

$$a > b-c,$$

en supposant $b > c$.

Si $a > 90°$ et que $b-c$ soit $< 90°$, on aura

$$a > b-c;$$

et si $(b-c)$ est aussi $> 90°$ en valeur absolue, l'inégalité $\cos a < \cos(b-c)$ reviendra encore (**13**) à

$$a > b-c.$$

Ainsi, pour que le triangle soit possible, il faut que la somme de ses trois côtés soit moindre que 360°, et qu'un côté soit plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

102. 2ᵉ CAS. *Connaissant les deux côtés* a, b *et l'angle* A, *calculer le troisième côté* c *et les deux angles* B *et* C.

On obtiendra l'angle B, par la formule

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a};$$

et, comme cet angle est ainsi donné par son sinus, il *pourra* admettre deux valeurs supplémentaires l'une de l'autre. Nous discuterons ce cas tout à l'heure.

L'angle C sera donné par le théorème du n° **86**,

$$\frac{\cot a}{\cot b}\cdot\frac{1}{\cos C} = 1 + \frac{\cot A}{\cot C}\cdot\frac{1}{\cos b},$$

ou $$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \cot A \sin C.$$

Pour en déduire la valeur de l'angle C, nous appliquerons au second membre de cette équation la méthode du n° **65**, et il viendra, en divisant par cos b,

$$\cot a \operatorname{tang} b = \cos C + \frac{\cot A}{\cos b}\sin C = \frac{\cos(C-\varphi)}{\cos\varphi},$$

d'où $$\cos(C-\varphi) = \frac{\cos\varphi \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a},$$

l'angle φ étant déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{R \cot A}{\cos b}.$$

Ainsi, après avoir déterminé l'angle auxiliaire φ par cette dernière équation, on calculera l'angle $\pm(C-\varphi)$ au moyen de la précédente, et on en déduira facilement l'angle C.

Je dis $\pm(C-\varphi)$; parce que $\cos C \cos\varphi + \sin C \sin\varphi$ n'est pas le développement de $\cos(C-\varphi)$, plutôt que celui de $\cos(\varphi - C)$.

Quant au côté c, on l'obtiendra par l'application du théorème fondamental

$$\sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c = \cos a,$$

d'où, en suivant encore la méthode du n° **65**,

$$\cos(c-\psi) = \frac{\cos a \cos\psi}{\cos b}, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang} b \cos A}{R}.$$

Fig. 24. Il est bon d'observer, que φ est l'angle DCA que forme avec AC l'arc de grand cercle mené par le sommet C perpendiculairement au côté AB, et que ψ est le segment DA compris

entre le point D et le sommet A. En effet, en appliquant les théorèmes des nos **87** et **86** au triangle rectangle ADC, on trouvera

$$\sin A \sin \varphi \cos b = \cos A \cos \varphi, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\cot A}{\cos b},$$

et
$$\frac{\cot \psi}{\cot b} \cdot \frac{1}{\cos A} = 1, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} \psi = \cos A \operatorname{tang} b.$$

Donc ACD$=\varphi$ et AD$=\psi$.

Il en résulte que c *et* C *sont en même temps plus petits ou plus grands que* ψ *et que* φ.

103. Discussion. Nous pourrions discuter ce problème en suivant une méthode analogue à celle dont nous avons fait usage au n° **71**, mais il sera plus simple d'avoir recours à des considérations purement géométriques. Proposons-nous en conséquence de *construire sur une sphère donnée un triangle dont on connaît l'angle* A *et les deux côtés* a *et* b.

Je trace deux arcs de grands cercles qui fassent un angle égal à A, je prends sur l'un des côtés de cet angle un arc AC$=b$, et du point C, comme pôle, avec une ouverture de compas sphérique égale à la corde de l'arc a, je décris un arc de cercle qui coupe l'autre côté en B; je joins les points C et B par un arc de grand cercle, et le problème est résolu.

Cela fait, on tirera par le point C l'arc de grand cercle CD perpendiculairement à ABA', puis on distinguera deux cas principaux, selon que l'angle A sera aigu ou obtus (on exclut le cas ou A$=90°$; car alors le triangle serait rectangle).

1° Soit A$<90°$. Il pourra se faire que l'on ait $b<90°$, $=90°$ ou $>90°$, et dans chacun de ces trois cas le côté a pourra être $>b$, $=b$ ou $<b$.

Soient $b<90°$ et $a>b$: la circonférence que nous avons décrite du point C comme pôle et avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc a, enveloppera les points A et A', si $a>$ CA'$=180°-b$, ou bien enveloppera le point A et passera en A', si $a=180°-b$; donc le problème sera impossible. Mais, si $a<180°-b$, la circonférence enveloppera toujours le point A, et coupera l'arc ADA' entre D et A'*;

* Il ne faut pas oublier que le triangle ACD étant rectangle en D, l'arc CD et l'angle A sont de même espèce (**92**); que *si l'arc* CD *est* $<90°$, *cet arc est alors plus petit que les arcs obliques qui partent*

ainsi, il y aura une solution. D'ailleurs l'angle B sera aigu, puisque le côté CD qui lui est opposé, dans le triangle rectangle CDB est moindre que 90° (**92**); d'ailleurs $c>\psi$ et $C>\varphi$.

Si $a=b$, la circonférence coupera l'arc ADA′ en A et en un point B situé entre D et A′, de sorte qu'il y aura encore une solution. Alors $B=A$, $c>\psi$ et $C>\varphi$.

Soit $a<b$: il pourra se faire que a soit plus petit que l'arc CD, égal à cet arc ou plus grand que lui.

Si $a<CD$, la circonférence ne rencontrera pas ADA′, et le problème sera impossible.

Si $a=CD$, elle touchera ADA′ en D, l'angle B, égal alors à CDA, sera droit, c sera égal à ψ et C à φ.

Si $a>CD$, il y aura deux intersections en B et en B′ de part et d'autre du point D, et par conséquent deux solutions, et les deux valeurs de B seront supplémentaires; car l'angle $DB'C=DBC$ et $AB'C=180°-DB'C$. L'angle ABC est aigu, puisqu'il est de même espèce que le côté CD qui lui est opposé dans le triangle rectangle BDC (**92**). D'ailleurs $c>\psi$ et $C>\varphi$ correspondent à cet angle ABC, et $c<\psi$ et $C<\varphi$ se rapportent à son supplément AB′C.

Soit $b=90°$, CA et CA′ sont alors des quadrans, de sorte que si $a>b$ ou si $a=b$, le problème sera impossible. Mais, si $a<b$ et $>CD$, il y aura deux intersections et deux solutions : $B<90°$, $c>\psi$, $C>\varphi$; et $B'=180°-B$, $c<\psi$, $C<\varphi$.

Supposons actuellement $b>90°$: si $a>b$ ou si $a=b$, la circonférence enveloppera les points A et A′, ou enveloppera A′ et passera par A, de sorte que le problème sera impossible.

Si a est plus petit que $180°-b$ et *a fortiori* $<b$, il y aura deux intersections, l'une entre A et D, et l'autre entre D et A′, pourvu que a soit $>CD$; donc il y a deux solutions, comme tout à l'heure.

Si a étant toujours $<b$, on a $a=180°-b$, ou $a>180°-b$,

---

du même point C, *et que ces arcs obliques augmentent en s'en éloignant; qu'au contraire, si l'arc* CD$>90°$, *il est plus grand que les arcs obliques qui partent du même point* C, *et que ces arcs obliques diminuent en s'en éloignant.* Ces propriétés résultent de la considération du triangle rectangle CAD, dans lequel on a $\cos AC=\cos CD \cos DA$ (**90**), en y faisant croître DA depuis 0° jusqu'à 180°, et supposant CD constant et d'abord $<90°$, puis $>90°$.

la circonférence coupera ADA′ entre A et D, et passera par A′, ou enveloppera ce point : donc il n'y aura qu'une seule solution, et l'angle B sera obtus; car il est le supplément de DBC, lequel angle est aigu. D'ailleurs $c < \psi$ et $C < \varphi$. Fig. 25.

2° Soit $A > 90°$. La discussion de ce cas sera analogue à celle du précédent.

En résumant tous les résultats trouvés, on formera le tableau suivant, en n'oubliant pas que *dans le cas où* $A < 90°$, *si* B *est* $<$ *ou* $> 90°$, *les valeurs de* c *et de* C *seront respectivement plus grandes ou plus petites que* ψ *et que* φ, *et que ce sera le contraire, lorsque* A *sera plus grand que* 90° :

$A<90°$	$b<90°$	$a>b$, $a=180°-b$ ou $a>180°-b$	aucune solution.	
		$a>b$, $a<180°-b$	une	$B<90°$.
		$a=b$	une	$B=A$.
		$a<b$	deux.	$B<90°$, $B>90°$.
	$b=90°$	$a>b$	aucune.	
		$a=b$	aucune.	
		$a<b$	deux.	$B<90°$, $B>90°$.
	$b>90°$	$a>b$	aucune.	
		$a=b$	aucune.	
		$a<b$ et $a<180°-b$	deux.	$B<90°$, $B>90°$.
		$a<b$ et $a=180°-b$ ou $a>180°-b$	une.	$B>90°$.
$A>90°$	$b<90°$	$a>b$, $a=180°-b$ ou $a<180°-b$	une.	$B<90°$.
		$a>b$, $a>180°-b$	deux.	$B<90°$, $B>90°$.
		$a=b$	aucune.	
		$a<b$	aucune.	
	$b=90°$	$a>b$	deux.	$B<90°$, $B>90°$.
		$a=b$	aucune.	
		$a<b$	aucune.	
	$b>90°$	$a>b$	deux.	$B<90°$, $B>90°$.
		$a=b$	une.	$B=A$.
		$a<b$, $a>180°-b$	une.	$B>90°$.
		$a<b$, $a=180°-b$ ou $a<180°-b$	aucune.	

Avant d'entreprendre la résolution d'un triangle dans lequel on connaîtra les côtés a et b et l'angle A, on devra commencer par voir, à l'aide de ce tableau, si le problème est possible ou s'il ne l'est pas; et, quand il le sera, s'il admet une ou deux solutions. Puis on calculera l'angle B par la formule

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}.$$

Si le logarithme de $\sin B > \log R = 10$, on en conclura que le problème est tout à fait impossible ($\sin CD = \sin A \sin b$); s'il en est autrement, on prendra pour l'angle B la valeur tabulaire, ou son supplément, suivant que le tableau indiquera

que cet angle est aigu ou obtus, et on les prendra toutes deux si le problème admet deux solutions.

L'angle B étant ainsi connu, on obtiendra les valeurs de C et de c par les formules que nous avons données plus haut.

104. 3ᵉ Cas. *Résoudre un triangle dont on connaît deux côtés* a *et* b *et l'angle compris* C.

Les inconnues sont c, A et B. On les obtiendra en faisant usage des théorèmes des nᵒˢ **82** et **86** : on trouvera (**65**)

$$1^\circ \quad \cos c = \sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b$$
$$= \cos a \{\sin b \tang a \cos C + \cos b\} = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi},$$

l'angle auxiliaire φ étant déterminé par l'équation

$$\tang\varphi = \frac{\tang a \cos C}{R},$$

dans laquelle on a rétabli le rayon.

$$2^\circ \quad \cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C}$$
$$= \cot C \left\{\frac{\cot a}{\cos C}\sin b - \cos b\right\} = \frac{\cot C \sin(b-\varphi)}{\cos\varphi},$$

l'angle φ ayant la même valeur que tout à l'heure.

$$3^\circ \quad \cot B = \frac{\cot b \sin a - \cos a \cos C}{\sin C}$$
$$= \cot C \left\{\frac{\cot b}{\cos C}\sin a - \cos a\right\} = \frac{\cot C \sin(a-\psi)}{\cos\psi},$$

l'angle ψ étant déterminé par l'équation

$$\tang\psi = \frac{\tang b \cos C}{R}.$$

105. 4ᵉ, 5ᵉ et 6ᵉ Cas. Ces trois cas sont ceux où l'on donnerait

Deux angles et le côté adjacent ;
Deux angles et le côté opposé à l'un d'eux ;
Les trois angles ;

mais ils se ramènent aux trois premiers cas, par le secours du triangle supplémentaire. En effet, quand on donne, dans le quatrième cas, les angles A et B avec le côté adjacent c, on connaît les deux côtés a' et b' du triangle supplémentaire avec l'angle compris C'; car $a' = 180^\circ - A$, $b' = 180^\circ - B$, et $C' = 180^\circ - c$; on pourra donc calculer c', A' et B' par les

formules que nous avons données au n° **104**, et en prenant leurs suppléments, on aura les valeurs de C, a et b. De cette manière le quatrième cas se ramène au troisième; de même on ramènera le cinquième et le sixième au second et au premier.

106. ANALOGIES DE NÉPER. *Néper*, l'inventeur des logarithmes, a trouvé les formules suivantes qui sont connues sous le nom d'*analogies de* NÉPER,

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},\qquad \operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{C}{2},\qquad \operatorname{tang}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Nous nous contenterons de démontrer directement les deux premières, attendu que les deux autres s'en déduisent immédiatement par le secours du triangle polaire. En effet, si dans la première, par exemple, on remplace A, B, C, a et b par leurs suppléments il viendra

$$-\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}=\frac{+\cos\frac{B-A}{2}}{-\cos\frac{A+B}{2}}\times\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Pour démontrer ces équations, les auteurs des ANNALES DE MATHÉMATIQUES de *Gergone*, ont eu l'heureuse idée de faire usage des formules qui donnent la tangente de la moitié d'un angle d'un triangle sphérique en fonction de ses côtés, et, en modifiant légèrement leur méthode, on arrive très-simplement aux formules de *Néper*.

Il s'agit, en effet, de calculer en fonction des côtés, le rapport $\dfrac{\operatorname{tang}\frac{A\pm B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$. Or, on a évidemment

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A\pm B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}\pm\operatorname{tang}\frac{B}{2}}{1\mp\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}\pm\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}}{1\mp\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}}.$$

Mais nous avons trouvé (**100**)

$$\tang\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

et partant
$$\tang\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}};$$

d'où il suit que
$$\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-c)}{\sin p},$$

par conséquent
$$\tang\frac{A}{2}\tang\frac{C}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin p},$$

et
$$\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2}=\frac{\sin(p-a)}{\sin p};$$

donc, en substituant,

$$\frac{\tang\frac{A\pm B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\sin(p-a)\pm\sin(p-b)}{\sin p\mp\sin(p-c)}.$$

Si l'on dédouble cette équation, et qu'on transforme en produits les sommes et les différences de sinus qui s'y trouvent (**34** et **35**), on trouvera, toutes réductions faites,

$$\tang\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},\quad \tang\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}.$$

On emploie ces formules pour calculer plus simplement que nous ne l'avons fait au n° **104** les angles A et B en fonction des deux côtés a et b et de l'angle compris C. Quant au troisième côté c on devra le calculer directement, comme au n° cité.

Cette solution est tout à fait analogue à celle du troisième cas de la résolution des triangles rectilignes (**73**).

107. Problème I. *Réduire un angle à l'horizon.*

Fig. 26. Supposons que d'un point donné O on ait dirigé deux rayons visuels sur deux points A et B situés hors du plan horizontal mené par le point O : si, par la verticale OZ et chacune des droites OA et OB, on mène des plans, leurs traces O'A' et O'B' sur un plan horizontal quelconque, formeront l'angle A'O'B' qui est la projection horizontale de l'angle AOB, et qu'on nomme l'*angle reduit à l'horizon* de AOB. C'est donc cet angle qu'il s'agit de calculer. Pour cela, on commencera par mesurer les angles AOZ et BOZ formés par

les rayons visuels OA et OB avec la verticale OZ, et si l'on imagine une sphère décrite du point O comme centre avec l'unité linéaire pour rayon, ses traces sur les faces de l'angle trièdre OABZ, formeront un triangle sphérique ABC dont les côtés c, b, a seront les mesures des angles observés AOB, AOZ et BOZ, tandis que l'angle demandé A'O'B' sera égal à l'angle C du triangle sphérique. On calculera donc cet angle par la formule

$$\cos\frac{C}{2}=R\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.$$

Soient $AOB=c=58°0'5''$, $BOZ=a=88°18'28'',8$,
$AOZ=b=94°52'40'',8$:

on aura $p=120°35'37'',3$, $p-c=62°35'32'',3$,
$180°-p=59°24'22'',7$, $180°-b=85°7'19'',2$.

$\log R^2=20$

$\log\sin p=$	9,934 9013	$\log\sin a=$	9,999 8106
$\log\sin(p-c)=$	9,948 2924	$\log\sin b=$	9,998 4242
	39,883 1937		19,998 2348
	19,998 2348		
	19,884 9589		
$\log\cos\frac{C}{2}=$	9,942 4794		

$\frac{C}{2}=28°50'32'',5$ $\qquad C=57°41'5''$,

ainsi l'angle réduit à l'horizon vaut $57°41'5''$.

108. Problème II. *Étant données les latitudes et les longitudes de deux points du globe, trouver leur distance.*

La latitude d'un lieu est l'arc de méridien compris entre ce lieu et l'équateur. Elle est boréale ou australe suivant que le lieu est situé dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral.

La longitude d'un lieu est l'arc de l'équateur compris entre le méridien de ce lieu et le premier méridien. Elle est orientale ou occidentale, selon que le lieu se trouve à l'orient ou à l'occident de ce premier méridien, lequel est, pour les Français, celui qui passe par l'Observatoire de Paris.

Dans les calculs, on regarde les latitudes boréales et les longitudes orientales comme positives, et les autres comme négatives.

Fig. 27. Soient EE′ l'équateur, B et A les deux pôles, BEA le premier méridien et C et D les deux points du globe dont on demande la distance. BCA et BDA seront leurs méridiens, CC′ et DD′ leurs latitudes, EC′ et ED′ leurs longitudes ; si l'on fait passer un arc de grand cercle par les points C et D, on formera un triangle BCD dans lequel on connaîtra les côtés CB et BD, compléments des latitudes CC′ et DD′, et l'angle CBD qui a pour mesure l'arc C′D′, différence des longitudes ED′ et EC′. On résoudra le problème en faisant dans les formules 1° du n° **104**,

$$a=90^\circ-CC', \quad b=90^\circ-DD', \quad C=ED'-EC'.$$

Supposons que l'on demande la distance de Paris à Venise.

On a Paris { latitude boréale $=48^\circ 50' 49''$; longitude orientale $=0^\circ\ 0'\ 0''$,

Venise { latitude boréale $=45^\circ 25' 53''$; longitude orientale $=10^\circ\ 0' 44''$,

en conséquence

$$a=41^\circ 9' 11'', \quad b=44^\circ 34' 7'', \quad C=10^\circ 0' 44'',$$

$\log \text{tang}\, b=$	9,993 4600	$\log\cos(a-\varphi)=$	9,999 4139
$\log\cos C=$	9,993 3351	$\log\cos b=$	9,852 7304
	19,986 7951		19,852 1443
$\log R=$	10	$\log\cos\varphi=$	9,855 9871
$\log\text{tang}\,\varphi=$	9,986 7951	$\log\cos c=$	9,996 1572
$\varphi=$	$44^\circ 7' 44'',7$	$c=$	$7^\circ 36' 41''$.
$\varphi-a=$	$2^\circ 58' 33'',7$		

L'arc c appartenant à un cercle dont le rayon est l'unité, on aura sa longueur mesurée à la surface de la terre par la proportion

$$90^\circ : 7^\circ 36' 41'' :: 10000^{\text{k.m}} : x,$$

d'où l'on tirera $x=846$ kilomètres, à moins d'un demi-kilomètre.

FIN DE LA TRIGONOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈMES DÉTERMINÉS.

§ I. Notions préliminaires.

1. Lorsqu'on veut appliquer l'algèbre à la résolution d'un problème de géométrie, on commence par rapporter toutes les lignes connues et inconnues à une même unité, et on représente les *longueurs* des unes, c'est-à-dire leurs rapports à l'unité linéaire, par les premières lettres de l'alphabet, et celles des autres par les dernières, suivant les conventions faites dans l'algèbre. On cherche ensuite à lier les lignes données avec les lignes inconnues, d'après les conditions de l'énoncé et au moyen des théorèmes de la géométrie; on exprime ces relations algébriquement, et on parvient ainsi à mettre le problème en équation. Il ne s'agit plus alors que de résoudre les équations qu'on a obtenues, si les données de la question sont exprimées en nombres; sinon il faut encore *construire* les formules trouvées, c'est-à-dire tracer les lignes dont elles expriment les valeurs. Ainsi, quand on veut résoudre, par le calcul, le problème de partager une droite en moyenne et extrême raison, on arrive facilement à l'expression de la longueur du plus grand segment en fonction de celle de cette droite; mais comme cette dernière longueur n'est pas connue *numériquement*, on ne peut pas calculer ce plus grand segment au moyen de la formule obtenue; il reste à en déduire les opérations *graphiques* qu'il faut faire pour le déterminer.

2. *Montrer comment on doit s'y prendre pour appliquer l'algèbre à la résolution de toutes les questions de géométrie, et réciproquement comment on parvient à traduire en géométrie les résultats de l'analyse, tel est le but de la* GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, *ou autrement de l'*APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

3. On voit, d'après ce qui précède (1), que la résolution d'un problème de géométrie se compose de trois parties distinctes : 1° *mettre le problème en équation; 2° résoudre les équations ainsi obtenues; 3° construire les formules trouvées*. De ces trois parties, la seconde est une question purement algébrique, et dont, par conséquent, nous n'avons pas à nous occuper ici : quant aux deux autres, elles sont essentiellement du ressort de la géométrie analytique; mais avec cette différence qu'il n'y a pas de règles précises pour mettre en équation un problème de géométrie, tandis que la construction des racines des équations que l'on obtient est assujettie à une méthode régulière et uniforme. En conséquence, nous allons d'abord nous occuper de la construction des expressions algébriques, puis nous ferons connaître les préceptes qu'il convient de suivre pour mettre en équation les problèmes de géométrie. En suivant cet ordre, nous pourrons achever complétement la résolution des problèmes que nous prendrons ensuite pour exemples.

4. Avant d'exposer la méthode que l'on emploie pour la construction des expressions algébriques, nous démontrerons le théorème suivant, sur lequel repose cette méthode.

Lorsqu'en appliquant l'algèbre à la résolution d'un problème de géométrie ou de physique, on n'a pris aucune des quantités que l'on considère pour unité, l'équation ou les équations que l'on obtient sont nécessairement HOMOGÈNES, *c'est-à-dire que la somme des exposants de chaque terme est constante* (il est entendu que les sinus et les autres fonctions trigonométriques, les logarithmes et les exposants sont des nombres absolus, qui ne changent point avec les unités que l'on a choisies, de sorte qu'on doit les regarder comme étant de la *dimension* zéro, qui est celle de tous les nombres abstraits).

Il est évident que toute équation du problème que l'on traite exprime une relation nécessaire entre certaines grandeurs *concrètes*, et que cette relation est indépendante des unités auxquelles on a comparé ces grandeurs pour les évaluer en nombres*. Cette équation ne sera donc pas altérée

* Ainsi la relation qu'exprime le théorème de *Pythagore* entre les trois côtés d'un triangle rectangle a toujours lieu, quelle que soit l'unité linéaire avec laquelle on mesure ces côtés.

quand on rapportera les quantités qu'elle renferme à de nouvelles unités. Or, si une certaine unité devient n fois plus petite, toutes les quantités de son espèce seront alors représentées par des nombres n fois plus grands, de sorte que l'équation dont il s'agit devra subsister encore lorsqu'on y donnera à chacune de ces quantités une valeur n fois plus grande. Mais chaque terme de notre équation se trouvera ainsi multiplié par une puissance de n marquée par le degré de ce terme *; ainsi tous les termes du même degré, quelque diverse que puisse être leur composition, variant dans le même rapport, tandis que les termes de degrés différents varient dans d'autres rapports, il faudra nécessairement, pour que l'équation ne soit pas troublée, que tous les termes qu'elle contient soient du même degré, c'est-à-dire qu'elle soit homogène.

Remarquons que cette démonstration suppose essentiellement qu'aucune des quantités que l'on considère dans la question n'a été prise pour unité ; car, puisque l'on n'écrit jamais le multiplicateur ou le diviseur 1, on ne pourrait pas exprimer, dans les termes où la quantité prise pour unité serait entrée comme multiplicateur ou comme diviseur, que cette unité est devenue n fois plus petite.

5. Observons encore que si l'on considère dans le problème proposé des grandeurs de natures différentes, il pourra arriver que les unités respectives soient indépendantes les unes des autres, et alors l'équation devra être homogène, soit par rapport à toutes ces grandeurs, soit que l'on ne veuille considérer qu'une seule ou plusieurs d'entre elles ** ;

* Par exemple, a, b, c, d représentant les longueurs de certaines droites, si l'unité linéaire devient n fois plus petite, le terme $\sqrt[3]{\frac{9ab^2c^4}{d^5}}$ qui est du degré $\frac{1+2+4-5}{3}=\frac{2}{3}$, deviendra

$$\sqrt[3]{\frac{9ab^2c^4.n^7}{d^5.n^5}}=\sqrt[3]{\frac{9ab^2c^4}{d^5}}.n^{\frac{2}{3}}.$$

** Considérons, par exemple, l'équation du mouvement uniforme

$$e=vt,$$

dans laquelle e représente l'espace parcouru dans le temps t par un mobile dont la vitesse est v. Cette vitesse est le rapport d'un certain espace au temps employé à le parcourir : ainsi v est du premier degré par

mais, si plusieurs unités dépendent les unes des autres, l'homogénéité n'existera qu'en ayant égard à leur subordination mutuelle. Ainsi, par exemple, s'il entre dans la question proposée des lignes, des aires et des volumes, on devra doubler les exposants des facteurs qui représentent des aires, et tripler ceux des facteurs qui se rapportent à des volumes. On reconnaît ainsi que l'équation

$$4v = 2a^2b - 5cs,$$

dans laquelle a, b, c représentent des lignes, s une aire et v un volume, est homogène.

6. L'homogénéité cesse d'exister, dès que l'on prend pour unité une des quantités que l'on considère; car alors les facteurs égaux à cette unité disparaissent. Mais il est facile de la rétablir. Supposons, en effet, que l'on ait pris une certaine quantité A pour unité, et soient b, c, d... les rapports des autres grandeurs B, C, D... de la même espèce à A : l'équation du problème qui pourra être représentée par

$$\varphi(b, c, d....) = 0,$$

ne sera pas homogène. Mais veut-on rétablir l'homogénéité, on rapportera les quantités A, B, C, D.... à une nouvelle unité U, et en appelant a', b', c', d'.... leurs rapports à cette unité, on aura

$$A = a'U, \quad B = b'U, \quad C = c'U, \quad D = d'U, ...$$

et partant

$$b = \frac{B}{A} = \frac{b'}{a'}, \quad c = \frac{C}{A} = \frac{c'}{a'}, \quad d = \frac{D}{A} = \frac{d'}{a'}, ...$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation du problème, l'équation résultante

$$\varphi\left(\frac{b'}{a'}, \frac{c'}{a'}, \frac{d'}{a'}, ...\right) = 0,$$

ou

$$\varphi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, ...\right) = 0,$$

qu'on en déduit en supprimant les *accents*, qui sont maintenant inutiles, sera homogène, puisqu'aucune des quantités que l'on considère n'est prise pour unité.

---

rapport à l'espace, et du degré -1 relativement au temps; d'où l'on voit que l'équation ci-dessus est homogène, soit que l'on ne considère que l'espace ou le temps, soit qu'on les considère à la fois.

On voit donc, en comparant l'équation proposée $\varphi(b, c, d,\ldots)=0$ avec sa transformée $\varphi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a},\ldots\right)=0$, que, *quand une des quantités qui entrent dans la question aura été prise pour unité, il faudra, pour rétablir l'homogénéité, représenter la valeur numérique de cette quantité par une certaine lettre, puis remplacer les quantités qui sont de la même espèce que celle-ci par leurs rapports respectifs à cette quantité, ou, ce qui revient au même, introduire cette lettre comme multiplicateur ou comme diviseur dans les différents termes de cette équation, selon qu'il sera nécessaire, pour les rendre tous du même degré.* Supposons, par exemple, qu'ayant pris une certaine ligne pour unité, on ait trouvé pour expression de la ligne x, la formule

$$x=\sqrt{a-\frac{b^2c}{d^4}};$$

on représentera par k la longueur de la ligne qui a été prise pour unité, on remplacera les quantités x, a, b, c et d respectivement par $\frac{x}{k}$, $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ et $\frac{d}{k}$, et il viendra, toute réduction faite,

$$x=\sqrt{ak-\frac{b^2ck^3}{d^4}};$$

ou bien on observera que, le premier membre ayant une dimension, la quantité soumise au radical doit être du second degré; et comme les termes a et $\frac{b^2c}{d^4}$ sont respectivement du premier degré et du degré -1, on multipliera le premier par k et le second par k^3, ce qui conduira plus rapidement à la valeur trouvée ci-dessus.

§ II. Construction des expressions algébriques.

7. Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que l'on ait rendu homogènes les expressions à construire, si elles ne le sont pas; car, celle des lignes de la question qu'on aurait prise pour unité n'entrant pas *explicitement* dans les formules, il serait impossible de reconnaître à quelles constructions elle devrait être soumise.

8. L'expression de la quantité inconnue peut être ration-

nelle ou irrationnelle, et dans chacun de ces deux cas, elle sera monôme ou polynôme, entière ou fractionnaire. Nous ne nous occuperons d'abord que des quantités rationnelles, et dans cette seule hypothèse, savoir, que la formule proposée représente une ligne droite.

9. Si la quantité à construire est monôme et entière, elle n'aura qu'une dimension, et sera par conséquent exprimée par une équation de la forme

$$x = a.$$

Il ne s'agira donc, pour la construire, que de tracer une droite égale à celle dont a représente la longueur.

10. Si la valeur de x est un monôme fractionnaire, son numérateur contiendra une dimension de plus que son dénominateur. Ainsi

$$x = \frac{ab}{c}$$

est l'expression la plus simple d'une pareille quantité. Or, on peut évidemment regarder x comme le quatrième terme de la proportion $c : a :: b : x$,
de sorte qu'on obtiendra cette ligne inconnue en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes données dont c, a, b représentent les longueurs.

11. On verra de même que la quantité $\frac{a^2}{b}$ se construira en cherchant une troisième proportionnelle aux deux droites b et a.

On devra s'exercer à exécuter ces constructions d'une quatrième et d'une troisième proportionnelle par tous les procédés que nous avons indiqués dans notre Géométrie (**268**, **269**, **270**, **271**).

12. Soit maintenant

$$x = \frac{abcd}{pqr};$$

on mettra cette expression sous la forme suivante

$$x = \frac{ab}{p} \cdot \frac{c}{q} \cdot \frac{d}{r},$$

puis on cherchera une droite k égale à $\frac{ab}{p}$ (**10**) et alors on aura

$$x = \frac{ck}{q} \cdot \frac{d}{r};$$

on construira une droite k' égale à $\frac{ck}{q}$, ce qui donnera

$$x=\frac{dk'}{r},$$

et en cherchant enfin une quatrième proportionnelle aux trois droites r, d et k', la valeur de x sera construite.

Toutes ces constructions sont effectuées dans la figure 1, où OP, OQ, OR, OA, OB, OC, OD, OK, OK' et OX représentent respectivement les droites p, q, r, a, b, c, d, k, k' et x. Dans cette figure, on a employé six lignes parallèles; mais on peut obtenir la valeur de x en en tirant deux seulement. Pour cela, tracez deux parallèles OY et VZ, que vous couperez par une droite UVO qui leur soit à peu près perpendiculaire; puis, ayant pris $OP=p$, $OB=b$ et $VA=a$, tirez AP qui va couper UVO en U, et joignez UB; la droite $VK=\frac{ab}{p}=k$. Prenez maintenant $OQ=q$, $OC=c$, tirez QKU' et joignez U'C, vous aurez $VK'=\frac{ck}{q}=k'$; prenez enfin $OR=r$, $OD=d$, tirez K'RU'', joignez U'' et D, et vous aurez $VX=\frac{dk'}{r}=x$. Fig. 1. Fig. 2.

Remarquons que l'on aura *toujours* autant de quatrièmes proportionnelles à chercher qu'il est marqué par le degré du dénominateur.

13. Si l'expression de x est un polynôme entier, chacun de ses termes n'aura qu'une seule dimension; telle est la formule

$$x=a+b-c,$$

dont la construction est évidente.

14. Si le polynôme proposé est fractionnaire, tous les termes entiers seront du premier degré, et chacun des termes du numérateur de chaque fraction aura une dimension de plus que ceux de son dénominateur. La valeur de x sera donc alors de la forme

$$x=a+\frac{cdef+ghik-lmno}{pqr+stu}.$$

Pour la construire, on la transformera en une autre telle que tous les termes du numérateur aient toutes leurs dimen-

sions moins une commune, et qu'il en soit de même au dénominateur. On y parviendra en posant

$$ghik = cdey, \text{ d'où } y = \frac{ghik}{cde};\ lmno = cdey';\ \text{d'ou } y' = \frac{lmno}{cde},$$

$$\text{et } stu = pqz, \text{ d'où } z = \frac{stu}{pq}.$$

On construira les droites y, y' et z (**12**), et la valeur de x deviendra

$$x = a + \frac{cde(f + y - y')}{pq(r + z)}.$$

On construira (**13**) les droites

$$y'' = f + y - y', \quad z' = r + z;$$

et l'expression de x, étant ramenée ainsi à

$$x = a + \frac{cdey''}{pqz'},$$

sera enfin facile à construire (**12**).

15. Supposons maintenant que l'expression de la droite à construire soit irrationnelle : il pourra se faire que les indices des radicaux qui y entrent soient des puissances parfaites de 2, ou des nombres quelconques. Nous ne nous occuperons ici que des formules irrationnelles de la première espèce; et, pour prendre d'abord le cas le plus simple, nous supposerons que la quantité à construire ne renferme qu'un seul radical et qu'il soit du second degré.

La quantité soumise au radical devra avoir deux dimensions, de sorte que, si elle est monôme et entière, la valeur de x sera de la forme

$$x = \sqrt{ab}.$$

On la construira donc en cherchant une moyenne proportionnelle entre a et b par l'un des trois procédés que nous avons donnés dans notre Géométrie (**276**).

16. Si le radical porte sur un monôme fractionnaire, le numérateur de ce monôme aura deux dimensions de plus que le dénominateur; ainsi la valeur de x sera de la forme

$$x = \sqrt{\frac{abcd}{pq}}.$$

Pour la construire, on la mettra sous la forme

$$x=\sqrt{a.\frac{bcd}{pq}};$$

on construira une droite $y=\frac{bcd}{pq}$, et on obtiendra ensuite x en cherchant une moyenne proportionnelle entre a et y.

17. Lorsque la quantité soumise au radical est polynôme et sans diviseur, chacun de ses termes doit avoir deux dimensions, de sorte que la valeur de x est de la forme

$$x=\sqrt{ab+cd-ef}.$$

Pour la construire, on fait acquérir à tous les termes du polynôme un facteur commun, en posant

$$cd=ay,\text{ d'où } y=\frac{cd}{a};\quad ef=ay',\text{ d'où } y'=\frac{ef}{a},$$

et la valeur de x devenant ainsi

$$x=\sqrt{a(b+y-y')},$$

on l'obtiendra en cherchant une moyenne proportionnelle entre les droites a et $(b+y-y')$.

18. Si le polynôme est fractionnaire, chacun des termes du numérateur de chaque fraction aura deux dimensions de plus que ceux de son dénominateur : quant aux termes entiers, ils seront tous du second degré. Ainsi la valeur de x sera de la forme

$$x=\sqrt{ab+\frac{efgh+iklm}{pq-rs}}.$$

On agira comme au n° **14**, c'est-à-dire que l'on posera

$$iklm=efgy,\text{ d'où } y=\frac{iklm}{efg};\quad rs=pz,\text{ d'où } z=\frac{rs}{p},$$

et alors l'expression précédente de x deviendra

$$x=\sqrt{ab+\frac{efg(h+y)}{p(q-z)}}.$$

On construira maintenant une droite $y'=\frac{fg(h+y)}{p(q-z)}$, et il viendra enfin

$$x=\sqrt{ab+ey'},$$

quantité que nous savons construire (**17**).

19. Il est maintenant facile de construire les expressions irrationnelles dans lesquelles les indices des radicaux sont des puissances exactes de 2; car de pareilles formules peuvent toujours se transformer en d'autres expressions où il n'entre que des radicaux du second degré. Nous nous bornerons à un seul exemple qui sera suffisant pour faire concevoir comment on devra s'y prendre dans tous les cas. Soit

$$x=\sqrt[4]{\frac{a^7-a^4b^3+b^7}{a^3+b^3}},$$

on posera

$$a^4b^3=a^6y,\ \text{d'où}\ y=\frac{b^3}{a^2};\quad b^7=a^6y',\ \text{d'où}\ y'=\frac{b^7}{a^6}=\frac{by^2}{a^2};$$

et la valeur de x deviendra

$$x=\sqrt[4]{\frac{a^4(a-y+y')}{a+y}}=\sqrt{a\sqrt{\frac{a^2(a-y+y')}{a+y}}}.$$

Cela posé, on construira les valeurs de y et de y' par la méthode du n° **12**, ou mieux en cherchant, 1° une droite qui soit à la droite b comme le carré b^2 est au carré a^2; 2° une droite qui soit à la droite b comme le carré y^2 est au carré a^2 (*Géométrie*, **413**). On cherchera ensuite un carré u^2 qui soit au carré a^2 comme la droite $(a-y+y')$ est à la droite $(a+y)$, et l'expression de x étant ainsi réduite à

$$x=\sqrt{au},$$

on l'obtiendra en construisant une moyenne proportionnelle entre a et u.

20. Il résulte de ce qui précède que toute quantité algébrique rationnelle ou irrationnelle, qui représente une droite, pourra toujours être construite en cherchant seulement des quatrièmes et des moyennes proportionnelles, pourvu toutefois que les indices des radicaux qu'elle renferme, si elle est irrationnelle, soient des puissances exactes de 2.

21. On parvient souvent, par des procédés particuliers, à construire les formules d'une manière plus simple et plus rapide que par la méthode générale que nous venons de développer. Comme ces procédés tiennent uniquement à la forme des expressions proposées, nous ne pourrons en indiquer que quelques exemples.

Les formules

$$x=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad x=\sqrt{a^2-b^2}$$

se construisent directement, au moyen du théorème de *Pythagore* : ainsi, on reconnaît immédiatement que la première représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont a et b, et que la deuxième est l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'autre côté de l'angle droit est b, et qui a a pour hypoténuse. Il sera donc facile de contruire ces formules.

Remarquons que $x=\sqrt{a^2-b^2}$ peut se construire aussi en cherchant une moyenne proportionnelle entre $(a+b)$ et $(a-b)$.

22. La construction de la formule

$$x=\frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{b^2+c^2-a^2+2bc}$$

serait assez compliquée, en opérant d'après la méthode générale; mais si l'on observe que le numérateur revient à $(a+b)^2(a-b)$, et le dénominateur à $(b+c+a)(b+c-a)$, on aura

$$x=\frac{(a+b)^2}{b+c+a}\cdot\frac{a-b}{b+c-a}.$$

Ainsi, pour la construire, on cherchera une troisième proportionnelle OY aux droites OC$=a+b+c$, et OB$=a+b$; puis une quatrième proportionnelle OX aux droites OZ$=b+c-a$, OV$'=a-b$ et OY. On a pris OA$=a$, AB$=b$, BC$=c$; puis OB$'=$OB$=a+b$, AZ$=$AC, AV$=$AB et OV$'=$OV. Fig. 3.

23. La formule

$$x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2-e^2}$$

pourra être construite par une suite de triangles rectangles. Pour cela, tracez deux droites à angles droits, et prenez OA$=a$, OB$=b$; joignez AB, qui sera égal à $\sqrt{a^2+b^2}$: Fig. 4.
décrivez une demi-circonférence sur AB comme diamètre, tirez la corde BC$=c$, et joignez AC; cette droite sera égale à $\sqrt{\overline{AB}^2-c^2}=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$; prolongez BC d'une quantité CD$=d$, tirez AD, et vous aurez

$$AD=\sqrt{\overline{AC}^2+d^2}=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2},$$

enfin décrivez une demi-circonférence sur AD comme diamètre, tracez la corde DE$=e$, et joignez AE. Cette droite sera la valeur de x.

24. Enfin, nous indiquerons une précaution qu'il ne faut jamais négliger, et de laquelle dépend l'élégance des constructions, c'est de faire servir les lignes mêmes de la figure donnée à la détermination de celles que l'on cherche, de manière à rendre ainsi les opérations plus simples et moins nombreuses, et à tâcher d'obtenir les lignes inconnues dans la position même qu'elles doivent occuper.

25. La méthode que nous avons fait connaître pour construire les quantités irrationnelles du second et du quatrième degré donne implicitement la construction des racines des équations du second degré et des équations bi-carrées ; mais il est en général plus élégant de construire les racines de ces équations sans les résoudre. Occupons-nous d'abord des équations du second degré.

L'équation générale du second degré devant être homogène, on pourra toujours transformer en un carré le terme indépendant de l'inconnue, puisqu'il doit avoir deux dimensions, de sorte que toute équation de ce degré se ramènera à l'une des quatre formes suivantes :

$$x^2+ax+b^2=0,$$
$$x^2-ax+b^2=0,$$
$$x^2+ax-b^2=0,$$
$$x^2-ax-b^2=0.$$

Mais j'observe que la seconde et la quatrième se déduisent de la première et de la troisième, en y changeant x en $-x$; de sorte que les racines de ces deux dernières équations ne diffèrent que par les signes de celles des deux autres. On voit donc que, lorsqu'on saura construire les racines de la seconde et de la quatrième, on saura, par cela même, construire aussi les racines de la première et de la troisième équation. Nous ne nous occuperons donc que de ces deux équations

$$x^2-ax+b^2=0, \quad x^2-ax-b^2=0.$$

26. La première revient à

$$x(a-x)=b^2,$$

de sorte que b est une moyenne proportionnelle entre x et

$(a-x)$. On pourra donc regarder b comme la perpendiculaire, abaissée d'un point d'une circonférence sur un diamètre et x et $(a-x)$ comme les deux segments de ce diamètre, qui sera ainsi égal à a. En conséquence, on décrira une demi-circonférence sur une droite $OA=a$; on élèvera au point O une perpendiculaire $OB=b$ sur le diamètre OA, et en menant par son extrémité B une parallèle BXX' à AO, les parties BX et BX' de cette parallèle seront les racines de notre équation. Pour le démontrer, j'abaisse du point X la perpendiculaire XC sur le diamètre OA, et j'aurai ainsi Fig. 5.

$$\overline{CX}^2 = OC.CA;$$

mais $CX=b$, $OC=BX$ et $CA=AO-OC=a-BX$, de sorte que cette équation devient

$$b^2=BX.(a-BX),$$

c'est-à-dire la proposée

$$b^2=x(a-x),$$

dans laquelle on a remplacé x par BX; donc BX est une racine de cette équation. On prouverait de la même manière que BX' est l'autre racine.

Remarquons que si $b=\frac{a}{2}$, la parallèle BXX' à OA devient tangente à la demi-circonférence, de sorte que les points X et X' étant confondus, les deux racines sont égales entre elles et à $\frac{a}{2}$.

Si $b>\frac{a}{2}$, la parallèle BXX' ne rencontrera plus la circonférence, et ainsi les racines seront imaginaires. Tout ceci est d'accord avec la théorie des équations du second degré.

27. La seconde équation

$$x^2-ax-b^2=0$$

peut être mise sous la forme

$$x(x-a)=b^2,$$

ce qui signifie que b est une moyenne proportionnelle entre x et $(x-a)$; ainsi on pourra regarder b et x comme une tangente et une sécante issues d'un même point, et $(x-a)$ comme la partie extérieure de cette sécante, de sorte que la

corde qu'elle laisse dans la circonférence est égale à a. En
Fig. 6. conséquence, à l'extrémité B d'une droite $OB=b$, on élèvera une perpendiculaire $AB=\frac{a}{2}$; du point A comme centre, et avec AB pour rayon, on décrira une circonférence, et on tirera par le centre A et le point O la sécante OAX, cette droite sera une valeur de x, et $-OX'$ sera l'autre. En effet, OB et OX étant une tangente et une sécante issues du même point O, on a :

$$\overline{OB}^2=OX.OX'.$$

Mais $OB=b$, $OX'=OX-X'X=OX-a$; donc

$$b^2=OX.(OX-a),$$

équation qui n'est que le résultat obtenu en remplaçant x par OX dans la proposée

$$b^2=x(x-a);$$

ce qui prouve que OX vérifie cette équation. Il en est de même de $-OX'$; car $OX=OX'+X'X=OX'+a$; ainsi

$$b^2=OX'.(OX'+a), \quad \text{ou bien} \quad b^2=-OX'.(-OX'-a).$$

$-OX'$ vérifie donc l'équation proposée.

Cette construction réussit toujours; ainsi les racines de l'équation

$$x^2-ax-b^2=0$$

ne peuvent pas être imaginaires.

28. Considérons actuellement une équation bi-carrée quelconque. On pourra toujours la ramener à l'une des trois formes suivantes :

$$x^4-abx^2+c^2d^2=0, \quad x^4-abx^2-c^2d^2=0,$$
$$x^4+abx^2-c^2d^2=0,$$

(nous excluons le cas où les trois termes seraient positifs; car il est évident que les racines d'une pareille équation sont imaginaires). Posons

$$x^2=cz,$$

et il viendra, après avoir divisé par c^2,

$$z^2-\frac{ab}{c}z+d^2=0, \quad z^2-\frac{ab}{c}z-d^2=0, \quad z^2+\frac{ab}{c}z-d^2=0,$$

équations faciles à construire d'après ce qui précède (26

et **27**). La droite z étant connue, il ne s'agira plus, pour avoir x, que de prendre une moyenne proportionnelle entre cette droite z et c.

Remarquons que la seconde et la troisième des équations proposées ne donneront chacune que deux valeurs réelles pour x, lesquelles seront égales et de signes contraires, mais que la première aura ses racines toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires.

29. Il arrive quelquefois que l'on cherche immédiatement une aire ou un volume. Pour construire la formule qui donne alors la valeur de l'inconnue, on suivra une marche parfaitement analogue à celle que nous avons indiquée pour la construction des lignes. Ainsi la formule représentera une aire ou un volume, si, étant rationnelle et fractionnaire, par exemple, son numérateur contient deux ou trois dimensions de plus que son dénominateur. Telles sont les expressions :

$$x = \frac{a^3b - a^2c^2 + b^4}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{a^7 + b^7 - c^7}{a^4 + b^4}.$$

Or, construire ces formules, c'est faire un rectangle dont l'aire soit égale à la valeur de x, et un parallélipipède rectangle dont le volume soit équivalent à la valeur de y. Il faudra donc ramener les seconds membres de ces équations à être le produit, l'un de deux facteurs monômes du premier degré, et l'autre de trois pareils facteurs, ce qui est facile; car, en posant

$$c^2 = az \quad \text{et} \quad b^2 = av,$$

la première formule deviendra

$$x = \frac{a^3b - a^3z + \dfrac{a^3v^2}{a}}{a^2 + av} = a^2 \cdot \frac{\left(b - z + \dfrac{v^2}{a}\right)}{a + v};$$

et, en posant de même,

$$b^4 = a^3z \quad \text{et} \quad c^4 = a^3v,$$

l'expression de y deviendra

$$y = \frac{a^7 + \dfrac{a^6z^2}{b} - \dfrac{a^6v^2}{c}}{a^4 + a^3z} = a^3 \cdot \frac{a\left(a + \dfrac{z^2}{b} - \dfrac{v^2}{c}\right)}{a + z}.$$

30. Nous avons supposé jusqu'ici que l'expression de la

ligne à construire ne renfermait que des radicaux dont l'indice est une puissance parfaite de 2, ou que la détermination de cette ligne ne dépendait que de la résolution d'une équation du second degré ou d'une équation bi-carrée : c'est qu'*en général* ce sont là les seuls cas où l'on puisse construire une ligne en n'employant que la règle et le compas.

Supposons, en effet, qu'un problème de géométrie puisse être résolu par des intersections de lignes droites et de circonférences : si l'on joint les points ainsi obtenus avec les centres de ces circonférences et avec les points qui déterminent ces droites, on formera un enchaînement de triangles rectilignes dont les éléments pourront être calculés par les formules de la trigonométrie. Or, ces formules sont des équations algébriques qui ne renferment les côtés et les lignes trigonométriques des angles de nos triangles qu'au premier ou au second degré; ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes *.

Il suit de là que, pour reconnaître si un problème de géométrie peut être résolu avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre la détermination des racines de l'équation à laquelle il conduit, de la connaissance des solutions d'un système d'équations du deuxième degré composées comme nous venons de l'indiquer.

M. *Wantzell* a démontré dans le tome II du Journal de M. *Liouville*, que l'équation du degré 2^n, qui donne toutes les racines d'un problème susceptible d'être résolu au moyen de n équations du deuxième degré, est nécessairement *irréductible*, c'est-à-dire qu'elle ne peut avoir de racines communes avec une équation de degré moindre dont les coefficients seraient des fonctions rationnelles des données de la

* C'est ainsi que M. *Gauss* a fait dépendre la résolution de l'équation $x^{17}-1=0$, de celle des équations

$$x-1=0,\quad y^2+y-4=0,\quad z^2-yz-1=0,$$

$$s^2-zs+\frac{z^2+z-y-4}{2}=0 \quad \text{et} \quad x^2-sx+1=0.$$

question. Il a donné en outre les moyens de reconnaître si une équation peut être satisfaite par une fonction rationnelle des données ou si elle est irréductible. On pourra consulter sur ce sujet le Mémoire de M. *Wantzell.*

§ III. Problèmes déterminés.

31. De même qu'il n'y a point de règle fixe et déterminée pour mettre en équation une question numérique, de même aussi il n'en existe pas, comme nous l'avons dit (3), pour mettre en équation les problèmes de géométrie. Tout ce qu'on peut dire de plus général sur ce sujet revient au précepte suivant :

Commencez par examiner avec soin quelles sont les quantités dont la connaissance conduirait à la détermination de toutes celles que l'on cherche : ce seront là les véritables inconnues de la question proposée. Supposant ensuite le problème résolu, tirez toutes les droites connues et inconnues dans la position qu'elles doivent occuper les unes à l'égard des autres, ainsi que les lignes auxiliaires qui vous paraîtront nécessaires, pour établir leur dépendance mutuelle; représentez les longueurs des données par les premières lettres de l'alphabet, et celles des inconnues par les dernières; puis, sans faire aucune distinction entre les unes et les autres, écrivez les équations qui, d'après l'énoncé du problème, et d'après les théorèmes de la géométrie et de la trigonométrie, lient les différentes lignes entre elles : vous formerez ainsi autant d'équations qu'en comporte la nature de la question proposée, et le nombre de ces équations sera égal à celui des inconnues, si cette question est déterminée.

En se conformant exactement à cette règle, on parviendra toujours à mettre les problèmes de géométrie en équation; mais ce qui fait l'art de l'analyste, c'est de découvrir la route la plus expéditive pour passer des valeurs des données à celles des inconnues. Or, il est une considération très-importante qu'il ne faut *jamais* négliger, si l'on veut atteindre ce but : c'est, avant d'entreprendre un problème de géométrie, d'examiner avec soin combien il doit admettre de solutions, puis de *choisir de préférence, pour inconnues, parmi toutes*

les quantités dont la détermination peut conduire à la résolution du problème, celles qui, dans les diverses solutions dont il est susceptible, admettent le plus petit nombre de valeurs; car on conçoit que le calcul de ces inconnues conduira, *en général,* à des équations dont le degré sera moins élevé que si l'on avait pris d'autres inconnues. Je dis en général, parce que, si l'équation qui sert à déterminer l'inconnue que l'on a choisie convient également à une autre inconnue que l'on aurait aussi bien pu prendre à sa place, cette équation devra donner les valeurs de ces deux inconnues, et sera ainsi d'un degré plus élevé qu'elle ne l'aurait été, si cette circonstance particulière ne s'était pas présentée. Observons toutefois qu'en prenant pour inconnue une autre quantité qui dépende également de ces deux inconnues, comme serait leur demi-somme, leur demi-différence, ou une moyenne proportionnelle entre elles, etc., on arrivera toujours à une équation plus simple qu'en cherchant l'une ou l'autre.

Remarquons encore que lorsqu'on a trouvé une équation renfermant une inconnue quelconque, il suffira, pour obtenir l'équation qui résulterait du choix de toute autre inconnue, de chercher une relation entre ces deux inconnues, et d'éliminer la première entre cette nouvelle équation et la précédente.

Nous allons maintenant appliquer tout ce qui précède à la résolution de quelques problèmes.

Fig. 7. **32.** Problème. *Inscrire dans un triangle donné* ABC *un rectangle qui soit semblable à un rectangle donné* OPQR, *et dont la base repose sur un des côtés de ce triangle.*

Ce problème admettra évidemment trois solutions; car on peut placer la base du rectangle demandé successivement sur chaque côté du triangle, et il n'y aura qu'une seule solution pour chaque côté. Cela posé, supposons le problème résolu, et soit O'P'Q'R' le rectangle dont la base doit s'appuyer sur BC. Désignons la base et la hauteur de notre triangle par a et par h, celles du rectangle donné par p et par q, et les dimensions homologues de O'P'Q'R' par x et par y. La similitude des triangles AR'Q' et ABC donnera la proportion.

$$\text{AK}:\text{R'Q'}::\text{AI}:\text{BC},$$

c'est-à-dire $$h-y : x :: h : a;$$

et, puisque le rectangle demandé doit être semblable au rectangle donné, on aura aussi

$$x:y::p:q.$$

En multipliant ces deux proportions par ordre, le facteur x disparaîtra, et il viendra

$$h-y:y::hp:aq,$$

proportion de laquelle il serait facile de tirer la valeur de y,

$$y=\frac{aqh}{ph+aq}.$$

Mais cette valeur n'étant pas facile à construire, nous observerons que, si l'on divise les deux termes du second rapport de notre dernière proportion par p, elle deviendra

$$h-y:y::h:\frac{aq}{p};$$

ce qui nous apprend que la base supérieure du rectangle demandé partage la hauteur du triangle ABC, et par conséquent ses côtés AB et AC, dans le rapport $h:\frac{aq}{p}$. En conséquence, je prends sur le prolongement de AI deux distances IP et IQ respectivement égales à p et à q, et je mène par le point C la droite CB' parallèle à AI et égale à a; je tire B'PV, puis VQZ, et $CZ=\frac{aq}{p}$. Cela fait, je joins AZ, et cette droite est divisée au point P', où elle coupe BC, dans le rapport de AI à CZ, c'est-à-dire de h à $\frac{aq}{p}$; si donc on mène P'Q' parallèle à AC, cette droite AC sera divisée au point Q' dans le même rapport, de sorte que P'Q' sera, en grandeur et en position, un des côtés du rectangle demandé. Il sera alors facile d'achever ce rectangle.

Si l'on suppose $p=q$, le rectangle O'P'Q'R' deviendra un carré, et le point Z coïncidera avec le point B'; d'où l'on voit que pour inscrire un carré dans un triangle ABC, il Fig. 8. n'y a qu'à élever au point C sur BC une perpendiculaire CB' égale à BC, joindre AB', et le point P où cette droite coupera BC sera un des sommets du carré demandé OPQR.

Proposons-nous maintenant d'*inscrire le plus grand carré possible dans le triangle* ABC.

Pour y parvenir faisons $p=q$ dans la valeur trouvée pour y, et elle deviendra $\frac{ah}{a+h}$; ainsi le côté du carré est égal au double de l'aire du triangle divisée par la somme du côté sur lequel il repose et de la perpendiculaire abaissée sur ce côté du sommet de l'angle opposé. D'après cela, si l'on désigne par a, b, c les trois côtés du triangle, par A, B, C les hauteurs correspondantes, et par α, β, γ les côtés des carrés qui s'appuient respectivement sur ces côtés, on aura

$$\alpha=\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{A}+a},\quad \beta=\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{B}+b},\quad \gamma=\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{C}+c}.$$

Supposons $a>b$, et voyons laquelle est la plus grande des deux quantités α et β. Comme les deux numérateurs sont égaux, la question revient à savoir si $\mathrm{A}+a \gtrless \mathrm{B}+b$. Or, on tire de là $a-b \gtrless \mathrm{B}-\mathrm{A}$; mais l'équation $\mathrm{A}a=\mathrm{B}b$, donne

$$a:b::\mathrm{B}:\mathrm{A},$$

et par conséquent $$\frac{a-b}{\mathrm{B}-\mathrm{A}}=\frac{a}{\mathrm{B}}>1;$$

car a et B sont une oblique et une perpendiculaire issues du même point; donc $\mathrm{A}+a>\mathrm{B}+b$; donc α est plus petit que β. Ainsi *le plus grand des trois carrés qu'on puisse inscrire dans un triangle repose sur le plus petit de ses côtés.*

Si l'on demandait quelles relations doivent exister entre les trois côtés d'un triangle pour que deux des carrés que l'on peut y inscrire fussent égaux, on poserait

$$\mathrm{A}+a=\mathrm{B}+b,\quad \text{ou}\quad \mathrm{A}-\mathrm{B}=b-a,$$

équation à laquelle on satisfait en posant

$$a=b,\quad \text{ou}\quad \frac{b-a}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}=1;$$

mais $\frac{b-a}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}=\frac{a}{\mathrm{B}}$; donc $a=\mathrm{B}$, ce qui exige que l'angle ABC soit droit. Ainsi, *pour que deux des trois carrés soient égaux, il faut que les côtés sur lesquels s'apouieront ces carrés soient égaux ou rectangulaires.*

33. PROBLÈME. *Partager une droite donnée en moyenne et extrême raison.*

Soient a la longueur de la droite donnée OA, x celle de son plus grand segment; la longueur du plus petit sera $(a-x)$, et par conséquent l'énoncé du problème donnera immédiatement l'équation Fig. 9.

$$x^2=a(a-x) \qquad [1],$$

ou, en développant et transposant,

$$x^2+ax-a^2=0,$$

équation dont les racines seront nécessairement réelles et de signes contraires, puisque son dernier terme est négatif. Pour les construire, nous mettrons cette équation sous la forme suivante (27)

$$x(x+a)=a^2,$$

et alors nous pourrons regarder a et $(x+a)$ comme une tangente et une sécante issues du même point; x sera la partie extérieure de cette sécante, et par conséquent la partie engagée dans le cercle sera égale à a. En conséquence, pour construire les racines de notre équation, à l'extrémité A de la droite donnée OA$=a$, j'élèverai une perpendiculaire AC égale à la moitié de cette droite, et par le point O et le centre C du cercle ADE je tirerai la sécante ODE. Comme la racine négative doit surpasser la racine positive en valeur absolue, on voit que OD et $-$OE sont les valeurs de ces deux racines. Je rabattrai donc OD sur OA de O en X, et le point ainsi déterminé partagera la droite OA en moyenne et extrême raison, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

Quant à la racine négative $-$OE, elle ne présente aucun sens, et il est d'ailleurs évident que le problème proposé ne peut admettre qu'une seule solution. Il est donc naturel de penser que la grandeur absolue de cette racine est la réponse à une autre question qui aurait, avec celle que nous nous sommes proposée, une telle connexité, que les valeurs de x qui les résolvent toutes deux sont données par la même équation (31).

Par conséquent, pour voir s'il en est ainsi, et pour découvrir l'énoncé de cet autre problème, nous allons changer dans [1] x en $-x$, ce qui nous conduira à une équation dont les racines seront égales et de signes contraires à celles de la proposée, de sorte que $+$OE en sera la racine positive,

et nous modifierons le premier énoncé de manière que la nouvelle équation

$$x^2=a(a+x) \qquad [2]$$

en soit la traduction fidèle. Cette équation exprime que x est une moyenne proportionnelle entre la droite OA $=a$ et la somme faite de cette droite et de x; ainsi sa racine positive résout ce problème : *Trouver sur le prolongement de la droite* AO $= a$, *un point tel que sa distance au point* O *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* A, *et la droite* OA. Or, il est évident que ce point ne saurait se trouver à droite de A, puisqu'il doit être plus près de O que de A; donc, il est situé à gauche de O; donc on le déterminera en portant OE sur OA de O en X'. On aura, en effet, par suite de cette construction,

OE ou OX' : OA :: OA : OD ou OX' — OA,

d'où *componendo*

AX' : OX' :: OX' : OA.

34. Il suit de là que les points X et X' résolvent cette question dont les deux précédentes sont chacune un cas particulier : *Trouver sur la droite indéfinie qui passe par deux points donnés* O *et* A *un point tel que sa distance au premier de ces points soit moyenne proportionnelle entre sa distance au second et la droite* OA. Mais, soit que l'on prenne OX ou OX' pour inconnue, on trouvera toujours l'équation [1] ou l'équation [2] pour celle de ce problème; de sorte que les valeurs négatives n'ayant point de signification géométrique, il faudra employer à la fois ces deux équations, pour résoudre le problème. Cependant, si l'on remarque que la valeur absolue de la racine négative de l'équation [1] donne le point X', en la portant de O en X' à gauche de O, tandis que la valeur positive de x a été portée à droite de ce point O, on en conclura que les racines de l'équation [1], ou celles de l'équation [2], donneront la solution complète de notre problème, si *nous* CONVENONS *de regarder deux quantités affectées de signes contraires comme ayant des modes d'existence directement opposés ;* de telle sorte que, si l'on considère comme positives les distances comptées à droite d'un certain point, sur une ligne passant par ce point,

les distances négatives devront être portées sur la même ligne, mais à gauche du point dont il s'agit. Ainsi *les signes* + *et* —, *placés devant des quantités isolées devront être regardés comme des signes de* RELATION, *nécessaires pour indiquer les rapports de position qui peuvent exister entre les différentes parties d'une figure.*

Nous pouvons vérifier très-simplement la convenance de cette interprétation géométrique des signes + et — placés devant des quantités isolées, en prenant pour inconnue de notre problème la distance du point demandé au point A; car alors les deux points X et X' étant situés d'un même côté de A, l'équation qui donnera leurs distances à ce point devra avoir ses deux racines positives. C'est, en effet, ce qui arrive, et soit que l'on représente par x la distance AX ou AX', on arrive toujours à l'équation

$$x^2-3ax+a^2=0,$$

qui présente deux variations de signes.

35. Ainsi donc, *si, dans une équation quelconque renfermant des quantités qui peuvent avoir des modes d'existence directement opposés, quelques-unes d'entre elles viennent à être comptées dans un sens contraire à celui qu'elles avaient quand cette équation a été établie, il suffira de changer, dans l'équation dont il s'agit, le signe de chacune des quantités qui auront changé de sens, et l'équation ainsi modifiée sera précisément celle même à laquelle on parviendrait en attaquant directement le nouveau problème.*

Tous les efforts tentés jusqu'à présent pour démontrer cet admirable théorème, que nous devons au génie de DESCARTES, ont été illusoires, et on ne s'est assuré de sa vérité que par des vérifications qui sont heureusement assez variées et assez nombreuses pour qu'il ne puisse exister, dans un esprit judicieux, aucun doute sur l'exactitude et la généralité de cette propriété des signes + et —.

36. Avant de passer à un autre problème, remarquons que, contradictoirement à cette assertion qui a été souvent répétée, que le calcul redressait de lui-même l'erreur que l'on pouvait avoir commise dans l'expression des conditions d'un problème, *les racines imaginaires n'indiquent pas toujours l'impossibilité de la question qui y conduit,* mais seulement

l'impossibilité de concilier ces conditions avec les hypothèses sur lesquelles le raisonnement a été établi ; de sorte qu'avant d'affirmer que le problème ne peut pas être résolu, il faut examiner si, en modifiant ces hypothèses, on ne pourrait pas arriver à la véritable solution. Reprenons, en effet, le problème du nº **34**, et, en supposant que le point demandé doive être situé à droite de A, représentons par x sa distance au point O ; on trouvera pour équation de ce problème :

$$x^2 = a(x - a), \quad \text{ou} \quad x^2 - ax + a^2 = 0,$$

équation dont les racines sont imaginaires. On aurait tort, comme on voit, d'en conclure que la question est impossible ; car cette prétendue impossibilité tient uniquement à l'hypothèse que l'on a faite en plaçant le point demandé à la droite de A, hypothèse évidemment absurde, puisqu'alors sa distance au point O, surpassant à la fois sa distance au point A et la droite AO, ne saurait être moyenne proportionnelle entre ces deux quantités.

Fig. 10. **37.** Problème. *Par un point* A *donné à égale distance de deux droites rectangulaires* Xx *et* Yy, *mener une sécante telle que la partie interceptée par ces droites soit égale à une droite donnée* m.

Joignons le point A au point O par une droite indéfinie ; il est clair que la partie interceptée entre les deux droites Xx et Yy sera nulle. Supposons que cette sécante OA tourne autour de A en allant de gauche à droite : la partie interceptée dans l'angle YOx croîtra d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, ce qui aura lieu quand la sécante sera devenue parallèle à Xx ; donc il arrivera un instant où cette partie sera égale à m. Donc, il y aura toujours une solution, et une seule, dans chacun des angles supplémentaires de celui où est situé le point A. Examinons ce qui se passe dans cet angle.

Lorsque la sécante est parallèle à Xx, la partie comprise dans l'angle YOX est infinie, et, par conséquent, elle diminuera d'abord, si cette sécante continue son mouvement ; mais elle redeviendra infinie quand la sécante sera parallèle à Yy. On voit ainsi que la partie interceptée dans l'angle YOX est susceptible d'un *minimum*, qui évidemment n'est pas nul. Donc, si m est moindre que ce *minimum*, il n'y a pas de

solution dans l'angle YOX; mais il y en aura une ou deux, suivant que *m* sera égale à ce *minimum* ou plus grande que lui.

Il est d'ailleurs évident qu'il n'y a point de solution dans l'angle yOx.

Concluons que le problème proposé est susceptible de quatre, de trois ou de deux solutions. Supposons qu'il en admette quatre, et soient CB, C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3 ces solutions.

Cela posé, examinons quelle quantité il conviendra de prendre pour inconnue. On pourrait choisir la distance du point O au point où la sécante demandée coupe Xx, ou bien la distance du point A à ce même point; mais l'équation du problème serait alors complète et du quatrième degré; car les quatre distances OB, OB_1, OB_2, OB_3 sont évidemment inégales, aussi bien que AB, AB_1, AB_2, AB_3. Sera-t-il préférable de prendre pour inconnue l'angle que la sécante forme avec xX ou celui qu'elle forme avec OA? J'observe que le point A, étant équidistant des deux côtés de l'angle YOX, se trouve sur la bissectrice de cet angle, de sorte que tout, dans cette figure, doit être symétrique de part et d'autre de cette droite. Donc, si l'on plie la figure le long de OA, AC et AC_1 se rabattront respectivement sur AB_1 et sur AB, et AC_2B_2 recouvrira AB_3C_3. Ainsi les angles ACO et AB_1O sont égaux, et l'angle AB_1O est le complément de l'angle ABO; ainsi OC_2B_2 est égal à OB_3C_3, et l'angle AB_2O est le complément de l'angle AB_3X. On voit encore que les quatre sécantes sont deux à deux également inclinées sur OA. Donc, si l'on prend pour inconnue la tangente de l'angle que la sécante fait avec xX, l'équation du problème sera encore du quatrième degré, mais elle sera réciproque (*Trig.*, **26**), et par conséquent elle pourra être abaissée au second degré (*Algèbre*, **550**); et, si l'on prend pour inconnue l'inclinaison de la sécante sur OA, les lignes trigonométriques des quatre angles seront égales deux à deux, ou égales et de signes contraires, et par conséquent l'équation sera encore réductible au second dégré.

Ainsi, le problème qui semblait d'abord impossible à résoudre, en n'employant que la règle et le compas*, pourra

---

* Comme $\overline{OB}^2+\overline{OB}^2_1=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=m^2$, et que $\overline{OB}^2_2+\overline{OB}^2_3=\overline{OB}^2_2+\overline{OC}^2_2=m^2$, on voit que, si l'on transforme l'équation du quatrième

l'être maintenant avec ces deux instruments, grâce à un plus heureux choix d'inconnue. Cependant, comme les angles, qui ne peuvent entrer dans le calcul que par leurs lignes trigonométriques, sont des inconnues qui, en général, ne se prêtent pas facilement aux constructions géométriques, il convient d'examiner si l'on ne pourrait pas trouver une inconnue plus commode que l'inclinaison de la sécante sur xX ou sur OA. Newton, remarquant que le point A est équidistant des milieux de CB et de C_1B_1, ainsi que de ceux de C_2B_2 et de C_3B_3, en a conclu qu'en prenant pour inconnue la distance de ce point au milieu de la sécante CB, cette inconnue ne pourrait avoir que deux grandeurs différentes, de sorte que l'équation d'où elle dépendrait aurait ses quatre racines égales deux à deux, ou égales deux à deux et de signes contraires, et qu'en conséquence elle serait certainement réductible au second degré. Observons d'ailleurs que AI étant connu, on a immédiatement les valeurs de AB et de AB_1, de AB_2 et de AB_3; car $AB=\frac{m}{2}-AI$, $AB_1=\frac{m}{2}+AI$, etc.

Enfin M. Gergone a observé que les quatre sécantes sont deux à deux également distantes de O, de sorte que, si l'on prend pour inconnue la perpendiculaire OR, abaissée de ce point sur la sécante CB, cette inconnue ne dépendra certainement que d'une équation du second degré. D'un autre côté, cette perpendiculaire connue, rien ne sera plus facile que d'achever le problème, puisqu'il suffira, pour cela, de mener du point A des tangentes aux deux circonférences qui auront pour rayons les racines de cette équation.

Soient donc a les perpendiculaires AP et AQ, abaissées de A sur Xx et Yy, $OR=r$, $OB=x$, $OC=y$: le théorème de *Pythagore* donne

$$x^2+y^2=m^2 \qquad [3].$$

En évaluant l'aire du triangle OCB, on trouve

$$xy=mr \qquad [4],$$

degré trouvée en prenant pour inconnue la distance du point O au point où la sécante demandée coupe Xx, en une autre dont les racines soient les carrés des siennes, ces racines formeront une équidifférence, de sorte que la résolution de cette transformée se ramènera à celle de deux équations du second degré à coefficients rationnels (*Alg.*, 560).

et enfin on tire de la similitude des triangles COB et APB,

$$a:y::x-a:x,\quad \text{d'où}\quad x+y=\frac{xy}{a}\qquad [5].$$

Telles sont les équations du problème. Il s'agit donc d'en éliminer x et y. Pour cela, je remplace dans [5] xy par mr, ce qui donne

$$x+y=\frac{mr}{a};$$

puis je retranche l'équation [3] du carré de cette dernière, en ayant égard à l'équation [4], et il vient toutes réductions faites,

$$mr^2-2a^2r-a^2m=0\qquad [6].$$

Une des racines de cette équation est négative, et ne présente par conséquent aucun sens; car r n'est pas une quantité qui soit susceptible d'opposition de direction (**34**) : c'est une grandeur absolue; ainsi l'équation [6] ne détermine que la perpendiculaire abaissée de O sur la sécante CAB et sur sa symétrique C_1AB_1, de sorte qu'il nous faut chercher une nouvelle équation pour avoir la distance du point O aux sécantes AC_2B_2 et AB_2C_2. Mais, sans recommencer de nouveaux calculs, j'observe que OB_2 étant dirigée en sens contraire de OB, tandis que les quantités a et y conservent leur direction, on obtiendra l'équation correspondante à [5], en changeant dans celle-ci x en $-x$ *, conformément au principe de *Descartes* (**35**), tandis que les deux autres équations resteront les mêmes, puisque l'on n'y considère que les valeurs absolues des quantités x, y, m et r. Ainsi, les équations qui serviront à déterminer la perpendiculaire OR_2 seront :

$$x^2+y^2=r^2,\quad xy=mr,\quad y-x=-\frac{xy}{a}.$$

Mais si l'on remarque que ces trois équations se déduisent des équations [3], [4] et [5], en y changeant x et r, respectivement en $-x$ et en $-r$, on en conclura que l'équation

---

* Et, en effet, la similitude des triangles C_2OB_2 et APB_2 donne la proportion

$$a:y::x+a:x,$$

d'où l'on tire $$y-x=-\frac{xy}{a}.$$

finale en r, qui déterminera OR_2, aura ses racines égales et de signes contraires à celles de l'équation [6], de sorte que la valeur absolue de la racine négative de cette équation sera égale à OR_2. Il ne s'agit donc plus que de construire les racines de l'équation [6], mais en faisant abstraction de leurs signes. Pour y parvenir, je la mets sous la forme suivante :

$$r\left(r-2\frac{a^2}{m}\right)=a^2;$$

puis, je prolonge AP d'une quantité $PM=m$; je joins MO, et tirant OZ perpendiculairement à OM, j'obtiens la droite $PZ=\frac{a^2}{m}$. Alors, je décris du point Z comme centre et avec PZ pour rayon une circonférence, qui coupe OZ en r et en r', et les droites Or et Or' sont les valeurs absolues des racines de l'équation [6]. Enfin, je décris du point O comme centre, et avec les rayons Or et Or', deux circonférences, et je mène du point A des tangentes à ces circonférences, ce qui achève de résoudre le problème.

Pour que ce problème admette quatre solutions, il faut que le point A soit hors de la circonférence décrite avec le rayon Or, c'est-à-dire que ce rayon soit plus petit que $OA=a\sqrt{2}$. Exprimons donc que la racine positive de [6] est moindre que $a\sqrt{2}$; nous aurons

$$\frac{a}{m}(a+\sqrt{a^2+m^2})<a\sqrt{2},\quad \text{d'où}\quad m>2a\sqrt{2}.$$

Or, $OA=a\sqrt{2}$; donc, pour que le problème admette quatre solutions, il faut que m soit plus grand que le double de OA, c'est-à-dire que la partie interceptée par les droites Xx et Yy sur la perpendiculaire élevée au point A sur OA, de sorte que le *minimum* de m est cette perpendiculaire P'Q'. Si donc m est égale à cette perpendiculaire, il n'y aura qu'une solution dans l'angle YOX; et il n'y en aura aucune dans cet angle, si m est moindre qu'elle.

C'est ce qu'on aurait pu découvrir directement par des considérations géométriques; car le *minimum* de m correspondant au cas où il n'y a qu'une seule solution dans l'angle YOX, il faut alors qu'en pliant la figure le long de OA, les deux parties de la sécante coïncident, ce qui exige que cette sécante minimum soit perpendiculaire à OA.

Quant au rayon Or', il est moindre que OA; car la construction qui le détermine montre que Or' est plus petit que OP, et *a fortiori* que OA.

38. Si on élève au point B, sur la sécante CAB, la perpendiculaire BD terminée au prolongement de QA, on verra que, si l'on pouvait déterminer le point D, le problème serait résolu; car le sommet B du triangle rectangle ABD se trouve à la fois sur la droite Xx et sur la demi-circonférence décrite sur AD comme diamètre. Représentons donc par z l'inconnue AD, et, en observant que les triangles ABD et OCB étant semblables, toutes leurs lignes homologues sont proportionnelles, nous aurons

$$m:z::r:a.$$

On tire de cette proportion

$$r=\frac{am}{z}.$$

Je substitue (**31**) cette valeur dans l'équation [6] du n° précédent, et il viendra, toutes réductions faites,

$$z^2+2az-m^2=0,$$

équation dont les racines déterminent le point D. Elles ont pour expression :

$$z=-a\pm\sqrt{a^2+m^2}.$$

Ainsi, pour résoudre le problème, on prolongera PA d'une quantité $AM'=m$, et du point Q comme centre, avec QM' pour rayon, on décrira une circonférence qui coupera la droite indéfinie AQ aux points D et D'. AD et AD' seront les deux valeurs de z. On décrira donc sur AD et sur AD' des demi-circonférences qui couperont la droite Xx aux points B, B_1, B_2 et B_3, de sorte qu'en tirant des sécantes par ces points et par le point A, on aura toutes les solutions de la question.

Cette dernière construction, remarquable par son élégante simplicité, se trouve dans les *Collections mathématiques de* PAPPUS, géomètre qui vivait à la fin du IVe siècle de notre ère.

39. PROBLÈME. *Inscrire dans un triangle* ABC *un rectangle tel qu'en le faisant tourner autour du côté com-* Fig. 11.

mun CB, *l'aire totale du cylindre ainsi engendré soit égale à celle d'une sphère donnée dont le rayon est* r.

Désignons par a et par h la base et la hauteur du triangle ABC, par x et par y la base et la hauteur du rectangle demandé, l'expression de l'aire cylindrique engendrée par ce rectangle sera $2\pi y^2+2\pi xy$; et comme cette aire doit être égale à celle de la sphère dont le rayon est r, on aura :

$$2\pi y^2+2\pi xy=4\pi r^2 \qquad [7],$$

d'où, en divisant par 2π,

$$y^2+xy=2r^2.$$

Exprimons maintenant que le rectangle OPQR est inscrit dans le triangle ABC; nous aurons, pour cela, comme au n° **32**, la proportion

$$h-y:h::x:a,$$

et par conséquent

$$x=\frac{a(h-y)}{h} \qquad [8].$$

En substituant cette valeur de x dans l'équation précédente, il viendra

$$(h-a)y^2+hay-2r^2h=0 \qquad [9],$$

équation dont la résolution fera connaître y. Cette quantité étant déterminée, on la substituera dans [8], et on aura ainsi la valeur correspondante de x.

Discutons *cette équation*. Trois cas principaux peuvent se présenter; car h est $>a$, égale à a ou moindre que a; nous allons donc examiner successivement ces trois hypothèses.

1er Cas. $h>a$. Une des racines de l'équation [9] est positive et l'autre négative; car son dernier terme est négatif. Or, celle-ci doit être rejetée, quoique y soit susceptible d'opposition de direction, parce qu'admettre une valeur négative de y, ce serait, en vertu de l'équation [7], demander que $4\pi r^2$ fût non pas l'aire totale du cylindre engendré par la révolution du rectangle OPQR autour de OP, mais bien la différence entre l'aire de sa surface convexe et la somme de celles de ses bases; ainsi, ce ne serait que comme réponse à cette question que l'on pourrait admettre la valeur négative

de y *. On voit donc que, pour que le problème soit possible, il ne suffit pas que la valeur de y soit réelle et positive, il faut encore, en vertu de [8], que cette valeur ne surpasse pas h. Examinons donc si cette condition est remplie. Nous allons, en conséquence, résoudre l'équation [9], et écrire que sa racine positive est plus petite que h; il viendra

$$y=\frac{-ah+\sqrt{a^2h^2+8r^2h(h-a)}}{2(h-a)}<h:$$

h étant $>a$, on tire successivement de cette inégalité,

$$\sqrt{a^2h^2+8r^2h(h-a)}<h(2h-a);$$

carrant et divisant par h,

$$a^2h+8r^2(h-a)<h(2h-a)^2;$$

transposant et réduisant,

$$8r^2(h-a)<h[(2h-a)^2-a^2]=h.2h.2(h-a),$$

d'où $\qquad r^2<\frac{h^2}{2},\quad$ ou bien $\quad r<\frac{1}{2}h\sqrt{2}.$

Ainsi, pour que le problème soit possible lorsque $h>a$, il faut que r ne surpasse pas la moitié de la diagonale du carré construit sur la hauteur du triangle. La plus grande aire que puisse engendrer le rectangle est donc $4\pi.\frac{h^2}{2}=2\pi h^2$; et, en effet, lorsque $r=\frac{1}{2}h\sqrt{2}$ la valeur de y se réduit à h; celle de x est par conséquent égale à zéro, et l'aire totale du cylindre est alors la somme de celles de ses bases, c'est-à-dire qu'elle est égale à $2\pi h^2$.

2ᵉ Cas. $h=a$. Une des valeurs de y est alors infinie, et doit par conséquent être rejetée. L'autre est $y=\frac{2r^2}{h}$, ce qui conduit encore à la condition $r<\frac{1}{2}h\sqrt{2}$.

3ᵉ Cas. $h<a$. Les coefficients des deux termes extrêmes

* Ce n'est qu'afin de ne pas compliquer cette discussion que nous restreignons ainsi la généralité que l'on pourrait donner à l'énoncé du problème ; aussi nous engageons les élèves qui auront étudié cette discussion à la reprendre, en admettant les valeurs négatives de x et de y; ils verront que, pour ces valeurs, le rectangle sera *ex-inscrit*, c'est-à-dire qu'il aura deux sommets sur les prolongements de AB et de AC.

de l'équation [9] étant de mêmes signes, ses deux racines peuvent être imaginaires ; il faut donc d'abord que l'on ait

$$a^2h^2+8r^2h(h-a)>0, \quad \text{d'où} \quad r<\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}};$$

et ensuite que l'une au moins des valeurs de y soit $<h$; posons donc l'inégalité

$$y=\frac{-ah\pm\sqrt{a^2h^2+8r^2h(h-a)}}{2(h-a)}<h.$$

Comme $(h-a)$ est actuellement négatif, il faudra, en chassant le dénominateur, renverser le signe d'inégalité, ce qui donnera, après avoir transposé $-ah$,

$$\pm\sqrt{a^2h^2+8r^2h(h-a)}>h(2h-a) \quad [10].$$

Ici trois cas peuvent se présenter, savoir : $a<2h$, $a=2h$ et $a>2h$.

1° Si $a<2h$, la seconde valeur du premier membre de l'inégalité [10] sera nécessairement moindre que celle du second, puisque celle-ci est positive et que celle-là est négative ; ainsi la seconde valeur de y, que nous désignerons par y'', tandis que nous représenterons par y' celle qui correspond au signe supérieur du radical, cette seconde valeur, dis-je, est plus grande que h. Quant à l'autre, nous conclurons du calcul fait dans le premier cas, en observant que la suppression du facteur négatif $(h-a)$ exige que l'on renverse le signe d'inégalité, que pour que y' soit plus petite que h, il faut que l'on aît

$$r<\frac{1}{2}h\sqrt{2}.$$

Pour savoir si cette condition peut s'accorder avec celle qui exprime que les racines de [9] sont réelles, je pose

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}} \gtrless \frac{h\sqrt{2}}{2},$$

et j'en tire successivement

$$\frac{a^2}{4(a-h)} \gtrless h, \ldots \; a^2-4ah+4h^2 \gtrless 0:$$

or, le premier membre de cette inégalité est le carré de

$(a-2h)$; donc il faut rejeter le signe inférieur; de sorte que

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}} > \frac{h\sqrt{2}}{2}.$$

On voit ainsi que

si $a<2h$, et $r<\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, on a $y'<h$ et $y''>h$, 1 sol^{n};

si $r=\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, on a $y'=h$ et $y''>h$, 1 sol^{n};

mais *le problème est impossible*, si $r>\frac{1}{2}h\sqrt{2}$; car alors les deux valeurs de y sont imaginaires ou sont toutes les deux plus grandes que h.

2° Si $a=2h$, il faudra que l'on ait $r<\frac{1}{2}h\sqrt{2}$ pour que les deux valeurs de y soient réelles et inégales, et alors la seconde des inégalités [10] ne sera jamais satisfaite, mais la première le sera toujours; donc

si $a=2h$ et $r<\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, on a $y'<h$ et $y''>h$, 1 sol^{n};

si $r=\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, on a $y'=h$ et $y''=h$, 1 sol^{n}.

3° Soit $a>2h$: la première des inégalités [10] sera toujours vérifiée, et ainsi $y'<h$. Quant à la seconde, on trouvera, en changeant les signes de ses deux membres qui sont négatifs,

$$\sqrt{a^2h^2+8r^2h(h-a)}<h(a-2h),$$

d'où, en vertu du calcul fait dans le premier cas,

$$r>\frac{1}{2}h\sqrt{2},$$

parce que le facteur $(h-a)$ étant <0, sa suppression change $<$ en $>$. Donc

si $a>2h$ et $r>\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, on a $y'<h$ et $y''<h$, 2 sol^{ns};

si $r=\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, on a $y'<h$ et $y''=h$, 2 sol^{ns};

si $r<\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, on a $y'<h$ et $y''>h$, 1 sol^{n}.

Ainsi, le problème n'admettra vraiment deux solutions que

si $a>2h$ et que si r est en même temps plus petit que $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}$ et $>\frac{1}{2}h\sqrt{2}$; car, lorsque y' ou y'' est égale à h, le rectangle se réduit au système de deux droites qui se confondent.

Puisque r doit être moindre que $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}$, et que cette quantité surpasse $\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, on voit que la plus grande valeur que l'on puisse attribuer à r est $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}$; mais alors les deux valeurs de y se réduisent à $\frac{ah}{2(a-h)}$, ce qui donne $x=\frac{a(a-2h)}{2(a-h)}$; par conséquent, pour que r puisse être égal à $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}$, il faut que a soit $>2h$, sans quoi x serait nulle ou négative. Ainsi, lorsque $a>2h$, le rectangle qui engendrera la plus grande surface cylindrique est celui dont la hauteur égale $\frac{ah}{2(a-h)}$. Mais, si $a<2h$, la valeur de r doit être moindre que $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h}{2(a-h)}}$, sans quoi x aurait une valeur négative; or, dans l'hypothèse où $a>h$ et $<2h$, si $r>\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, le problème est impossible; donc le *maximum* de r est alors $\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, lequel correspond à $y=h$.

Observons enfin que l'on pouvait prévoir que le problème admettrait une ou deux solutions, quand le *maximum* de l'aire cylindrique engendrée par le rectangle demandé surpasserait $2\pi h^2$; car, en supposant construit le rectangle correspondant à cette aire *maximum*, si on fait décroître la hauteur jusqu'à zéro, l'aire engendrée variera d'une manière continue depuis son *maximum* jusqu'à zéro; donc il y aura un instant où elle sera égale à $4\pi r^2$, donc le problème aura déjà une solution; maintenant, si on fait augmenter, au contraire, la hauteur jusqu'à h, l'aire du cylindre variera depuis sa valeur *maximum* jusqu'à $2\pi h^2$; si donc $4\pi r^2=2\pi h^2$, ou est $>2\pi h^2$, c'est-à-dire si $r=\frac{1}{2}h\sqrt{2}$ ou est $>\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, il y

aura un instant où l'aire engendrée sera égale à $4\pi r^2$, et le problème aura ainsi une seconde solution ; mais si $r<\frac{1}{2}h\sqrt{2}$, cette seconde solution n'existera pas.

Le même raisonnement prouve que si le *maximum* de l'aire engendrée est $2\pi h^2$, il n'y aura qu'une solution.

Construisons maintenant les racines de l'équation [9]. a étant supposé plus grand que h, $h-a$ est négatif, et en conséquence nous mettrons cette équation sous la forme

$$y\left(\frac{ah}{a-h}-y\right)=\frac{2r^2h}{a-h}.$$

Nous construirons d'abord les quantités $\frac{2r^2h}{a-h}$ et $\frac{ah}{a-h}$, au moyen des proportions

$$a-h:h::2r^2:z^2=\frac{2r^2h}{a-h},$$

$$a-h:h::\ a\ :t=\frac{ah}{a-h}.$$

Pour cela, je porte sur la hauteur AH une longueur AD$=a$; ainsi HD$=(a-h)$. Sur AD comme diamètre je décris une demi-circonférence ; je tire EA et ED, et je prends sur ED une partie ER$=r\sqrt{2}$; je mène RZ parallèle à AD, et EZ$=z$. Je prends ensuite FG$=a$, je trace GI parallèle à BC, et par le point I je mène IT parallèle à AD ; la partie KT$=t$. Je décris maintenant une demi-circonférence sur KT, et ayant pris KL$=z$, je mène LY′Y″ parallèlement à AD, et il ne reste plus qu'à tirer par les points Y′ et Y″ des parallèles à BC pour déterminer les bases supérieures des deux rectangles demandés, en grandeur et en position.

40. PROBLÈME. *Déterminer les dimensions d'un segment sphérique dont le volume et l'aire soient respectivement égaux à ceux d'une sphère et d'un cercle donnés.*

Soient a et b les rayons de la sphère et du cercle donnés ; r et h le rayon de la base et la hauteur du segment demandé ; on trouvera facilement que les équations du problème sont

$$r^2+h^2=b^2\quad[11];\quad h(h^2+3r^2)=8a^3\quad[12].$$

En éliminant r^2 entre ces deux équations, il viendra

$$2h^3-3b^2h+8a^3=0\qquad[13],$$

équation qui fera connaître h. La hauteur du segment étant

ainsi déterminée, on en déduira la valeur du rayon de sa base au moyen de l'équation [11], et le problème sera résolu.

Discutons l'équation [13]. Cette équation a une racine réelle négative, puisqu'elle est de degré impair et que son dernier terme est positif; mais cette racine est étrangère à la question; car la hauteur du segment ne peut pas être une quantité négative. Quant aux deux autres racines, elles peuvent être imaginaires : on comprend, en effet, qu'il pourrait se faire que le volume donné fût trop grand pour être contenu dans la surface πb^2. Si ces deux autres racines sont réelles, elles seront positives, conformément à la *règle des signes de* DESCARTES (*Algèbre*, **465**), et comme on peut d'ailleurs le reconnaître d'après la loi de composition des coefficients de l'équation [13]. En effet, le produit des trois racines de cette équation est négatif, et comme l'une d'elles est négative, il faut que le produit des deux autres soit positif, et que, par conséquent, elles aient les mêmes signes; mais elles ne peuvent être négatives, puisque la somme des trois racines est nulle; donc elles sont positives.

Pour que le problème soit possible, il faut que la condition de réalité des racines de l'équation [13] soit vérifiée, c'est-à-dire que l'on ait, d'après la règle connue (*Algèbre*, **482**),

$$b > a\sqrt[6]{32} \qquad [14].$$

Si cette condition est remplie, l'équation [13] aura deux racines positives; mais le problème proposé n'aura cependant deux solutions que si ces racines sont moindres que b, à cause de l'équation [11], ce qui exige que b soit une limite supérieure des racines positives de l'équation [13]. Pour savoir dans quel cas il en sera ainsi, je substitue b à h dans le premier membre de cette équation et dans ses dérivées (*Algèbre*, **582**), ce qui nous donnera pour résultats

$$-b^3+8a^3, \quad +3b^2, \quad +12b.$$

Donc b sera une limite si l'on a

$$-b^3+8a^3>0, \quad \text{d'où} \quad b<2a.$$

On voit par là que si b est compris entre $a\sqrt[6]{32}$ et $2a$, le problème admettra deux solutions, qui se réduiront à une seule si $b=a\sqrt[6]{32}$; car telle est la condition d'égalité de deux racines de l'équation [13].

Si $b=2a$, on trouve $h=2a$ et $r=0$, de sorte qu'au lieu d'un segment sphérique, on a une sphère dont le diamètre est $2a$. L'autre valeur positive de h est $a(\sqrt{3}-1)$: elle est moindre que $2a=b$, et fournit par conséquent une seconde solution de la question.

Si $b>2a$, la condition [14] étant nécessairement remplie, les trois racines de l'équation [13] sont encore réelles; mais il n'y a cependant qu'une seule solution, parce qu'alors $-b^6+8a^6<0$, et qu'ainsi l'une des racines positives de cette équation est moindre que b et que l'autre surpasse b.

La condition [14] nous apprend que le volume du segment sphérique sera *maximum* quand on aura $a=\frac{b}{\sqrt[6]{32}}$: et il sera facile de construire ce segment *maximum*. En effet, l'équation [13] ayant alors deux racines égales, l'une d'elles doit satisfaire à sa dérivée $6h^2-3b^2=0$, et comme cette équation n'a qu'une racine positive $\frac{b}{2}\sqrt{2}$, c'est celle-ci qui entre deux fois dans la proposée. La valeur correspondante de r est aussi $\frac{b}{2}\sqrt{2}$, de sorte que le segment *maximum* est un hémisphère dont le rayon est la moitié du côté du carré inscrit dans le cercle donné.

41. On aurait pu *prévoir, d'après la nature de la question, que le problème n'admet deux solutions que dans certains cas, et distinguer ces cas.* Supposons que l'on ait construit un segment dont l'aire soit égale à celle du cercle donné, et opposons-lui par sa base un segment égal : on formera ainsi un corps dont le volume sera *maximum*, quand chaque segment sera un hémisphère, puisque, parmi tous les corps qui ont la même aire, la sphère est celui qui a le plus grand volume. Le segment dont l'aire est πb^2 sera donc le plus grand possible, quand il sera un hémisphère; et son rayon aura pour valeur $\sqrt{\frac{\pi b^2}{2\pi}}=\frac{b}{2}\sqrt{2}$, comme nous l'avons trouvé plus haut. Son volume sera par conséquent égal à $\frac{\pi b^3}{3\sqrt{2}}$, de sorte qu'on aura alors $b^3=4a^3\sqrt{2}$, d'où $b=a\sqrt[6]{32}$, ce qui s'accorde encore avec ce qui précède.

Supposons maintenant que l'on ait construit ce segment

maximum, et que l'on fasse diminuer le rayon de sa base *d'une manière continue*, son aire restant constamment égale à πb^2 : sa hauteur devra augmenter, mais seulement jusqu'à ce que le rayon de sa base étant réduit à zéro, le segment soit devenu une sphère ayant b pour diamètre, et par conséquent $\frac{1}{6}\pi b^3$ pour volume. Donc si $\frac{4}{3}\pi a^3 > \frac{1}{6}\pi b^3$, d'où $b < 2a$, il y aura eu un instant où le volume du segment aura été égal à celui de la sphère donnée, puisqu'il a varié d'une manière continue, à partir de sa plus grande valeur.

Si l'on suppose, au contraire, que le rayon de la base du segment croisse d'une manière continue depuis $\frac{b}{2}\sqrt{2}$, l'aire de ce segment restant toujours égale à πb^2, sa hauteur h ira en diminuant; mais, comme alors r reste constamment moindre que b, le produit r^2h, et par conséquent le volume du segment, décroîtra indéfiniment avec h, de sorte qu'il y aura un instant où ce volume sera égal à $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Concluons donc que, quand le problème sera possible, il aura deux solutions si $b < 2a$. Il y en aura encore deux si $b = 2a$, mais alors un des segments sera toujours moindre qu'un hémisphère, et l'autre sera une sphère entière. Enfin si $b > 2a$, il n'y aura qu'une seule solution, et le segment sera moindre qu'un hémisphère.

Les cas de $b = 2a$ et de $b = a\sqrt[4]{32}$ sont les seuls où la résolution du problème puisse s'effectuer avec la règle et le compas, puisque l'équation [13] est du troisième degré et n'est pas réductible au second (30) : il faudra donc, en général, *mesurer effectivement* les rayons du cercle et de la sphère donnés, et, après avoir remplacé dans l'équation [13] a et b par leurs valeurs numériques, résoudre cette équation. Supposons, par exemple, que $a = 6$ centimètres et que b en vaille 11, on verra facilement que ces valeurs satisfont à la condition [14], et qu'ainsi l'équation

$$h^3 - 181,5.h + 864 = 0$$

a deux racines réelles positives. Ces racines sont (*Alg.*, **667**)

$$H = 5,949, \quad \text{d'où} \quad r' = 9,253;$$
$$H' = 9,642, \quad \text{d'où} \quad r'' = 5,294.$$

Ainsi, en construisant deux segments sphériques dont l'un ait $92^{mm},5$ de rayon et $59^{mm},5$ de hauteur, et dont l'autre ait $52^{mm},9$ de rayon et $96^{mm},4$ de hauteur, on résoudra également le problème.

Nous donnerons plus loin (64) une méthode générale pour construire graphiquement les racines des équations de degré quelconque, et par conséquent pour résoudre le problème précédent, sans qu'il soit besoin de connaître les valeurs numériques de a et de b : toutefois nous devons observer que les constructions géométriques ne doivent jamais être regardées que comme un moyen plus ou moins élégant de représenter les solutions des problèmes, de sorte que, quand on voudra obtenir les inconnues avec une grande approximation, il faudra toujours préférer les méthodes analytiques, parce que le calcul est susceptible d'une exactitude indéfinie, tandis que les constructions graphiques ne donnent souvent que des résultats grossièrement approchés, surtout si elles ne sont pas très-simples.

42. Problème I. *Inscrire dans un triangle un rectangle dont l'aire soit égale à* m^2. — *Le problème admet-il en effet deux solutions?* — *Le prouver.* — *Quelle est l'aire du rectangle* maximum? — *Construire ce rectangle.* — *Quel est le rapport de cette aire* maximum *à celle du triangle?* — *Ce rectangle sera-t-il un carré?* — *Quand cela aura-t-il lieu?*

II. *Construire un triangle dont la base est à la hauteur* $:: p : q$, *et qui soit tel que l'aire du plus grand rectangle qu'on puisse y inscrire égale* m^2.

III. *Construire un carré tel que si on augmente un de ses côtés de* a, *que l'on diminue le côté adjacent de* b, *l'aire du rectangle ainsi déterminé soit à celle du carré* $:: p : q$. — *Quelle longueur faut-il donner au côté de ce carré pour que le rapport* $\frac{p}{q}$ *soit un* maximum *ou un* minimum?

IV. *Couper un tronc de cône à bases parallèles en deux parties équivalentes par un plan parallèle à ces bases.* — *Discuter l'équation qui donne la distance du plan sécant à la grande base.*

V. *Trouver, sur le diamètre* AB *d'un demi-cercle un* Fig. 12.
point D, *tel qu'en élevant par ce point la perpendicu-*

laire DC *à ce diamètre, le volume du segment sphérique engendré par* AMCD, *lorsqu'on fera tourner la figure autour de* AB, *soit à celui du cône décrit par le triangle* CDO *dans le rapport de* p *à* q. — *Discussion.* — *Effectuer la construction pour le cas où* p = q.

VI. *Étant donné un cercle sur une sphère, tracer un second cercle parallèle au premier, comprenant avec lui une tranche qui soit dans le rapport* $\frac{p}{q}$ *avec le cône dont le sommet serait au centre du premier cercle, et qui aurait le second pour base.* — *Examiner le cas où* q = p; — *on fera la construction pour le cas où* q = 3p.

Fig. 12. VII. *Trouver, sur le diamètre* AB *d'un demi-cercle, un point* D *tel qu'en élevant par ce point une perpendiculaire* DC *à ce diamètre, le volume du segment sphérique engendré par* AMCD *tournant autour de* AD *soit à celui du cône engendré par le triangle* ADC *tournant autour de* CD *dans le rapport* p : q. — *Y a-t-il deux solutions?* — *Dans quel cas le rapport* $\frac{p}{q}$ *sera-t-il* minimum? — *Construire le point* D *correspondant à ce minimum.* — *Quel est alors le rapport du volume du segment à celui de la sphère?*

VIII. *Par un point donné sur le plan de deux droites indéfinies, mener une sécante telle que l'aire du triangle intercepté égale* m^2. — *Discussion.*

IX. *Construire sur un cercle donné un cône tel que le volume de la sphère inscrite soit la* $n^{ième}$ *partie du sien.* — *Discussion.* — *Dans quel cas le volume de la sphère sera-t-il* maximum?

X. *Circonscrire à une sphère donnée un cône tel que son aire totale soit égale à celle d'un cercle donné.* — *Dans quel cas cette aire sera-t-elle* minimum?

XI. *Connaissant le périmètre d'un triangle et les rayons des cercles inscrit et circonscrit, calculer les côtés.* — *Quelles relations faut-il établir entre les données pour que le triangle soit équilatéral?* — *pour qu'il soit isocèle?* — *pour qu'il soit rectangle?*

CHAPITRE II.

DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

---

§ I. Théorie des coordonnées.

43. En appliquant la méthode que nous avons développée dans le chapitre précédent à toutes les questions de géométrie où l'on n'aura à considérer que des lignes droites ou des circonférences, des surfaces planes, cylindriques, coniques ou sphériques, on parviendra toujours à résoudre ces questions. Mais on comprend que la *science de l'étendue figurée* ne doit pas borner ses spéculations aux lignes et aux surfaces dont nous venons de parler, et qu'elle doit au contraire les étendre à toutes les lignes et à toutes les surfaces courbes qui sont susceptibles d'une définition précise. Le domaine de la géométrie, considérée sous ce point vue général, n'a donc point de limites, et par conséquent l'objet qu'on peut se proposer dans l'exposition de cette science consiste à faire connaître les méthodes générales qu'il convient de suivre pour découvrir toutes les propriétés d'une ligne ou d'une surface courbe donnée, c'est-à-dire pour effectuer sur cette ligne ou sur cette surface le travail que l'on a fait dans les *éléments* sur la circonférence de cercle ou sur la surface sphérique. C'est à DESCARTES qu'appartient l'honneur d'avoir posé les fondements de cette *géométrie générale,* et d'avoir ainsi ouvert à NEWTON la voie qui devait le conduire à la découverte de la pesanteur universelle. Les géomètres qui l'ont suivi, tels qu'EULER et CLAIRAULT, ont continué glorieusement l'œuvre que ce grand homme avait commencée ; mais il était réservé à notre illustre MONGE de couronner l'édifice, en créant une théorie complète des surfaces et des lignes à double courbure. Cette théorie est fondée sur l'emploi de la plus haute analyse, à laquelle elle a fourni elle-même des procédés nouveaux et d'importants perfectionnements. Notre but, dans cet ouvrage, est beaucoup plus

restreint : nous nous proposons seulement de développer les méthodes générales que fournit l'algèbre pour mener des *tangentes* aux courbes planes, déterminer leurs *asymptotes rectilignes*, leurs *centres*, leurs *lignes diamétrales* et leurs *points singuliers*, et enfin de faire une application spéciale de ces méthodes à l'étude des propriétés des *courbes du second ordre* ou des *sections coniques*, comme les appelaient les anciens. Nous terminerons par la théorie du plan et de la ligne droite considérée dans l'espace.

44. La première question que se proposa *Descartes*, quand il voulut appliquer le calcul à l'étude de la géométrie générale, fut de *déterminer par des nombres la position d'un point sur un plan*; car on conçoit qu'il sera possible d'en déduire les moyens d'y fixer la situation d'une ligne, puisqu'on peut la considérer comme le *lieu* des positions successives qu'aurait occupées sur ce plan un point assujetti à s'y mouvoir suivant des lois connues.

Fig. 13. Supposons que l'on ait tracé sur un plan deux droites Yy et Xx, faisant d'ailleurs entre elles un angle quelconque, et qu'on sache qu'un certain point de ce plan se trouve, par exemple, à *un centimètre* de la première et à *deux* de la seconde, ces distances étant mesurées sur des parallèles aux droites respectives Xx et Yy. Il suit immédiatement de la première de ces deux conditions, que si l'on prend sur Xx deux distances OA et OA′ égales à un centimètre, et que par les points A et A′ on mène des parallèles à Yy, notre point sera un de ceux de ces deux parallèles; car leur système est le lieu géométrique de tous les points qui sont à un centimètre de Yy. En vertu de la seconde condition, si l'on prend sur Yy deux distances OB et OB′ égales chacune à deux centimètres, et que par les points B et B′ on tire des parallèles à Xx, le point demandé devra appartenir aussi à l'une ou à l'autre de ces deux parallèles; donc il devra être l'un quelconque des quatre points où elles sont coupées par les parallèles à Yy, de sorte qu'il faut encore quelques conditions particulières pour achever de déterminer notre point. Si l'on sait, par exemple, qu'il doit être à droite ou à gauche de Yy, au-dessus ou au-dessous de Xx, au lieu de deux parallèles à chacune de ces droites, on n'en mènera plus alors qu'une seule, et notre point, devant se trouver à l'intersection

de deux droites connues, sera par conséquent entièrement déterminé.

Pour indiquer dans quel sens les distances de notre point aux droites Yy et Xx doivent être prises, nous conviendrons, conformément aux conventions faites sur l'interprétation géométrique des signes $+$ et $-$ placés devant des quantités isolées (**34**), de regarder comme positives les distances mesurées sur Xx à droite de Yy, et comme négatives celles qui seront mesurées dans le sens contraire. De même les distances à Xx seront affectées du signe $+$ ou du signe $-$, selon qu'on les comptera sur Yy en allant dans le sens OY ou dans le sens Oy.

45. Les distances respectives d'un point aux droites Yy et Xx s'appellent l'*abscisse* et l'*ordonnée* de ce point. On désigne ordinairement la première par la lettre x et la seconde par la lettre y, de sorte que l'abscisse du point M' est $x = -1^{c.m}$ et que son ordonnée est $y = +2^{c.m}$. En conséquence, la droite Yy se nomme l'*axe* des ordonnées ou des y, et la droite Xx est dite l'*axe* des abscisses ou des x, et comme *Descartes* a donné le nom commun de *coordonnées* aux quantités géométriques qui servent à fixer la position d'un point sur un plan, on appelle les droites Xx et Yy les *axes* des coordonnées. Le point O où ces axes se croisent est dit l'*origine* des coordonnées ou simplement l'origine.

D'après cela, pour construire le point $(1, -2)$, c'est-à-dire le point qui a 1 pour abscisse et -2 pour ordonnée *, nous prendrons sur l'axe des abscisses positives une distance $OA = 1$ unité, sur Oy une distance OB' égale à 2 unités, puis nous décrirons des points A et B' comme centre et avec des rayons égaux respectivement à OB' et à OA deux arcs de cercle, et le point M''' ainsi déterminé par leur intersection sera le point demandé.

On verra de même que M'' est le point $(-1, -2)$.

46. Nous avons dit plus haut que les droites Yy et Xx se coupaient sous un angle quelconque, mais le plus souvent on trace ces droites perpendiculairement l'une sur l'autre : dans

* Nous conviendrons que le symbole (a, b) désignera le point dont l'abscisse et l'ordonnée sont respectivement a et b, et l'abcisse sera toujours écrite la première.

ce cas, les coordonnées d'un point sont les *véritables* distances de ce point aux axes Yy et Xx.

47. On conçoit facilement qu'autant on peut imaginer de constructions différentes pour fixer la position d'un point sur un plan, autant il y a de systèmes de coordonnées distincts ; qu'ainsi, par exemple, la situation d'un point sur un plan pourra être déterminée par ses distances à deux points
Fig. 14. fixes A et B de ce plan, pourvu que l'on indique en outre de quel côté il est situé par rapport à la droite AB ; ou par les angles que font avec la droite indéfinie AB les droites qui le joignent aux points A et B, ces angles étant comptés dans le même sens, de droite à gauche, à partir du point X, par exemple, etc., etc. Mais, parmi tous ces différents systèmes de coordonnées, le plus usité, après celui dont nous avons parlé d'abord (**44**), est le suivant, auquel on a donné le nom de *système de coordonnées polaires*. Supposons que l'on ait
Fig. 15. tracé sur un plan, à partir d'un point fixe O, une droite OV : si l'on se donne la distance ρ d'un certain point au *pôle* O, distance que l'on appelle le *rayon vecteur* de ce point, et l'angle ω que ce rayon vecteur fait avec l'*axe polaire* OV, la position du point dont il s'agit sera complétement déterminée. En effet, si l'on fait au point O et avec OV l'angle AOV égal à ω, le point demandé sera un de ceux de la droite OA. D'un autre côté, puisqu'il doit être à une distance ρ du pôle, il n'y aura qu'à porter sur la droite indéfinie OA une distance OM égale à ρ, et le point M ainsi obtenu sera le point $(\omega,\ \rho)$, c'est-à-dire le point qui a ω et ρ pour coordonnées polaires. Pour que les coordonnées polaires ω et ρ puissent déterminer tous les points du plan, il faut et il suffit que ω puisse varier depuis $0°$ jusqu'à $360°$ et ρ depuis zéro jusqu'à l'infini positif.

Veut-on construire le point $(247°,\ 1^{c.m},5)$, c'est-à-dire le point déterminé par un angle de $247°$ et par un rayon vecteur égal à $1^{c.m},5$, on fera au point O avec OV un angle A'OV de $247°$, puis on prendra sur OA' une distance de $1^{c.m},5$, et le point M' ainsi obtenu sera le point demandé.

§ II. Lieux géométriques des équations.

48. Concevons maintenant une ligne quelconque RS tracée sur un plan, et sur ce plan les axes des coordonnées Xx et Yy : il est facile de voir que, si l'on prend sur l'axe des x une abscisse quelconque OP, l'ordonnée du point de la courbe qui a OP pour abscisse sera déterminée ; car il suffira, pour l'obtenir, de mener par le point P une parallèle à l'axe des y, et la partie PM de cette parallèle comprise entre l'axe des abscisses et la courbe sera l'ordonnée du point M. Ainsi, l'ordonnée d'un point quelconque de la ligne RS est une *fonction* déterminée de l'abscisse de ce point, et réciproquement. Si *cette fonction est constante*, c'est-à-dire si la ligne proposée est telle que, pour obtenir l'ordonnée d'un de ses points, il faille faire sur son abscisse les mêmes opérations qu'on a dû effectuer sur l'abscisse de tout autre point pour avoir son ordonnée, l'équation qui exprimera la relation qui a lieu ainsi entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la ligne est ce que *Descartes* a appelé *l'équation de cette ligne*. Fig. 16

On dit donc que *l'équation d'une ligne est l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées de chacun de ses points*. Cette équation doit être, comme on voit, l'expression analytique de la loi suivant laquelle se succèdent les différents points de la ligne que l'on considère, de sorte que, dès que l'on connaîtra la *définition géométrique* de cette ligne, ou, ce qui revient au même, l'une quelconque des propriétés qui la *caractérisent*, il sera possible d'obtenir son équation. Mais on ne pourrait pas représenter par une équation le trait que la main trace sur une feuille de papier, parce que l'on ignore entièrement la loi de sa génération.

49. *Descartes* ne s'est pas borné à représenter ainsi les lignes par des équations ; il a montré que réciproquement *toute équation* $\varphi(x, y) = 0$ *entre deux variables représente* EN GÉNÉRAL *une ligne, lorsque l'on regarde l'une de ces variables comme l'abscisse et l'uatre comme l'ordonnée d'un même point*. Supposons, en effet, que l'on ait résolu cette équation par rapport à l'une des deux inconnues y, par exemple, et qu'on en ait tiré différentes valeurs

$$y = \psi(x),\quad y = \pi(x),\quad y = \chi(x),\ \ldots$$

Considérons la première $y=\psi(x)$ et donnons à x différentes valeurs α, α', α'', α''', ...; on en déduira des valeurs correspondantes β, β', β'', β''', ... pour y. Construisons maintenant les points M, M', M'', M''',.... (45) qui ont pour coordonnées tous ces couples

$$\left.\begin{matrix}x=\alpha\\ y=\beta\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=\alpha'\\ y=\beta'\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=\alpha''\\ y=\beta''\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=\alpha'''\\ y=\beta'''\end{matrix}\right\},\ldots$$

et joignons chaque point avec le suivant par une ligne droite; Fig. 16. nous formerons ainsi une ligne brisée MM'M''M''' ...., dont les côtés seront d'autant plus petits que les valeurs données à x différeront moins les unes des autres. Mais il est évident que si, au lieu d'assigner à x des valeurs séparées par des intervalles finis, nous faisons croître cette variable d'une manière continue, y variera aussi d'une manière continue*, de sorte que les côtés de notre ligne brisée deviendront infiniment petits, et que tous ses sommets M, M', M'', M''', ... seront alors contigus; donc, dans ce cas, la ligne brisée MM'M''M'''...., dégénérera en une *ligne courbe*, dont les points ont pour coordonnées tous les couples de valeurs de x et de y qui vérifient l'équation $y=\psi(x)$, si l'on a fait croître x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. On en dirait autant des autres équations $y=\pi(x)$, $y=\chi(x)$.... Or, en faisant ainsi croître x d'une manière continue, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on obtient tous les couples de valeurs de x et de y qui peuvent satisfaire à l'équation proposée; donc *une équation entre deux variables* x *et* y *représente une ligne qui est le* LIEU GÉOMÉTRIQUE *des points qui ont pour coordonnées tous les couples de valeurs de* x *et de* y *qui peuvent vérifier cette équation*.

Les lieux respectifs des équations partielles $y=\psi(x)$, $y=\pi(x)$, $y=\chi(x)$,.... sont appelés les *branches* de la courbe représentée par l'équation $\varphi(x,y)=0$.

50. On sent qu'il est impossible de *construire* tous les points déterminés par les différents couples de valeurs de x et de y qui satisfont à une équation donnée; car on ne saurait assigner à l'une des variables des valeurs qui ne fussent

* Nous supposons *expressément* que, lorsque x varie d'une manière continue, la fonction $\psi(x)$ varie de la même manière.

pas discontinues; mais on pourra toujours construire un certain nombre de ces points, et il ne restera plus qu'à les unir par un trait continu, pour avoir ainsi une ligne qui différera d'autant moins du lieu de l'équation proposée que les points que l'on aura déterminés directement seront plus rapprochés et plus nombreux.

Prenons pour exemple l'équation

$$900y^2-30x^3+x^4=0,$$

supposons que l'unité linéaire soit le millimètre, et que les axes Yy et Xx auxquels sont rapportés les points de son lieu géométrique soient rectangulaires. On en tire

$$y=\pm\frac{x}{30}\sqrt{x(30-x)}.$$

Cette expression nous montre qu'à une même valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires, de sorte que pour avoir les points correspondants à une certaine abscisse OP, il faudra mener par le point P une parallèle à l'axe des y, et prendre sur cette parallèle, à partir du point P, deux distances PM et PM′ égales à la valeur de y qui correspond à celle que l'on aura donnée à x. Ainsi l'axe des abscisses partage la courbe en deux parties parfaitement symétriques. Cela posé, on voit encore, à l'inspection de la formule précédente, que si l'on donne à x des valeurs négatives, ou des valeurs positives plus grandes que 30 millimètres, les valeurs correspondantes de y seront constamment imaginaires, de sorte que le lieu de l'équation proposée est compris entre l'axe des ordonnées et la parallèle à cet axe qui en est distante de 30 millimètres. Partageons donc cet intervalle en un certain nombre de parties égales, en dix, par exemple, et donnons à x les valeurs Fig. 17.

0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30,

il en résultera pour y les valeurs correspondantes

0; 0,3; 2,4; 4,1; 5,9; 7,5; 8,8; 9,7; 9,6; 8,1; 0.

Comme la différence des deux dernières ordonnées $8^{mm},1$ et 0, est fort grande, nous allons donner à x des valeurs intermédiaires entre 27 millimètres et 30 millimètres. Nous supposerons

$$x=28 \quad \text{et} \quad x=29,$$

et nous trouverons

$$y=6,9 \quad \text{et} \quad y=5,2.$$

Ainsi la courbe part de l'origine, s'éloigne lentement de l'axe des abscisses jusqu'à $9^{mm},7$ environ de cet axe, et s'en rapproche ensuite rapidement pour venir le couper à 30 millimètres de l'origine. En construisant les points qui ont pour abscisses et pour ordonnées tous les couples de valeurs que nous venons de trouver, et en unissant ces points par un trait continu, on aura une courbe qui représentera assez exactement le lieu de l'équation proposée.

51. Il arrive très-souvent que l'on n'a pas besoin de tracer *exactement* la courbe représentée par une équation donnée $\varphi(x,y)=0$, et qu'il suffit d'*acquérir une idée de la forme générale de cette courbe et de sa position par rapport aux axes des coordonnées*. On atteint assez facilement ce but, lorsque l'équation $\varphi(x,y)=0$ peut être résolue par rapport à l'une des variables qu'elle renferme. Supposons, en effet, que l'on en ait tiré les valeurs suivantes de y,

$$y=\psi(x), \quad y=\pi(x), \quad y=\chi(x), \ldots..$$

$\psi(x)$, $\pi(x)$, $\chi(x)$... étant des fonctions connues de x. La question sera réduite à reconnaître le cours de chacune des branches représentées par ces équations partielles, et on y parviendra en supposant que x croisse *d'une manière continue* depuis zéro jusqu'à $+\infty$ et depuis zéro jusqu'à $-\infty$, et en examinant avec soin comment varieront, dans les mêmes circonstances, les fonctions $\psi(x)$, $\pi(x)$, $\chi(x)$..., c'est-à-dire les ordonnées correspondantes aux abscisses que l'on considère.

Si l'on trouve, par exemple, que $\psi(x)$ devient infinie pour une certaine valeur de x, ou que cette fonction ne cesse pas d'être réelle lorsque l'on donnera à x des valeurs croissantes au delà de toute limite, on en conclura que le cours de la première branche est infini, puisqu'elle s'éloignera indéfiniment de l'un des axes des coordonnées ou de tous les deux à la fois.

Si, pour toutes les valeurs de x comprises entre certaines limites, $\psi(x)$ devient imaginaire, ce sera un signe que la branche $y=\psi(x)$ est *discontinue*, c'est-à-dire composée de parties séparées; et si, à partir d'une certaine valeur de x

positive ou négative, $\psi(x)$ reste constamment imaginaire, la branche dont il s'agit sera limitée dans le sens des abscisses positives ou des abscisses négatives.

52. Prenons pour exemple l'équation $x^3-y=0$. On en tire $y=x^3$, et comme y n'aura qu'une seule valeur, pour chaque valeur donnée à x, il en résulte que la courbe cherchée n'a qu'une seule branche. Si on suppose $x=0$, on aura $y=0$; ainsi la courbe passe par l'origine. Si on fait croître x depuis zéro jusqu'à $+1$, y augmentera, mais *très-lentement*, depuis zéro jusqu'à l'unité ; car les puissances d'une fraction sont toujours moindres que cette fraction. Donc, la courbe partie de l'origine s'élèvera peu à peu au-dessus de l'axe des x en s'éloignant de celui des y, et elle viendra passer par le point M dont les deux coordonnées sont égales à $+1$. Si x Fig. 18. continue d'augmenter, y augmentera encore mais *très-rapidement*, et pour $x=\infty$ on aura aussi $y=\infty$; donc, à partir du point M, la courbe s'élèvera fort vite au-dessus de l'axe des x, et s'étendra à des distances infinies des deux axes coordonnés, dans l'angle YOX.

Il faut maintenant donner des valeurs négatives à x ; mais je remarque que l'équation proposée ne changeant pas lorsqu'on y remplace x et y par $-x$ et par $-y$, il en résulte que si N est un point trouvé précédemment, il n'y aura qu'à prolonger la droite NO d'une quantité ON$'$=ON, et le point N$'$ appartiendra à la courbe, puisque l'égalité des triangles ONP et ON$'$P$'$ prouve que les coordonnées du point N$'$ sont égales et de signes contraires à celles du point N, et que par conséquent elles vérifient l'équation proposée $x^3-y=0$. Ainsi, pour construire la partie de la courbe qui s'étend à gauche de l'axe des y, il suffira de joindre chaque point de la branche positive à l'origine par une droite que l'on prolongera d'une quantité égale à elle-même. En conséquence, le point O est ce que nous avons appelé un *centre* dans nos Éléments de géométrie (**180**). T$'$OT est à peu près le lieu de l'équation $x^3-y=0$.

53. Si l'équation proposée ne renferme qu'une seule variable x, comme l'équation

$$\varphi(x)=0,$$

on observera qu'en la supposant du degré m, elle sera décom-

posable en m facteurs du premier degré $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$,.... $(x-k)$, de sorte que toutes les solutions de cette équation seront données par les équations partielles

$$x-a=0,\ x-b=0,\ x-c=0, \dots\ x-k=0.$$

Or, tous les points, dont les coordonnées vérifient l'équation $x-a=0$, ont a pour abscisse, si cette quantité a est réelle; donc ils sont tous situés sur une parallèle menée à l'axe des y à la distance a de cet axe; donc, cette parallèle est le lieu de l'équation $x-a=0$. Par conséquent, si l'on construit les points déterminés par tous les couples de valeurs de x et de y qui vérifient l'équation $\varphi(x)=0$, on trouvera autant de parallèles à l'axe des y que cette équation a de racines réelles et inégales; donc on peut dire que le lieu de cette équation est le système de toutes ces parallèles.

54. Tout ce que nous venons de dire d'une équation entre deux variables, qui représentent les coordonnées rectilignes d'un même point, s'appliquerait encore au cas où ces variables désigneraient toutes autres coordonnées d'un point; ainsi une équation $\varphi(\omega,\rho)=0$, dans laquelle ρ désigne le rayon vecteur d'un point et ω l'angle que ce rayon vecteur fait avec l'axe polaire, représente en général une ligne.

De même l'équation

$$\varphi(\rho)=0=(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)\dots(\rho-k)$$

représente autant de *circonférences concentriques* qu'elle a de racines réelles et inégales; car on voit facilement que le lieu de l'équation $\rho-a=0$ est une circonférence décrite du pôle comme centre avec le rayon a, puisque les points dont les coordonnées polaires vérifient cette équation sont tous situés à la distance a du pôle.

Par une raison semblable, l'équation $\varphi(\omega)=0$ représente autant de droites issues du pôle qu'elle a de racines réelles et inégales. Ainsi l'équation $\sin\omega=\frac{1}{2}$ représente deux droites qui partant du pôle font avec l'axe polaire des angles respectifs de 30° et de 150°.

55. *Descartes* avait appelé *courbes géométriques* celles dont l'équation en coordonnées rectilignes était *algébrique*, c'est-à-dire, dans laquelle les deux variables n'entraient ni

comme exposants, ni sous aucun des signes logarithmiques ou trigonométriques, et il avait donné le nom de *courbes mécaniques* à toutes les autres lignes. *Leibnitz* a substitué à ces dénominations celles de courbes *algébriques* et de courbes *transcendantes*, qui ont été adoptées par tous les géomètres; car elles ont l'avantage d'exprimer quelle est la nature de la fonction que l'on considère. Nous ne nous occuperons en général que des courbes algébriques, et nous les supposerons rapportées à deux axes rectilignes.

86. On est convenu de classer les courbes algébriques en différents ordres, d'après le degré de leur équation; ainsi l'équation du premier degré représente une ligne du premier ordre; celle du second degré une ligne du second ordre, et ainsi de suite.

Remarquons, toutefois, que cette classification suppose ce principe, que nous démontrerons plus tard, savoir : que *le degré de l'équation d'une courbe est indépendant du système d'axes coordonnés auxquels on la rapporte* (**102**).

87. Il est important d'observer *qu'une équation à deux indéterminées ne représente pas nécessairement une courbe de l'ordre indiqué par son degré, mais qu'elle peut représenter un système de lignes d'un ordre inférieur,* et même ne représenter que des lignes du premier ordre. En effet, soit $A=0$ cette équation, et supposons que son premier membre soit décomposable en deux facteurs *rationnels* B et C: il est évident que les solutions de l'équation $A=0$ sont les mêmes que celles des deux équations partielles $B=0$ et $C=0$; de sorte que le lieu de cette équation $A=0$ est celui de tous les points dont les coordonnées vérifient *séparément* les équations $B=0$ et $C=0$; mais chacune de ces équations représente une certaine ligne; donc le lieu de l'équation proposée est le système de ces deux lignes. Ainsi l'équation $(y+ax+b)(y^2-cx)=0$ représente une ligne du premier ordre et une du second. Enfin, si le premier membre de l'équation proposée $A=0$ était décomposable en facteurs rationnels du premier degré, le lieu de cette équation serait le système d'autant de lignes du premier ordre qu'il y aurait de ces facteurs réels et différents. Telle est l'équation $y^3-x^2y+y^2+xy=0$; car elle revient à $y(y+x)(y-x+1)=0$; et ainsi elle représente trois lignes du premier ordre.

L'équation *homogène* $y^m + a_1 x y^{m-1} + a_2 x^2 y^{m-2} + \ldots + a_m x^m = 0$ représente le système d'autant de lignes du premier ordre, qui passent par l'origine, que l'équation numérique $z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_m = 0$, à laquelle on la ramène, en posant $y = zx$, a de racines réelles et inégales; car, en désignant par β_1, β_2, $\beta_3 \ldots \beta_m$ les racines de cette dernière équation, on pourra mettre la proposée sous la forme

$$(y - \beta_1 x)(y - \beta_2 x)(y - \beta_3 x) \ldots (y - \beta_m x) = 0.$$

58. Il suit immédiatement de là que, *pour représenter plusieurs lignes par une même équation, il n'y a qu'à multiplier leurs équations membre à membre, après avoir transposé tous les termes de chacune d'elles dans son premier membre*. Ainsi les lignes que construisent les deux équations $A = B$ et $C = D$ seront représentées par la seule équation $(A - B)(C - D) = 0$.

59. Il est bon de remarquer que si l'on avait multiplié, membre à membre, les deux équations $A = B$ et $C = D$, l'équation résultante $AC = BD$ n'aurait pas représenté les lieux de ces deux équations, mais seulement une courbe passant par leurs points d'intersection. En effet, tout couple de valeurs de x et de y, qui vérifie les équations $A = B$ et $C = D$, satisfait nécessairement à l'équation $AC = BD$: mais le point qui a ces valeurs de x et de y pour coordonnées appartient nécessairement à chacune des courbes représentées par ces trois équations (49); donc le lieu de l'équation $AC = BD$ passe par les points d'intersection des courbes $A = B$ et $C = D$.

Le lieu de l'équation formée de toute autre combinaison des équations $A = B$ et $C = D$ jouirait de la même propriété.

60. *Une équation à deux indéterminées peut ne représenter qu'un système de points isolés, et même ne rien représenter*. Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ne représente rien; car il n'existe aucun couple de valeurs de x et de y qui puisse vérifier cette équation; mais le lieu de l'équation

$$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = 0$$

est le système de quatre points. En effet, on ne peut satisfaire à cette équation qu'en posant *simultanément*

$$x^2 - a^2 = 0 \quad \text{et} \quad y^2 - b^2 = 0,$$

puisque la somme de plusieurs carrés ne peut être nulle qu'autant que chacun d'eux est nul en particulier. On tire de ces deux équations

$$x = \pm a \quad \text{et} \quad y = \pm b,$$

d'où résultent les quatre couples

$$\left.\begin{matrix} x=a \\ y=b \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=a \\ y=-b \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=-a \\ y=b \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=-a \\ y=-b \end{matrix}\right\},$$

et les quatre seuls couples de valeurs de x et de y qui puissent vérifier l'équation proposée. Donc, le lieu de cette équation est le système des quatre points qui ont pour coordonnées ces quatre couples de valeurs.

61. Il suit de là et du n° **58** que, pour former une équation qui représente plusieurs points isolés, dont on connaît les coordonnées, il n'y a qu'à représenter chacun d'eux par une équation de la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0,$$

et multiplier ces équations membre à membre. Ainsi, les points (1,2), (—1,2) sont le lieu de l'équation

$$[(x-1)^2+(y-2)^2].[(x+1)^2+(y-2)^2]=0.$$

§ III. Équations des lieux géométriques.

62. Lorsque deux lignes quelconques se coupent, elles ont à leurs points d'intersection mêmes coordonnées, de sorte que leurs équations seront satisfaites lorsque l'on y remplacera x et y par les coordonnées de ces points; ainsi, les équations de deux lignes doivent admettre autant de solutions communes que ces lignes ont de points communs, et réciproquement; car il est évident que les deux lignes doivent passer par les points qui ont pour coordonnées les divers couples de valeurs de x et de y qui vérifient leurs équations. Il suit de là que, *pour trouver les coordonnées des points d'intersection de deux lignes, il faut chercher toutes les solutions communes à leurs équations*. Ainsi, l'équation finale résultant de l'élimination de y, par exemple, entre ces équations, aura pour racines les abscisses des points d'intersection des deux lignes.

EXEMPLE. *Trouver les coordonnées des points d'intersection des courbes qui ont pour équations*

$$y^2-4x=0 \quad \text{et} \quad y^2+x^2-9x+4=0.$$

En éliminant y^2 entre ces équations, on trouvera

$$x^2-5x+4=0,$$

d'où $x=1$ et $x=4$. En substituant ces valeurs dans la première des équations proposées, on trouvera $y=\pm2$ et $y=\pm4$, de sorte que les deux courbes se coupent aux *quatre* points

$$(1,2),\ (1,-2),\ (4,4) \text{ et } (4,-4).$$

63. Il suit de là qu'*une ligne du premier ordre* (nous verrons bientôt que c'est une droite) *ne peut rencontrer une courbe de l'ordre* m *en plus de* m *points*; car l'équation finale, qu'on obtiendra en éliminant y entre les équations de ces deux lignes, étant du degré m, ne donnera pas plus de m valeurs réelles pour x, et à chacune d'elles correspondra seulement une pareille valeur de y.

64. Lorsque la solution d'un problème de géométrie dépend de la connaissance d'un point, on peut prendre pour inconnues les coordonnées x et y de ce point, et alors, après avoir mis le problème en équation, et éliminé les inconnues auxiliaires, si l'on en a employé, on arrivera nécessairement à deux équations $\varphi(x,y)=0$ et $\psi(x,y)=0$, où il n'y aura d'inconnues que les deux coordonnées du point dont il s'agit, si le problème est déterminé. Alors, au lieu de résoudre ces deux équations, il sera beaucoup plus élégant de regarder, dans chacune d'elles, les deux inconnues x et y comme des coordonnées *courantes*, c'est-à-dire, comme désignant les coordonnées d'un même point, et de construire les lieux ainsi représentés par ces équations; leurs points d'intersection seront les différentes solutions de la question proposée, puisqu'ils auront pour coordonnées les différents couples de valeurs de x et de y qui vérifient les équations du problème. Si donc les deux lieux ne se coupent qu'en un point, la question n'admettra qu'une solution, et elle sera impossible, s'ils ne se rencontrent pas *.

* Si les inconnues d'un problème sont deux lignes droites, on n'aura encore qu'à tracer les lieux géométriques des équations qui les détermi-

Observons que si l'on peut substituer au système des deux équations dont on devra construire les lieux géométriques un système d'équations plus simples, il ne faudra jamais négliger de le faire.

65. Si le nombre des équations du problème est inférieur d'une unité à celui des inconnues, ces équations seront *indéterminées;* ainsi, pour chaque système de valeurs des inconnues auxiliaires t, z, u,.... on aura un ou plusieurs couples de valeurs de x et de y, ce qui déterminera un ou plusieurs points, qui seront autant de solutions de la question. On peut alors se proposer de *trouver l'équation du lieu de tous ces points*. Pour y parvenir, j'observe que, si on donne une valeur arbitraire à l'une quelconque t des variables auxiliaires t, z, u,..., on pourra résoudre les équations du problème, et les valeurs de x et de y qu'on en tirera seront les coordonnées d'un point du lieu. Or, si on élimine ces variables auxiliaires t, z, u,.... entre les équations de la question, on obtiendra une *équation finale* en x et en y, qui sera vérifiée par tous les couples et par les seuls couples de valeurs de x et de y, qui, conjointement avec certaines valeurs de ces variables, peuvent satisfaire à ces équations; mais ces couples de valeurs de x et de y sont, comme nous venons de le dire, les coordonnées de tous les points du lieu; donc cette équation finale est l'équation du lieu géométrique de tous les points qui satisfont au problème qu'on s'est proposé.

66. Nous allons donner quelques exemples de la recherche d'équations de lignes dont la définition est connue; mais auparavant nous résoudrons un problème qui nous sera fort utile dans la suite.

PROBLÈME. *Trouver l'expression de la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées, soit rectilignes, soit polaires.*

Supposant d'abord que les coordonnées soient rectilignes et qu'on les compte sur deux axes faisant entre eux l'angle θ,

---

sent, et, en tirant les coordonnées de leurs points d'intersection, on aura toutes les solutions de ce problème. Ainsi, dans la question du n° 40, on construira les lieux géométriques des équations [11] et [12], et les coordonnées de leurs points d'intersection seront les valeurs de r et de A.

Fig. 19. je commencerai par chercher la distance δ du point $M(x,y)$ à l'origine des coordonnées. Pour cela, je tire MP parallèlement à l'axe de y, et je forme ainsi un triangle OMP dans lequel on aura (*Trig.*, 55)

$$\overline{OM}^2=\overline{MP}^2+\overline{OP}^2-2MP.OP\cos OPM,$$

ou bien $$\delta^2=y^2+x^2+2xy\cos\theta \qquad [1].$$

Cette formule a été établie pour un cas très-particulier, celui où le point M est situé dans l'angle des coordonnées positives, néanmoins elle est générale et donnera toujours la distance du point M au point O, pourvu qu'on ait égard aux signes de ses coordonnées, comme il sera facile de le vérifier, en supposant que le point M se trouve successivement dans les angles YOx, XOy et xOy.

S'il s'agit, en effet, du point M', la considération du triangle OM'P' donnera

$$\delta^2=\overline{M'P'}^2+\overline{OP'}^2-2M'P'.OP'\cos\theta:$$

Or, on obtient cette égalité en faisant $x=-OP'$ et $y=M'P'$ dans la formule [1].

Veut-on actuellement trouver la distance des deux points Fig. 20. $M'(x',y')$ et $M''(x'',y'')$, on mènera par le point M' des parallèles aux axes des coordonnées et par le point M'' la parallèle M''Q à OY, de sorte qu'en prenant, pour un instant, les droites M'Q et M'R pour les axes des coordonnées, et désignant par x et par y ces nouvelles coordonnées M'Q et M''Q du point M'', on aura

$$\delta^2=y^2+x^2+2xy\cos\theta;$$

mais $y=y''-y'$ et $x=x''-x'$, quels que soient les signes et les grandeurs de x', y', x'' et y''; puis donc que l'équation [1] est générale, la formule

$$\delta^2=(y''-y')^2+(x''-x')^2+2(x''-x')(y''-y')\cos\theta \ [2],$$

que l'on obtiendra en remplaçant x et y par leurs valeurs le sera aussi.

Si l'on suppose que les axes des coordonnées soient rectangulaires, cos θ sera nul, et les deux formules précédentes se réduiront à

$$\delta^2=y^2+x^2 \qquad [3];$$
$$\delta^2=(y'-y'')^2+(x'-x'')^2 \qquad [4].$$

Il est très-important de retenir les quatre formules que nous venons de trouver.

67. Supposons maintenant que les points M′ et M″ soient déterminés par leurs coordonnées polaires (ω', ρ') et (ω'', ρ''). Le triangle M′OM″ nous donnera l'équation : Fig. 21.

$$\delta^2 = \rho'^2 + \rho''^2 - 2\rho'\rho'' \cos(\omega' - \omega'') \qquad [5],$$

formule qui reste invariable, quelles que soient les positions relatives des points M′ et M″ à l'égard de l'axe polaire, car $\cos(\omega' - \omega'') = \cos(\omega'' - \omega')$.

Si l'on suppose $\rho'' = 0$, la formule précédente deviendra $\delta = \rho'$, comme cela devait être, puisque le point M″ est venu coïncider avec le pôle.

Remarquons que dans les cinq formules que nous venons de trouver, δ représente une grandeur absolue, de sorte qu'en extrayant la racine carrée du second membre, il ne faudra affecter cette racine que du seul signe $+$.

68. Rien ne sera plus facile maintenant que de résoudre la question suivante :

Problème. *Trouver l'équation d'une circonférence de cercle, rapportée à des coordonnées rectilignes ou polaires.*

Cherchons-la d'abord en coordonnées rectilignes et obliques. Pour cela, désignons par (α, β) les coordonnées de son centre et par r son rayon, et appelons (x, y) les coordonnées d'un point quelconque de la circonférence. L'expression de la distance de ce point au centre sera, en vertu de la formule [2] du n° **66**,

$$\sqrt{(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 + 2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\theta};$$

mais cette distance doit être égale à r; donc

$$\sqrt{(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 + 2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\theta} = r,$$

ou, en élevant les deux membres de cette équation au carré,

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 + 2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\theta = r^2 \qquad [6].$$

Telle est l'équation de notre circonférence; car elle est l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe (**48**).

Si l'on suppose que les axes des coordonnées se coupent

à angles droits, $\cos\theta$ sera zéro, et l'équation précédente se réduira à

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2 \qquad [7].$$

Si le centre est sur l'axe des x et que la circonférence passe par l'origine, on aura $\beta=0$, et $\alpha=r$, de sorte que l'équation précédente deviendra

$$y^2+x^2-2rx=0 \qquad [8].$$

Cette équation manifeste plusieurs propriétés remarquables de la circonférence. En effet, on en tire

$$y=\pm\sqrt{x(2r-x)}:$$

ainsi, à une même valeur de x correspondent deux valeurs
Fig. 22. de y égales et de signes contraires : donc M'P=MP; donc l'axe des abscisses coupe en deux parties égales toutes les cordes parallèles à celui des y; donc, 1° *la perpendiculaire, abaissée du centre sur une corde, passe par le milieu de cette corde.*

Ensuite, l'équation précédente signifie que y est une moyenne proportionnelle entre x et $2r-x$; mais y est la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque M de la circonférence sur le diamètre OA, dont la direction coïncide avec l'axe des abscisses; x est la distance OP du pied de cette ordonnée à l'origine, qui est l'une des extrémités de ce diamètre, et $(2r-x)$ est la distance AP de ce pied à l'autre extrémité A de ce même diamètre : donc, 2° *la perpendiculaire, abaissée d'un point de la circonférence sur un diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.*

Enfin, on tire de l'équation [8]

$$y^2+x^2=2r.x,$$

ce qui signifie que $\sqrt{y^2+x^2}$ est moyenne proportionnelle entre x et $2r$; mais en vertu de la formule [3] du n° 66, $\sqrt{x^2+y^2}$ est la longueur de la corde OM, qui va de l'origine à un point quelconque M de la circonférence, x est la projection OP de cette corde sur l'axe des abscisses; donc, 3° *toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre mené par l'une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre.*

Enfin, si l'origine est placée au centre, α et β sont nuls, et l'équation [7] se réduit à

$$y^2+x^2=r^2 \qquad [9].$$

69. On peut de même démontrer très-simplement que *deux sécantes qui partent d'un même point sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, et que les parties de deux cordes qui se coupent sont inversement proportionnelles.*

Supposons, en effet, que l'on prenne le point O pour origine des coordonnées rectangulaires et la sécante OMM' pour axe des x, l'équation de la circonférence sera Fig. 23.

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-r^2=0,$$

et si l'on y fait $y=0$, l'équation résultante

$$x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2-r^2)=0$$

aura pour racines les abscisses OM et OM' des points d'intersection de l'axe des x, c'est-à-dire de la sécante OMM', avec la circonférence; donc

$$\text{OM}.\text{OM}'=\alpha^2+\beta^2-r^2:$$

or, $\alpha^2+\beta^2$ est le carré de la distance OC du centre à l'origine des coordonnées; donc le produit $\text{OM}.\text{OM}'=\overline{\text{OC}}^2-r^2$ est constant; donc $\text{OM}.\text{OM}'=\text{ON}.\text{ON}'$; donc, etc.

70. L'équation [6] du n° **68** nous montre que la circonférence est une ligne du second ordre; de là cette question : *A quels signes reconnaître qu'une équation du second degré à deux indéterminées représente une circonférence?*

Pour répondre à cette question, je considère l'équation générale du second degré à deux inconnues

$$\text{A}y^2+\text{B}xy+\text{C}x^2+\text{D}y+\text{E}x+\text{F}=0 \qquad [a],$$

et je suppose qu'elle représente une circonférence. Soient (α, β) les coordonnées de son centre, r son rayon, et θ l'angle des axes des coordonnées, cette circonférence aura aussi pour équation :

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\theta-r^2=0,$$

ou, en développant et en ordonnant,

$$y^2+2\cos\theta.xy+x^2-2(\beta+\alpha\cos\theta)y-2(\alpha+\beta\cos\theta)x$$
$$+(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-r^2)=0 \qquad [b].$$

Ainsi, pour que l'équation [a] puisse représenter une circonférence, il faut et il suffit que l'on puisse assigner aux quantités α, β et r, qui déterminent cette circonférence, des valeurs réelles et finies, telles que les équations [a] et [b] deviennent identiques. En conséquence, je divise tous les termes de l'équation [a] par A, et j'égale les coefficients de l'équation résultante aux coefficients des mêmes puissances de x et de y dans l'équation [b], ce qui me donne les cinq équations suivantes :

$$\frac{B}{A}=2\cos\theta,\quad \frac{C}{A}=1,\quad \frac{D}{A}=-2(\beta+\alpha\cos\theta),$$
$$\frac{E}{A}=-2(\alpha+\beta\cos\theta),\quad \frac{F}{A}=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-r^2.$$

Les deux premières sont indépendantes de α, β et r; ainsi elles expriment deux conditions *nécessaires* pour que l'équation [a] puisse représenter une circonférence. Les deux équations suivantes, étant du premier degré entre les deux inconnues α et β, déterminent pour ces quantités des valeurs

$$\beta=\frac{E\cos\theta-D}{2A\sin^2\theta},\qquad \alpha=\frac{D\cos\theta-E}{2A\sin^2\theta}$$

toujours réelles et finies; car A ne peut pas être nul, sans quoi B et C le seraient, en vertu des deux premières conditions, et alors l'équation [a] se réduirait au premier degré. Il ne reste donc plus qu'à voir si la cinquième équation donnera pour r une valeur réelle et finie. En conséquence, on y substituera à la place de α et de β les valeurs que nous venons de trouver, et on en déduira, après avoir fait les réductions,

$$r=\frac{1}{2A\sin\theta}\cdot\sqrt{D^2+E^2-2DE\cos\theta-4AF\sin^2\theta}.$$

Ainsi, pour que l'équation [a] représente une circonférence, il faut et il suffit que ses coefficients satisfassent aux trois conditions suivantes :

$$\frac{B}{2A}=\cos\theta,\ldots.\ A=C\ldots.\ D^2+E^2-2DE\cos\theta-4AF\sin^2\theta>0.$$

Si les axes des coordonnées se coupent à angles droits, on voit que B=0; donc *pour que l'équation générale du second degré représente une circonférence rapportée à des axes rectangulaires, il faut qu'elle ne renferme pas le*

produit des deux variables, que les coefficients de leurs carrés soient égaux, et que la condition

$$D^2+E^2-4AF>0$$

soit satisfaite.

71. Il suit de là que l'équation

$$Ay^2+Ax^2+Dy+Ex+F=0 \qquad [10]$$

représente une circonférence rapportée à des coordonnées rectangulaires, si $D^2+E^2-4AF>0$. Pour la construire, je divise tous ses termes par A, puis je complète les carrés dont y^2 et $\frac{D}{A}y$, x^2 et $\frac{E}{A}x$ sont les deux premiers termes, et je la mets ainsi sous la forme

$$\left(y+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(x+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}.$$

Or, le premier membre de cette équation exprime le carré de la distance du point (x,y) au point $\left(-\frac{E}{2A},-\frac{D}{2A}\right)$: donc elle signifie que le carré de cette distance est égal à la quantité positive et constante $\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$; donc elle représente une circonférence qui a pour rayon $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}$ et dont le centre a pour coordonnées $-\frac{E}{2A}$ et $-\frac{D}{2A}$. En conséquence, on prendra sur les axes des x et des y des distances $OA=-\frac{E}{2A}$, $OB=-\frac{D}{2A}$, on mènera par les points A et B Fig. 23.
des parallèles aux axes des ordonnées et des abscisses, et du point C où elles se coupent, avec un rayon égal à $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}$ on décrira une circonférence qui sera le lieu de l'équation [10].

Si $D^2+E^2-4AF=0$, ce cercle se réduit au point C, et si $D^2+E^2-4AF<0$, l'équation [10] ne représente plus rien.

Exemples. Construire les lieux des équations

$$\frac{x+2}{y}=\frac{4-y}{x};$$

$$y^2+y+x^2=0 \quad \text{et} \quad y^2+xy+x^2-2y+x+2=0:$$

les deux premières sont rapportées à des axes rectangulaires, la troisième à deux axes qui font un angle de 60°, et l'unité linéaire est le centimètre.

72. Cherchons actuellement l'équation polaire de la circonférence. Appelons α et β les coordonnées du centre C,
Fig. 21. ω et ρ celles d'un point quelconque M′ de cette circonférence, nous aurons, en vertu de l'équation [5] du n° 67,

$$\rho^2 - 2\beta\cos(\omega-\alpha)\rho + \beta^2 - r^2 = 0 \qquad [11]$$

pour l'équation demandée. Elle est du second degré, parce que la direction d'un rayon vecteur coupe en général la circonférence en deux points.

On peut tirer de cette équation plusieurs propriétés importantes de la circonférence.

En effet, le dernier terme de l'équation [11] est constant; donc le produit des deux racines l'est aussi; mais ces racines sont les distances du pôle aux points où la direction d'un rayon vecteur quelconque rencontre la circonférence; donc *deux sécantes qui partent d'un même point sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, et les parties de deux cordes qui se coupent sont réciproquement proportionnelles*.

Il est encore facile de prouver que *les angles inscrits dans un même arc sont égaux*. Pour le faire voir, plaçons le pôle sur la circonférence, en posant $\beta = r$, et l'équation [11] se réduira à

$$\rho - 2r\cos(\omega-\alpha) = 0 \qquad [12],$$

Fig. 25. de sorte que la longueur de la corde OA que la circonférence intercepte sur l'axe polaire est

$$OA = 2r\cos\alpha$$

(on l'obtient en faisant $\omega = 0$ dans l'équation précédente). D'après cela, si l'on joint AM, la propriété dont jouissent les côtés d'un triangle d'être proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés, nous donnera

$$\frac{\sin M}{\sin(\omega+M)} = \frac{2r\cos\alpha}{2r\cos(\omega-\alpha)}.$$

En chassant les dénominateurs, réduisant et transposant, il viendra

$$\cos(M+\alpha) = 0, \quad \text{d'où} \quad M = 90^\circ - \alpha;$$

donc l'angle OMA est le même en quelque point de l'arc OAM que l'on place son sommet.

Cette valeur de M se réduit à 90°, si le centre est sur l'axe polaire; d'où l'on conclut que *tous les angles inscrits dans une demi-circonférence sont droits*.

Il serait facile de déduire de l'équation [11] la démonstration des théorèmes que nous avons rappelés au n° **68**.

Veut-on enfin *mener une tangente à la circonférence par un point extérieur*, on prendra ce point pour pôle, puis on écrira que les deux valeurs qu'elle détermine pour ρ sont égales, puisque la tangente est une sécante dont on a fait coïncider les deux points d'intersection; on trouvera ainsi

$$\beta^2\cos^2(\omega-\alpha)-(\beta^2-r^2)=0,$$

ou bien
$$r=\pm\beta\sin(\omega-\alpha).$$

Cette équation nous montre que $\pm(\omega-\alpha)$ est l'angle opposé au côté r dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le rayon vecteur β du centre C. En conséquence, pour construire ce triangle rectangle, on décrira une circonférence sur OC comme diamètre, et en joignant les points où elle coupe la circonférence donnée avec le pôle, on aura les deux tangentes. C'est la construction donnée dans les *éléments* de géométrie. Fig. 24.

73. PROBLÈME. *Trouver l'équation d'une ligne droite.*

Trois cas peuvent se présenter; car la droite dont on demande l'équation peut être parallèle à l'un des axes, ou les couper tous deux à l'origine, ou ailleurs qu'à l'origine.

Si la droite est parallèle à l'un des axes, à celui des y par exemple, tous ses points auront la même abscisse; donc en désignant celle de l'un quelconque d'entre eux par x, et par a la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des abscisses, on aura

$$x=a.$$

Telle est donc l'équation de notre parallèle. Ce résultat est d'accord avec le n° **33**.

74. Si $a=0$, cette parallèle se confond avec l'axe des y; donc

$$x=0$$

est l'équation de cet axe; et, en effet, tous ses points jouissent exclusivement de la propriété d'avoir leurs abscisses égales à zéro.

On verrait de même que l'équation de l'axe des x est

$$y=0.$$

75. Supposons maintenant que la droite dont on cherche l'équation passe par l'origine; et soient M, M'.... des points quelconques de cette droite. Si nous tirons leurs ordonnées MP, M'P'.... nous formerons des triangles MOP, M'OP',.... qui seront tous équiangles, et qui, par conséquent, auront leurs côtés homologues proportionnels; donc

Fig. 26.

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{OP'}}=\text{etc.}$$

Ainsi, le rapport qui existe entre l'ordonnée d'un point quelconque et son abscisse est constant; donc, en l'appelant a, et désignant par x et par y les coordonnées d'un point quelconque de cette droite, nous aurons l'équation

$$\frac{y}{x}=a \quad \text{ou} \quad y=ax.$$

Or, c'est là l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque de la droite proposée; donc c'est son équation.

Pour savoir ce que représente la constante a, j'observe que la droite A'A est déterminée par *l'angle que la partie de cette droite, qui s'étend au-dessus de l'axe des* x, *fait avec la partie de cet axe sur laquelle on compte les abscisses positives* : soit donc α cet angle qui est nécessairement *moindre que* 180°; alors nous tirerons du triangle OMP

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)};$$

mais a est la valeur du rapport $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}$, donc

$$a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\text{*},$$

* Ce résultat est tout à fait indépendant de la position de la droite par rapport aux axes coordonnés ; car si l'on considère la droite $\mathrm{M_1ON}$ et sur cette droite le point $\mathrm{M_1}$, nous aurons, dans le triangle $\mathrm{M_1OP}$,

$$\frac{\mathrm{M_1P}}{\mathrm{OP}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)},$$

et ainsi la connaissance de l'angle α entraîne celle de *la constante* a, qui, comme on le voit, *est égale au rapport des sinus des angles que la droite* AA' *fait avec les axes des* x *et des* y.

76. Si la droite coupe les deux axes ailleurs qu'à l'origine, on pourra, pour en trouver l'équation, lui mener une parallèle par l'origine, et alors on verra que l'ordonnée de chacun des points de la droite proposée surpasse l'ordonnée du point de cette parallèle, qui correspond à la même abscisse, d'une quantité constante b, laquelle représente la distance de l'origine au point B, où la droite RS coupe l'axe des y. Si donc l'équation de OM est

$$y = ax,$$

celle de RS sera

$$y = ax + b.$$

On peut vérifier que les coordonnées de tout point pris sur la droite qui fait avec l'axe des x un angle α, tel que $a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$, et qui coupe l'axe des y à la distance b de l'origine, satisfont à l'équation

$$y = ax + b.$$

Soient, par exemple, le point N' de la droite R'S', $x = \text{OP}$, $y = -\text{N'P}$ ses coordonnées; substituons-les dans l'équation précédente, et remplaçons-y en même temp b par $-\text{OB'}$; il viendra

$$-\text{N'P} = a.\text{OP} - \text{OB'},$$

d'où

$$\frac{-\text{N'P} + \text{OB'}}{\text{OP}} = a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}.$$

Cette équation revient à

$$\frac{\text{N'Q}}{\text{B'Q}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)},$$

qui est vraie, puisqu'elle n'est que le résultat de l'application au triangle B'N'Q de ce théorème de trigonométrie : *Les sinus*

---

car ici l'angle α est NOX; mais les coordonnées de M_1 étant $-\text{M}_1\text{P}$ et OP, a est la valeur du rapport $\frac{-\text{M}_1\text{P}}{\text{OP}}$; donc

$$a = -\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}.$$

des angles d'un triangle sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles.

Il est donc complétement démontré que *l'équation d'une ligne droite est du premier degré à une ou à deux indéterminées.*

77. Proposons-nous maintenant de trouver l'équation de la ligne droite en coordonnées polaires. On peut déterminer cette droite par l'angle α qu'elle fait avec l'axe polaire, et par la distance du pôle au point où elle coupe cet axe, ou bien par ce même angle α et par la distance p du pôle à la droite. C'est ce dernier moyen que nous allons employer.

Fig. 27. Soit donc RS la droite proposée; j'abaisse du pôle la perpendiculaire $OA=p$ sur RS, et j'appelle ω et ρ les coordonnées polaires MOV et OM d'un point quelconque M de cette droite. Le triangle rectangle AOM nous donnera

$$p=\rho \sin \text{OMA};$$

mais l'angle $\omega=\alpha+\text{OMA}$; donc

$$\rho=\frac{p}{\sin(\omega-\alpha)} \qquad [13].$$

Telle est l'équation polaire de la droite RS.

Si cette droite passe par le pôle, $p=0$, et comme alors ρ est nécessairement susceptible de toutes les valeurs, il faut que $\sin(\omega-\alpha)=0$, d'où $\omega=k\pi+\alpha$. Nous avons vu en effet (54) que cette équation représente une droite qui passe par le pôle, et fait avec l'axe fixe un angle α.

Si la droite est parallèle à l'axe polaire, $\alpha=0$, et alors son équation se réduit à

$$\rho=\frac{p}{\sin\omega}.$$

Si la droite est perpendiculaire à l'axe polaire $\alpha=90°$, et on a alors :

$$\rho=-\frac{p}{\cos\omega}.$$

Remarquons que l'équation [13] ne représente que les droites qui coupent le prolongement de l'axe polaire, et que l'équation générale des droites qui, comme R'S', coupent cet axe, est

$$\rho=\frac{p}{\sin(\alpha-\omega)} \qquad [14].$$

p étant une grandeur absolue, on devait prévoir qu'il faudrait deux équations pour représenter toutes les droites que l'on peut tracer sur un plan, puisqu'une droite n'est pas entièrement déterminée par sa distance au pôle et par l'angle qu'elle fait avec l'axe fixe.

78. Problème. *Trouver l'équation d'une courbe, telle que les distances de chacun de ses points à un point fixe* F *et à une droite fixe* DD' *soient proportionnelles à deux droites données* m *et* n. Fig. 28.

Il est d'abord évident que la courbe dont il s'agit est *symétrique* par rapport à la perpendiculaire abaissée du point F sur la droite DD', de sorte que si l'on prend cette perpendiculaire pour axe des abscisses et que l'angle des coordonnées soit droit, à chaque abscisse devront correspondre deux ordonnées égales et de signes contraires; par conséquent, l'équation de notre courbe ne devra pas changer si l'on y remplace y par $-y$, de sorte qu'elle ne renfermera que des termes où y entrera à des puissances de degré pair. D'un autre côté, on voit encore que, si l'on partage l'intervalle FA en deux parties FO et OA proportionnelles à m et à n, le point O sera un point du lieu; donc, si l'on place l'origine en ce point, l'équation cherchée ne renfermera pas de terme indépendant des variables, puisqu'elle devra être vérifiée par les coordonnées du point O. Ainsi, nous prendrons les droites X Fx et YOy pour axes des coordonnées; nous désignerons par p la distance FA, et nous trouverons facilement que

$$\mathrm{FO}=\frac{mp}{m+n} \quad \text{et que} \quad \mathrm{AO}=\frac{np}{m+n},$$

quantités que, pour abréger, nous représenterons respectivement par m' et par n'. Cela posé, soient x et y les coordonnées d'un point quelconque M du lieu demandé : nous aurons

$$\mathrm{FM}=\sqrt{y^2+(x-m')^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{MD}=x+n';$$

donc, en vertu de l'énoncé,

$$\frac{\sqrt{y^2+(x-m')^2}}{x+n'}=\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}.$$

On tirera facilement de là,

$$n^2y^2+(n^2-m^2)x^2-2mnpx=0,$$

équation du lieu; car elle est l'expression de la relation qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque de ce lieu.

Si $m=n$, l'équation ci-dessus se réduit à

$$y^2-2px=0.$$

Nous allons *discuter* cette équation, c'est-à-dire tâcher d'en déduire la forme générale de la courbe qu'elle représente (**51**). Pour cela, résolvons-la par rapport à y : il viendra

$$y=\pm\sqrt{2px},$$

ce qui nous montre qu'à une même abscisse correspondent deux ordonnées égales et de signes contraires, et qu'ainsi la courbe est symétrique de part et d'autre de l'axe des x, ce que nous avions prévu. Nous nous bornerons donc à suivre son cours au-dessus de cet axe. On voit encore, à l'inspection seule de l'équation ci-dessus, que y étant imaginaire pour toute valeur négative que l'on attribuera à x, son lieu n'a aucun point à gauche de l'axe des y; ensuite, que quand on supposera $x=0$, on aura $y=0$, et que x croissant depuis zéro jusqu'à $+\infty$, y croîtra aussi depuis zéro jusqu'à $+\infty$; de sorte qu'à partir de l'origine la courbe s'éloigne indéfiniment
Fig. 29. des deux axes des coordonnées dans l'angle YOX. Il ne s'agit donc plus, pour avoir une idée nette de sa forme, que de *déterminer dans quel sens elle tourne sa* CONCAVITÉ. Or, il résulte immédiatement du n° **76** et du principe du n° **63**, que notre courbe est constamment concave vers l'axe des x, sans quoi elle pourrait être coupée en plus de *deux* points par une ligne droite. Elle a donc la forme que représente la figure 29.

79. Il est facile de construire cette courbe par points; car l'hypothèse $m=n$ signifie que *chacun de ces points est également distant du point fixe* F *et de la droite fixe* DD'. En conséquence, après avoir abaissé une perpendiculaire indéfinie xFX sur DD', on prendra le milieu O de l'intervalle FA, ce qui donnera le point où la courbe rencontre xFX; puis, ayant mené, à droite de O, une parallèle quelconque MPM' à la droite DD', on la coupera aux points M et M' par deux arcs de cercle décrits du point F comme centre avec la distance AP pour rayon, et ces deux points M et M' appartiendront à la courbe; car il est évident qu'ils sont équidis-

tants du point F et de la droite DD'. On obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra, et, en les unissant par un trait continu, la courbe demandée sera tracée : on lui a donné le nom de *parabole*. Le point F se nomme le *foyer ;* la droite DD' est la *directrice* de la parabole, et le coefficient $2p$ de x dans l'équation

$$y^2 = 2px,$$

de cette courbe, en est le *paramètre. La distance* FA *du foyer à la directrice est donc la moitié du paramètre.*

80. PROBLÈME. *Soit* TAT' *une tangente à une circonférence, et supposons qu'ayant joint l'extrémité* O *du diamètre qui va au point de contact* A, *avec un point quelconque* B *de la tangente, par la droite* OB, *on ait pris sur cette droite une distance* OM = BN : *on propose de trouver l'équation du lieu géométrique de tous les points déterminés de la même manière que le point* M. *La courbe ainsi formée se nomme une* CISSOÏDE. Fig. 30.

En raisonnant comme au n° 78, on sera conduit à prendre le diamètre OA pour axe des abscisses, et à placer l'origine des coordonnées rectangulaires au point O. Cela posé, désignons par x et par y les coordonnées du point M, et par r le rayon du cercle donné. Il est clair que, puisque OM = NB, leurs projections OP et AQ sur l'axe des x sont égales, et réciproquement ; ainsi, $AQ = x$, et par conséquent $OQ = 2r - x$. Or, la similitude des triangles OMP et ONQ donne la proportion

$$x : y :: 2r - x : NQ;$$

mais, en vertu d'une propriété connue de la circonférence, $NQ = \sqrt{x(2r-x)}$; en substituant cette valeur dans la proportion précédente, on en tirera

$$\sqrt{2r-x}\,.\,(y\sqrt{2r-x} \dot{-} x\sqrt{x}) = 0,$$

équation qui se décompose dans les deux suivantes :

$$2r - x = 0 \quad \text{et} \quad y\sqrt{2r-x} - x\sqrt{x} = 0.$$

Cette dernière équation revient à

$$y^2(2r-x) - x^3 = 0 \qquad [15].$$

La première est l'équation de la tangente TAT' (53), et

est par conséquent une *solution étrangère* à la question; l'autre est l'équation cherchée de la cissoïde, car elle n'exprime pas une propriété particulière aux coordonnées du point M, plutôt qu'à celles de tout autre point déterminé de la même manière; c'est donc l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées de chacun des points de la cissoïde, et par conséquent c'est l'équation de cette courbe (48).

Nous allons maintenant *discuter* l'équation [15], c'est-à-dire en déduire la forme générale de la courbe. On en tire

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} \qquad [16];$$

ainsi, à une même valeur de x correspondent deux valeurs de y, égales et de signes contraires, et par conséquent le *lieu* est symétrique de part et d'autre de l'axe des abscisses. Nous nous bornerons donc à suivre le cours de la courbe au-dessus de l'axe des x. On voit encore, à l'inspection seule de l'équation ci-dessus, que la cissoïde ne s'étend ni à gauche de l'axe des y, ni au delà de la tangente TAT', puisque $x < 0$ et $x > 2r$ rendent la valeur de y imaginaire, et qu'elle passe par l'origine, car $x=0$ donne $y=0$; ce sont là des conséquences de sa génération. Cela posé, nous allons supposer que l'on fasse croître x d'une manière continue depuis zéro jusqu'à $2r$, et nous verrons ainsi que

$x=0$	donne	$y=0$,
x aug^{te} $<2r$,		y aug^{te},
$x=2r$,		$y=\infty$,

ce qui nous indique qu'à partir de l'origine, la cissoïde s'élève au-dessus de l'axe des x, à mesure qu'elle s'éloigne de l'axe des y, et qu'elle s'étend à une distance infinie du premier de ces deux axes. Ainsi elle jouit de cette propriété remarquable de s'approcher indéfiniment de la tangente TAT' sans pouvoir jamais l'atteindre. Une pareille droite est dite *asymptote* de la courbe. On pouvait prévoir, d'après la génération de la cissoïde, que TAT' en était une asymptote; car, de ce que OM=NB, il suit que MB=ON; or, à mesure que le point B s'élève sur la tangente, la corde ON tend vers sa limite zéro, qu'elle n'atteint que quand AB est devenue infinie; donc MB

diminue indéfiniment, et par conséquent la distance du point M à la tangente TT′ tend aussi vers zéro.

Il suit de là que les derniers éléments de la courbe tendent à devenir parallèles à TAT′, et qu'ainsi la courbe finit nécessairement par présenter sa convexité à cette droite, et par conséquent aussi à OX. Pour savoir s'il en est de même dans la partie qui avoisine le point O, nous tâcherons de lui mener une tangente en ce point. Soient donc M un point de la cissoïde, et x et y ses coordonnées : si nous tirons la sécante indéfinie OM, nous formerons un triangle rectangle OMP, qui nous donnera

$$\operatorname{tang} MOX = \frac{y}{x}.$$

Or, il est évident qu'à mesure que le point M se rapproche de l'origine, l'angle MOX tend vers une certaine limite, qui est l'inclinaison de la tangente au point O sur l'axe des abscisses* ; donc la tangente trigonométrique de cette inclinaison est la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{y}{x}$ lorsque x tend vers zéro. Cherchons donc la limite de ce rapport, et, pour cela, divisons par x les deux membres de l'équation [16]; il viendra

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{x}{2r-x}};$$

ce qui nous montre que si x décroît indéfiniment depuis $x=r$, le rapport $\frac{y}{x}$ décroîtra indéfiniment depuis l'unité jusqu'à zéro, et que, par conséquent, la tangente menée au point O est précisément l'axe des x. C'est d'ailleurs ce qui résulte de la génération même de la cissoïde; car, si l'on fait tourner la sécante OMB autour du point O, on verra qu'à mesure que le point B se rapprochera de A, la distance NB, et par conséquent son égale MO tendra vers zéro, et qu'elle atteindra cette limite, quand le point B sera arrivé en A, c'est-à-dire, quand la sécante OMB coïncidera avec OX; mais alors

* Dans notre Géométrie, nous avons appelé tangente à une courbe en un point donné la limite vers laquelle tend une sécante que l'on fait tourner autour de ce point jusqu'à ce qu'un second point d'intersection soit venu se confondre avec le premier.

son second point d'intersection M avec la cissoïde se sera réuni au premier : donc cette sécante sera devenue une tangente. Donc, aux environs du point O, la courbe présente sa convexité à l'axe des x.

Il résulte de là que, si la courbe n'est pas constamment convexe vers l'axe des abscisses, chacune de ses branches aura au moins deux *sinuosités*, de sorte qu'une ligne droite pourrait couper la cissoïde en *quatre* points; or il suit du n° **63** que cette courbe ne peut pas avoir plus de trois points en ligne droite; donc elle est constamment convexe vers l'axe des abscisses.

La cissoïde passe d'ailleurs par les extrémités du diamètre DD', puisque $x=r$ donne aussi $y=r$; donc elle a la forme représentée par la figure 30.

81. *Newton* a trouvé le moyen de décrire la cissoïde d'un mouvement continu. Pour cela, il prend une équerre dont Fig. 31. un des côtés SU soit indéfini, et dont l'autre côté SV soit égal au diamètre du cercle OA; puis, ayant prolongé ce diamètre d'une quantité OC'$=r$, il fait mouvoir son équerre de toutes les manières possibles, de manière que le côté indéfini SU passant constamment par le point C', l'extrémité V de l'autre côté s'appuie sur le diamètre DD' indéfiniment prolongé; alors le milieu de M de cet autre côté décrit la cissoïde, et il le démontre en prouvant que, si l'on tire la droite indéfinie ONMB, on aura OM$=$NB. Pour nous, nous allons chercher l'équation du lieu des points M, en prenant les mêmes axes coordonnés qu'au n° **80**. Désignons les coordonnées de M par x et par y, et menons MP parallèle à l'axe des x. La similitude des triangles VMP, et VSQ donne la proportion

$$\text{PM}:\text{SQ}::\text{VM}:\text{VQ}::\text{VP}:\text{VS},$$

ou bien $$x-r:\text{SQ}::r:\text{VQ}::\text{VP}:2r.$$

On tire de là $$x:\text{VC}::\text{VP}:2r;$$

car, à cause de l'égalité des triangles C'QC et QSV, on a QS$=$CQ. Or, $\text{VP}=\sqrt{r^2-(x-r)^2}=\sqrt{x(2r-x)}$, et par suite $\text{VC}=y+\sqrt{x(2r-x)}$; donc enfin

$$x:y+\sqrt{x(2r-x)}::\sqrt{x(2r-x)}:2r.$$

En égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, il viendra

$$y\sqrt{x(2r-x)}-x^2=0,$$

équation qui se décompose dans les deux suivantes :

$$x=0 \quad \text{et} \quad y^2(2r-x)-x^3=0.$$

La première de ces équations représente l'axe des y et est par conséquent une solution étrangère à la question ; l'autre est celle même que nous avons trouvée au n° **80**.

82. En cherchant l'équation de la cissoïde (**80**), nous sommes arrivés à une équation qui renfermait à la fois celles de cette courbe et de la tangente TT'; et comme il est évident qu'aucun des points de cette droite ne peut appartenir à la cissoïde, nous avons dit que l'équation $x-2r=0$ était une *solution étrangère*. Comment cette solution étrangère a-t-elle pu être introduite ? Je remarque que la sécante ONB coupe la circonférence non-seulement au point N, mais encore au point O, et que la proportion qui nous a conduits à l'équation de la cissoïde devient identique lorsque OM=BO, de sorte que cette équation doit convenir aussi aux points déterminés de cette manière : mais alors le point M appartient à la tangente TT', quelle que soit la direction de la sécante OB : donc l'équation trouvée devait donner la cissoïde et la droite TT'. Fig. 30.

De même, dans la construction de *Newton*, les triangles PMV et QSV ne cessent pas d'être semblables, lorsque le côté SV de l'équerre tend à devenir parallèle à OA, de sorte que l'équation que l'on en tire doit convenir aux positions que prend le milieu M de ce côté SV, quand il est parallèle à OA ; mais alors M décrit l'axe des y ; donc nous devions trouver la solution $x=0$. Fig. 31.

83. En général, les solutions étrangères proviennent de ce que les conditions géométriques n'ont pas pu être exprimées par des équations qui ne convinssent qu'à elles seules, comme dans le problème du n° **80** ; ou de ce que l'élimination des inconnues auxiliaires (**65**) aura introduit des solutions qui ne se trouvaient pas dans les équations primitives. Par exemple, si l'une des équations du problème se présentait sous la forme

$$(x-a)t-m(y-b)=0, \quad \text{d'où} \quad t=\frac{m(y-b)}{x-a},$$

il est clair que les équations résultant de l'élimination de l'inconnue auxiliaire t seraient vérifiées par le couple $(x=a, y=b)$, et il peut très-bien se faire que ce couple ne satisfasse pas aux autres équations du problème, et qu'ainsi le point (a, b) soit une solution étrangère à la question.

84. Problème. *Trouver le lieu des points obtenus en*
Fig. 32. *prolongeant d'une quantité constante* m, *les droites menées d'un point fixe* O *à une droite indéfinie* RS.

On verra que toute la partie de la courbe située à gauche de RS est une solution étrangère à la question; que si la distance $OA = a$ est plus grande que m, le point O, dont les coordonnées vérifieront l'équation du lieu, sera tout à fait séparé des deux branches de la courbe représentée par cette équation; mais que, si $a=m$ ou est $< m$, la courbe passera par O.

§ IV. Construction des équations.

85. *Descartes* a déduit du principe que nous avons exposé au n° **62**, une *méthode géométrique pour résoudre les équations numériques*. Soit, en effet, $F(x)=0$ l'équation proposée : il est clair que si, en transposant une partie de ses termes dans le second membre, on la met sous la forme

$$f_1(x)=f_2(x),$$

on pourra poser

$$y=f_1(x) \quad \text{et} \quad y=f_2(x),$$

et on formera ainsi deux équations à deux inconnues qui seront telles qu'en éliminant y entre elles, on retombera sur la proposée $F(x)=0$.

Il en sera de même si, ayant choisi arbitrairement une équation à deux inconnues $\varphi(x, y)=0$, on pose l'équation $\psi(x, y)=\varphi(x, y).\pi(x, y)+F(x)=0$, dans laquelle $\pi(x, y)$ représente une fonction entière quelconque de x et de y; car il est clair que l'équation finale obtenue en éliminant y entre $\varphi(x, y)=0$ et $\psi(x, y)=0$ sera $F(x)=0$.

On voit donc qu'il y a une infinité de manières de former deux équations à deux inconnues $\varphi(x, y)=0$ et $\psi(x, y)=0$ qui jouissent de cette propriété qu'en éliminant y entre elles on obtienne pour équation finale l'équation même $F(x)=0$. On construira donc *à l'échelle* les lieux géométriques de ces

deux équations et, en mesurant les abscisses de leurs points d'intersection, on aura les valeurs des racines réelles de l'équation $F(x)=0$.

Il faut observer qu'en vertu du théorème de *Bezout* sur le degré de l'équation finale (*algèbre*, **579**), il faudra que le produit des degrés des deux équations $\varphi(x, y)=0$ et $\psi(x, y)=0$ soit au moins égal au degré de la proposée.

Il faut encore qu'à chaque racine réelle de l'équation proposée $F(x)=0$, *il réponde une valeur réelle de* y, c'est-à-dire que les lieux des équations $\varphi(x, y)=0$ et $\psi(x, y)=0$ *doivent* se couper en autant de points que l'équation $F(x)=0$ a de racines réelles. Ainsi, par exemple, si l'on avait l'équation $x^2+4ax+a^2=0$, quoiqu'elle provienne de l'élimination de y entre les deux équations

$$y^2+x^2+3ax+a^2=0 \quad \text{et} \quad y^2-ax=0,$$

on ne pourrait pas obtenir les valeurs de ses racines en construisant les courbes représentées par ces équations, parce que ces courbes ne se coupent pas, comme il est facile de le voir. Mais, si l'on pose $x^2=ay$ et qu'on remplace x^2 par ay dans la proposée, on aura une équation $y+4x+a=0$, qui sera telle qu'en éliminant y entre cette équation et $x^2=ay$, on trouvera $x^2+4ax+a^2=0$ pour équation finale. Or, pour chaque valeur réelle de x tirée de cette équation, l'équation $y+4x+a=0$ donnera une valeur réelle pour y, de sorte que les lieux des équations

$$x^2=ay \quad \text{et} \quad y+4x+a=0$$

se couperont en autant de points que l'équation proposée

$$x^2+4ax+a^2=0$$

a de racines réelles, et par conséquent en mesurant les abscisses des points d'intersection de ces deux lieux géométriques, on obtiendra les racines de la proposée.

Le procédé que nous avons indiqué (**50** et **51**) pour construire la courbe représentée par une équation à deux variables, suppose la résolution algébrique de cette équation par rapport à l'une des variables, de sorte que la méthode actuelle deviendrait, en général, illusoire, si les équations $\varphi(x, y)=0$ et $\psi(x, y)=0$ étaient d'un degré supérieur au second par rapport à chacune des deux inconnues. La difficulté

de cette méthode consiste donc à choisir les équations $\varphi(x,y)=0$ et $\psi(x,y)=0$, de manière qu'on puisse les construire le plus simplement possible, et nous verrons, dans un instant (**88** et **89**), que, quand l'équation $F(x)=0$ est du troisième ou du quatrième degré, la détermination géométrique de ses racines est d'une facilité qui ne laisse rien à désirer.

Ces constructions, qui avaient vivement préoccupé *Descartes* et les géomètres qui l'ont suivi, ont perdu beaucoup de leur importance, depuis que les méthodes d'approximation ont atteint le degré de perfection où elles sont arrivées aujourd'hui; toutefois, elles peuvent être encore employées utilement pour obtenir les racines réelles d'une équation numérique, avec une première approximation que l'on pourra pousser ensuite plus loin, au moyen des procédés que l'on enseigne dans l'algèbre, et surtout pour reconnaître le nombre des racines réelles d'une équation donnée, ainsi que nous allons le faire voir par un exemple.

Soit l'équation

$$x^9-2x^6-x^4-x^3+2x+2+0 \qquad [a].$$

Je pose

$$x^3=y \qquad [b],$$

puis je remplace x^3 par y dans l'équation précédente, ce qui donne

$$y^3-2y^2-xy-y+2x+2=0 \qquad [c].$$

Ainsi l'équation $[a]$ est le résultat de l'élimination de y entre les deux autres, et comme les valeurs de x tirées de $[a]$ doivent être substituées dans $[b]$, si l'on veut avoir les valeurs correspondantes de y, on voit que nos deux courbes auront certainement autant de points communs qu'il y a de racines réelles dans la proposée. Il s'agit donc de les construire; or, si l'on suppose que les coordonnées soient rectangulaires, le

Fig. 18. lieu de la première est la courbe TOT′ (**52**) : quant à l'équation $[c]$, je la résous par rapport à x, et je trouve

$$x=\frac{y^3-2y^2-y+2}{y-2}=y^2-1,$$

de sorte que cette équation $[c]$ revient à

$$(y-2)(x-y^2+1)=0;$$

elle représente donc (**57**) les lieux des équations

$$y-2=0 \quad \text{et} \quad x-y^2+1=0.$$

Or celui de la première est une parallèle UU' menée à l'axe des x, à la distance 2 de cet axe. Quant à l'équation

$$x-y^2+1=0,$$

on reconnaîtra facilement qu'elle représente une courbe VV' symétrique par rapport à l'axe des abscisses, qui coupe l'axe des x à la distance -1 de l'origine, celui des y à la distance ±1 de cette origine, et s'étend indéfiniment dans les angles YOX et yOX. La courbe TT' coupe UU' en un seul point A; VV' en B et en C; d'où il suit que l'équation [1] a trois racines réelles, deux positives et une négative, et les six autres imaginaires. En mesurant les abscisses des points A, B, C, on aura des valeurs approchées des trois racines réelles.

86. Au lieu de poser $x^3=y$, comme nous l'avons fait, on aurait pu égaler à y le premier membre de l'équation proposée, et on aurait ainsi formé l'équation

$$y=x^9-2x^6-x^4-x^3+2x+2.$$

Or, il est évident que, de tous les points du plan, ceux qui appartiennent à l'axe des x sont les seuls dont l'ordonnée soit nulle; par conséquent les racines de la proposée sont les abscisses des points où la courbe, représentée par l'équation ci-dessus, coupe l'axe des x; mais on voit qu'à raison du degré où x entre dans cette équation, la construction de la ligne qu'elle représente aurait été plus laborieuse que celle des lieux des équations [b] et [c].

***87.** Toutefois, cette dernière manière de construire les racines de l'équation [a] mérite de fixer notre attention; car, outre sa généralité, elle offre encore le moyen de peindre aux yeux les démonstrations algébriques par lesquelles on établit la vérité de plusieurs des théorèmes sur lesquels est fondée la résolution des équations numériques à une seule inconnue.

Considérons, en effet, une équation à coefficients numériques $\varphi(x)=0$, et posons

$$y=\varphi(x).$$

Si, dans cette équation, on regarde x et y comme des coordonnées courantes, elle représentera une certaine courbe, qui coupera l'axe des x en des points dont les abscisses seront les racines mêmes de l'équation $\varphi(x)=0$. Or, si l'on fait

croître x d'une manière continue depuis zéro jusqu'à $+\infty$, et jusqu'à $-\infty$, il est clair qu'à chaque valeur donnée à x répondra toujours une et une seule valeur réelle pour y, puisque la fonction $\varphi(x)$ est supposée algébrique et rationnelle, de sorte que la courbe représentée par l'équation $y=\varphi(x)$ s'étendra indéfiniment à droite et à gauche de l'axe des y, ne pourra être coupée qu'en un seul point par une parallèle à cet axe, et sera continue; car il ne pourrait y avoir discontinuité dans son cours, que s'il y avait des abscisses sans ordonnées correspondantes, et c'est ce qui n'a pas lieu ici, comme nous venons de l'observer. Cela posé, soient α et β deux nombres qui, substitués dans $\varphi(x)$, donnent deux résultats de signes contraires : les ordonnées correspondantes à ces abscisses seront donc aussi de signes contraires, et par conséquent si, pour fixer les idées; nous supposons que $x=\alpha$ donne un résultat positif $+\alpha'$, et que $x=\beta$ donne un résultat
Fig. 33. négatif $-\beta'$, la courbe ira du point $M(\alpha, \alpha')$ au point $N(\beta, -\beta')$; mais elle est *continue :* donc elle coupera nécessairement l'axe des abscisses, au moins en un point compris entre les points P et Q; donc l'équation $\varphi(x)=0$ a au moins une racine réelle comprise entre α et β. Donc, *quand deux nombres, substitués successivement dans le premier membre d'une équation, donnent deux résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent au moins une racine réelle de cette équation.*

Remarquons que cette démonstration ne suppose qu'une chose, savoir : que $\varphi(x)$ varie d'une manière continue, quand x croît aussi d'une manière continue. Ainsi le théorème que nous venons d'établir sera vrai, quelle que soit l'équation proposée $\varphi(x)=0$, qu'elle soit algébrique ou transcendante, pourvu que son premier membre satisfasse à cette condition; mais il n'y a que les équations algébriques, rationnelles et entières, pour lesquelles il soit applicable sans aucune restriction.

L'inspection seule de la figure suffit pour montrer qu'en allant du point M au point N, la courbe peut couper plusiers fois l'axe des x, mais que le nombre de ses intersections est nécessairement *impair;* que si, au contraire, les deux points M et N sont d'un même côté de l'axe des abscisses, la courbe pourra ne pas rencontrer cet axe, mais que, si elle le coupe,

ce sera un nombre *pair* de fois; d'où résulte cet autre théorème :

*Lorsque deux nombres comprennent un nombre impair de racines d'une équation, ces nombres, substitués dans son premier membre, donneront deux résultats de signes contraires, et réciproquement; mais ils donneront deux résultats de mêmes signes, si le nombre des racines qu'ils comprennent est zéro ou un nombre pair, et réciproquement**.

Nous avons insisté sur les démonstrations de ces deux théorèmes d'algèbre, pour bien faire sentir la correspondance intime qui existe entre l'algèbre et la géométrie générale; car, comme le dit Monge, « Il n'y a aucune construction géo-« métrique qui ne puisse être traduite en analyse; et lors-« que les questions ne comportent pas plus de trois incon-« nues, chaque opération analytique peut être regardée comme « l'écriture d'un spectacle en géométrie. »

88. Indiquons maintenant la méthode que *Halley* a donnée pour construire les racines des équations du troisième et du quatrième degré, et occupons-nous d'abord de ces dernières; car il est facile de ramener une équation du troisième degré à une du quatrième, en multipliant tous ses termes par l'inconnue.

L'équation proposée devant toujours être rendue homogène si elle ne l'était pas (7), nous pourrons la supposer ramenée à la forme

$$x^4+ax^3+abx^2+a^2cx+a^3d=0 \qquad [a].$$

* Observons que dans l'énoncé de ce théorème et dans celui du précédent, il faut avoir égard au degré de multiplicité de racines égales qui pourraient être comprises entre les deux nombres substitués, et c'est aussi ce qu'il faut faire dans la démonstration, en regardant comme un point double, triple, quadruple, etc., celui qui résulte de 2, 3, 4, etc., intersections de la courbe avec l'axe des x; mais il est très-remarquable que si deux des points où la courbe rencontre l'axe des abscisses viennent à se réunir, cette courbe est aux environs du point de contact au-dessus ou au-dessous de cet axe, et qu'elle le traverse au contraire en ce point, s'il est formé de la réunion de trois points d'intersection. C'est ce que les courbes ponctuées MRS'N et MR'N représentent respectivement aux points S' et R', formés l'un de la réunion des points S et T, et l'autre de celle des points R, S et T, ou des points R et S'.

Nous voyons d'abord que ses racines ne peuvent pas être les abscisses des points d'intersection d'une ligne droite et d'un cercle ou de deux cercles entre eux, puisque le nombre de ces points ne saurait surpasser deux. Il faut donc, dans le cas actuel, employer deux lignes, l'une du premier et l'autre du troisième ordre, ou bien deux courbes du second ordre. *Halley* a trouvé que l'on pouvait faire usage de la parabole et de la circonférence. Pour le faire voir, je pose

$$x^2 = my \qquad [b],$$

équation d'une parabole dont le paramètre est la quantité indéterminée m, si nous supposons que les axes coordonnés soient rectangulaires (78 et 79); puis, en appelant (α, β) les coordonnées du centre du cercle, et r son rayon, l'équation de sa circonférence sera

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2 \qquad [c].$$

J'élimine y entre ces deux équations, et l'équation finale

$$x^4 \left.\begin{matrix}-2m\beta \\ +m^2\end{matrix}\right| x^2 - 2m^2\alpha x + m^2(\alpha^2+\beta^2-r^2)=0 \qquad [d],$$

a pour racines les abscisses des points d'intersection de la parabole et du cercle; si donc on veut que ces abscisses soient les racines de l'équation proposée, il faudra que l'on puisse identifier les deux équations [a] et [d], en donnant aux inconnues m, α, β et r des valeurs réelles et finies. Or, on voit immédiatement que cette identification est impossible, à cause du terme ax^3, que renferme l'équation proposée. Il faudra donc introduire un terme du troisième degré dans l'équation [d], et il suffira pour cela d'y changer x en $x+h$, h étant une indéterminée *; mais il sera préférable de commencer par faire évanouir le second terme de la proposée, avant d'entreprendre la construction de ses racines. Considérons donc l'équation

$$x^4+abx^2+a^2cx+a^3d=0,$$

dans laquelle on pourra supposer a positif, et identifions-la avec [d] : il viendra

$$m^2-2m\beta=ab, \quad -2m^2\alpha=a^2c, \quad m^2(\beta^2+\alpha^2-r^2)=a^3d.$$

* Nous verrons (93) que cela revient à faire glisser l'origine sur l'axe des x d'une quantité égale à h.

On tire de ces équations

$$\beta=\frac{m^2-ab}{2m},\qquad \alpha=-\frac{a^2c}{2m^2},$$
$$r=\frac{1}{2m^2}\sqrt{m^2(m^2-ab)^2+a^2(ac^2-4dm^2)}.$$

Les valeurs de β et de α seront toujours réelles et finies ; quant à celle de r, il *suffira*, pour qu'elle soit aussi réelle, que l'on ait

$$ac^2-4dm^2>0,$$

condition à laquelle on pourra satisfaire, puisque m est indéterminée et que a est positif. *Donc, il sera toujours possible de construire les racines d'une équation du quatrième degré par l'intersection d'une parabole et d'une circonférence.*

Supposons que l'on fasse $m=a$, on aura

$$\beta=\frac{a-b}{2},\quad \alpha=-\frac{c}{2},\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2+c^2-4ad},$$

et notre cercle sera facile à tracer, si $(a-b)^2+c^2-4ad>0$, c'est-à-dire, si la valeur de r est réelle.

89. Considérons maintenant l'équation du troisième degré, privée de son second terme,

$$x^3\pm a^2x+a^2b=0.$$

Je multiplie tous ses termes par x, ce qui la ramène à l'équation du quatrième degré

$$x^4\pm a^2x^2+a^2bx=0 \qquad [e],$$

qui a les mêmes racines que la proposée, et qui a, en outre, la racine zéro. Comme la valeur trouvée plus haut pour r est toujours réelle, quelle que soit la valeur de m, quand l'équation n'a pas de terme indépendant de x, je pose

$$x^2=ay \qquad [f],$$

et je substitue dans l'équation $[e]$, ce qui donne

$$y^2\pm ay+bx=0 \qquad [g],$$

de sorte que l'équation $[e]$ est le résultat de l'élimination de y entre ces deux dernières équations. Or, au système des équations $[f]$ et $[g]$ je puis substituer le système formé de l'équation $[f]$ et de leur somme

$$y^2+x^2\pm ay+bx=ay \qquad [h].$$

Ainsi, en construisant (**79** et **71**) la parabole et la circonférence, représentées respectivement par les équations [f] et [h], les abscisses de leurs points d'intersection, autres que l'origine, seront les racines de l'équation proposée.

90. Nous allons appliquer les méthodes que nous venons d'exposer à la question suivante :

Fig. 34. PROBLÈME. *Partager un arc donné* AMB *en trois parties égales.*

Soient a le nombre des degrés de l'arc AMB, r le rayon de cet arc, x le sinus de son tiers : la valeur de x dépendra (*Trig.*, **41**) de l'équation

$$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{\sin a}{4}=0 \qquad [i],$$

ou, en rétablissant l'homogénéité (**7**),

$$x^3-\frac{3r^2}{4}x+\frac{r^3\sin a}{4}=0.$$

Pour construire les racines de cette équation, je la multiplie par x, ce qui donne

$$x^4-\frac{3r^2}{4}x^2+\frac{r^3\sin a}{4}x=0;$$

puis je pose

$$x^2=\frac{r}{2}y \qquad [k],$$

et il vient, en substituant dans l'équation précédente et divisant ensuite par $\frac{r^2}{4}$,

$$y^2-\frac{3r}{2}y+\sin a.x=0;$$

en ajoutant enfin cette équation avec la précédente, on trouvera

$$y^2+x^2-2ry+\sin a.x=0 \qquad [l].$$

Cette équation représente une circonférence qui passe par l'origine, et dont les coordonnées du centre sont $\alpha=-\frac{\sin a}{2}$, $\beta=r$ (**71**). En conséquence, pour la construire, je prends le diamètre OA pour axe des ordonnées, et le diamètre OA', qui lui est perpendiculaire, pour l'axe des abscisses; puis, ayant prolongé le sinus BP de l'arc AMB jusqu'en B', je tire par le milieu de B'P une parallèle à l'axe des y, et du point C, où cette parallèle coupe la tangente menée au point A à la

circonférence, avec CO pour rayon, je décris une circonférence, qui est le lieu de l'équation [l].

Actuellement, je remarque que le paramètre de la parabole représentée par l'équation [k] étant $\frac{r}{2}$, si je prends OF et OD égaux à $\frac{r}{8}$, les points F et D seront le foyer et le pied de la directrice (79), de sorte qu'il sera facile de construire cette courbe.

La parabole et la circonférence se coupent aux points R, R' et R'', de sorte que OQ, OQ' et — OQ'', sont les trois racines de l'équation [i]. Or, ces racines doivent être $\sin\frac{a}{3}$, $\sin\left(120^\circ+\frac{a}{3}\right)=\sin\left(60^\circ-\frac{a}{3}\right)$ et $\sin\left(240^\circ+\frac{a}{3}\right)$; mais comme l'arc AMB $= a$ est $> 90^\circ$ et $< 180^\circ$, on voit que $\frac{a}{3} > 30^\circ$ et $< 60^\circ$, et que $\left(60^\circ-\frac{a}{3}\right) < 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$; donc $\sin\frac{a}{3} > \sin\left(60^\circ-\frac{a}{3}\right)$; ainsi OQ est le sinus de l'arc $\frac{a}{3}$, et par conséquent l'arc AN est le tiers de l'arc donné.

Il serait facile, en suivant la même marche, de *construire un cube qui soit* m *fois plus grand qu'un autre cube donné*, de sorte que ces questions, qui présentaient de si grandes difficultés aux géomètres grecs, ne sont plus, pour les modernes, que de simples jeux de calcul *.

---

* C'est pour résoudre le problème, si célèbre chez les anciens, de la *duplication du cube* que *Dioclès* avait inventé la cissoïde. On peut voir, dans la première édition de cet ouvrage, comment il y était parvenu.

CHAPITRE III.

DE LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

91. On conçoit, et nous l'avons d'ailleurs déjà remarqué (nos **68** et **76**), que l'équation d'une ligne dépend non-seulement de sa forme, mais encore de sa position par rapport aux axes des coordonnées, de sorte que cette équation doit contenir deux sortes de termes : les uns qui tiennent à la nature de la ligne qu'elle représente, et les autres à la situation de cette ligne relativement aux axes des coordonnées. Ainsi, dans les différentes formes qu'elle peut prendre, l'équation de la circonférence, rapportée à des coordonnées rectilignes, renferme toujours les carrés des deux variables x et y, mais tous les autres termes peuvent en disparaître successivement. Par conséquent il sera possible, en changeant convenablement l'origine et la direction des axes, de faire évanouir de l'équation d'une ligne un ou plusieurs des termes de la seconde espèce, ce qui ramènera cette équation à une forme plus simple, et permettra de reconnaître plus facilement la nature de cette ligne, les sinuosités de son cours et ses différentes propriétés.

92. *L'opération par laquelle on passe* ainsi *d'un système de coordonnées à un autre se nomme* LA TRANSFORMATION *des coordonnées*. Pour l'effectuer, on cherche les valeurs des anciennes coordonnées d'un point quelconque du plan en fonction des nouvelles, et on substitue ces valeurs dans l'équation proposée : de cette manière, l'équation qu'on obtient appartient toujours à la même ligne; mais cette ligne est rapportée aux nouveaux axes.

Nous allons d'abord chercher les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées rectilignes à un autre système de coordonnées rectilignes, puis nous verrons comment on peut transformer en coordonnées polaires une équation relative à des coordonnées rectilignes, et réciproquement.

93. Au lieu d'attaquer le problème de la transformation

des coordonnées rectilignes en d'autres coordonnées rectilignes dans toute sa généralité, nous supposerons d'abord que l'on déplace l'origine, en conservant aux axes leur direction; ensuite que l'on change la direction des axes sans déplacer l'origine, et de ces deux cas particuliers nous déduirons immédiatement le cas général, celui où l'on change à la fois l'origine et la direction des axes.

Supposons donc que les nouveaux axes des coordonnées soient parallèles aux premiers, et appelons-les $x'O'X'$ et $y'O'Y'$. Fig. 35.
Leur position sera déterminée par les coordonnées de la nouvelle origine, coordonnées qui seront susceptibles de prendre toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Désignons-les par a et par b, de sorte que $OA=a$ et $AO'=b$. Soient M un point quelconque du plan, $OP=x$ et $PM=y$, ses coordonnées primitives, et $O'P'=x'$ et $MP'=y'$, ses nouvelles coordonnées : on a évidemment

$$\left.\begin{array}{lll} & OP=OA+O'P', \quad \text{ou} & x=a+x', \\ \text{et} & MP=O'A+MP', \quad \text{ou} & y=b+y' \end{array}\right\} [1].$$

Telles sont les formules demandées.

Quoiqu'on les ait obtenues en considérant le cas particulier où les coordonnées des points M et O' sont positives, elles n'en sont pas moins générales, pourvu que l'on ait égard aux variations de signes que peuvent éprouver ces quantités. Pour le prouver, il suffit de faire voir que, si l'un de ces points vient à éprouver un déplacement qui fasse changer le signe de l'une de ses coordonnées, les équations [1] subsisteront encore, en ayant égard au changement de signe de cette coordonnée. Supposons donc que les nouveaux axes soient $x''X''$ et $y''Y''$, auquel cas, l'ordonnée de la nouvelle origine est négative, et considérons toujours un point M dont les ordonnées soient positives ; on aura évidemment

$MP=MP''-O''A'$; mais $MP=y$, $MP''=y''$ et $O''A'=-b$; donc on a encore $y=y''+b$, etc.

Les formules [1] nous apprennent que, *pour passer d'un système d'axes quelconques à un système d'axes parallèles à ceux-ci, il faut remplacer, dans l'équation de la ligne que l'on considère, chaque coordonnée par cette même coordonnée augmentée de celle de la nouvelle origine.*

94. Remarquons que cette transformation d'axes revient

à faire glisser la courbe, de manière que chacun de ses points décrive une droite égale et parallèle à celle qui va de la nouvelle origine à l'ancienne; car, si l'on tire par le point M une droite M*m* égale et parallèle à O'O, il est clair que les coordonnées du point *m* par rapport aux axes X*x* et Y*y* sont égales à celles de M relativement à X'*x*' et Y'*y*' de sorte que le point *m* est placé, à l'égard des axes primitifs, identiquement de la même manière que le point M l'est par rapport aux nouveaux. (Cela résulte de l'égalité des triangles *m*O*p* et MO'P'.)

95. Lemme. *Si l'on projette, sur une ligne droite, les côtés d'un polygone quelconque, la somme des projections des côtés qui sont dirigés dans un sens est égale à la somme des projections des côtés qui sont dirigés dans le sens contraire.*

Fig. 36. Soient, en effet, ABCDE un polygone concave ou convexe, plan ou gauche, et U'U une droite quelconque, sur laquelle on projette son contour : si l'on conçoit qu'un point matériel se meuve sur ce contour, nous regarderons comme dirigés dans le même sens, ou en sens contraire, les côtés qu'il parcourra en s'éloignant ou en se rapprochant d'un plan MN, mené perpendiculairement à la droite U'U, et de manière à ne pas rencontrer le polygone ABCDE. Ainsi, nous dirons que les côtés AB, BC, CD sont dirigés dans le même sens, et que les côtés DE et EA le sont dans un sens contraire à celui-ci. Cela posé, menons par les différents sommets de notre polygone, des plans perpendiculaires à U'U; et soient ainsi A'B', B'C', C'D', etc., les projections de ses côtés sur cette droite : ces projections mesurent évidemment les différences des distances des sommets du polygone au plan MN; par conséquent la quantité, dont notre point mobile s'est éloigné ou s'est rapproché de ce plan, quand il a parcouru un côté du polygone, est précisément égale à la projection de ce côté sur UU'. D'ailleurs, il est évident que la quantité dont il se sera éloigné de MN en parcourant le contour du polygone est égale à celle dont il se sera rapproché de ce plan, pour revenir au point de départ : donc la somme des projections des côtés que le point décrira en s'éloignant de MN est égale à la somme des projections des côtés qu'il parcourra en s'en rapprochant. Notre lemme est donc démontré.

96. Cherchons maintenant les formules nécessaires pour passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système de coordonnées obliques ayant la même origine.

Nous déterminerons la position des nouveaux axes, en nous donnant les angles α et α', que font respectivement, avec l'ancien axe des abscisses positives, les parties des nouveaux axes, sur lesquelles sont comptées les abscisses et les ordonnées positives. Ainsi xX et yY étant les axes primitifs, Fig. 37.
et $x'X'$ et $y'Y'$ les nouveaux, on a $X'OX = \alpha$ et $Y'OX = \alpha'$. Ces angles α et α' doivent varier depuis zéro jusqu'à 360° pour que les droites OX′ et OY′ puissent prendre toutes les positions possibles autour de l'origine O.

Cela posé, soient x et y les anciennes coordonnées OP et MP d'un point M, et x' et y' les nouvelles coordonnées OP′ et MP′ de ce point; je mène OU perpendiculaire sur yY, et je projette, sur cette droite, les côtés du quadrilatère OPMP′O, en rapportant les directions de ses côtés à l'axe Yy. En vertu du lemme (**95**), la projection du côté $OP = x$ sera égale à la somme des projections des côtés $MP' = y'$ et $P'O = x'$; car, par suite de la direction que nous avons donnée à l'axe OU, celle de PM est nulle : mais la projection d'une droite est égale au produit de cette droite par le cosinus de l'angle aigu que sa direction fait avec l'axe de projection (*Trig.*, **58**); et comme cet angle aigu est évidemment le complément de l'angle que le côté que l'on considère fait avec OY, nous aurons

$$x \sin YOX = y' \sin Y'OY + x' \sin X'OY :$$

mais $YOX = \theta$, $Y'OY = (\theta - \alpha')$, et $X'OY = (\theta - \alpha)$;

donc enfin $$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}.$$

Ainsi, le numérateur de la valeur de x s'obtient en multipliant chacune des nouvelles coordonnées x' et y' par le sinus de l'angle que sa direction fait avec l'axe des y : par conséquent, le numérateur de la valeur de y se formera en multipliant de même chacune des nouvelles coordonnées x' et y' par le sinus de l'angle que sa direction fait avec l'axe des x; donc

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta}.$$

Comme ces formules ont été obtenues au moyen d'une construction qui supposait que les axes des coordonnées fissent des angles aigus avec l'axe OU de projection, et que les coordonnées du point M fussent positives, on pourrait craindre qu'elles n'eussent pas tout le degré de généralité convenable. Il n'en est rien cependant, ainsi que nous allons le faire voir, en observant qu'il suffit de vérifier l'une d'elles, la première, par exemple; car, en faisant les mêmes raisonnements sur la seconde, on en constaterait pareillement la généralité.

Fig. 38. Supposons d'abord que l'angle X'OU soit obtus : la projection de OP sera égale à la projection de MP', *diminuée* de celle de P'O; mais cette dernière est égale à x' multiplié par le cosinus de l'angle aigu X'OU', et ce cosinus est égal à $\sin X'OY = \sin(\alpha - \theta) = -\sin(\theta - \alpha)$; donc encore

$$x \sin\theta = x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha').$$

Fig. 39. Actuellement si, en supposant que l'angle X'OU reste aigu, le point M a sa nouvelle abscisse négative, la projection de OP sera encore égale à celle de MP', *moins* la projection de P'O; mais cette dernière est le produit de $OP' = -x'$ par $\cos X'OU = \sin(\theta - \alpha)$; donc encore

$$x \sin\theta = x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha').$$

Fig. 40. Enfin, si l'angle X'OU est obtus et que la nouvelle abscisse du point M soit négative, la projection de OP sera la *somme* de celles de P'O et de MP'; mais $OP' = -x'$; $\cos X'OU' = \sin X'OY = \sin(\alpha - \theta) = -\sin(\theta - \alpha)$; donc, etc.

Il est donc prouvé que, pour rendre la formule applicable à tous les cas, il suffit d'avoir égard aux signes des coordonnées et à ceux des lignes trigonométriques; car on comprend que ce que nous avons dit de l'axe des x' s'appliquerait également bien aux autres axes.

Les formules

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} \\ y &= \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta} \end{aligned}\right\} \quad [2]$$

serviront donc à passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système de coordonnées obliques, en conservant l'origine.

97. Remarquons que cette transformation de coordonnées revient à imprimer à la courbe un mouvement de rotation, qui a pour centre l'origine, et pour mesure l'angle α, si l'angle des nouveaux axes est égal à celui des premiers. En effet, un point quelconque M de la courbe viendra ainsi occuper, à l'égard des anciens axes, une position m identique à celle où il se trouve par rapport aux nouveaux; car l'angle MOm étant égal à $X'OX$, on voit que les triangles OMP' et Omp sont égaux, et qu'ainsi les deux coordonnées mp et Op du point m, relativement aux anciens axes, sont égales à celles MP' et OP' du point M par rapport aux nouveaux. Fig. 41.

98. Si les axes primitifs sont rectangulaires, on a $\sin\theta=1$, $\sin(\theta-\alpha)=\cos\alpha$, et $\sin(\theta-\alpha')=\cos\alpha$; et les formules [2] deviennent

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',\\ y&=x'\sin\alpha+y'\sin\alpha',\end{aligned}\right\}\qquad [3],$$

au moyen desquelles on passera d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques.

99. Si les nouveaux axes sont aussi rectangulaires, comme les anciens, on aura

$$\alpha'-\alpha=90^\circ,\ \text{d'où}\ \sin\alpha'=\cos\alpha,\ \text{et}\ \cos\alpha'=-\sin\alpha,$$

et les deux dernières formules deviendront alors

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{aligned}\right\}\qquad [4],$$

formules qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées aussi rectangulaires.

100. Si les nouveaux axes seulement sont rectangulaires, on aura

$$\alpha'-\alpha=90^\circ;\ \text{d'où}\ \sin\alpha'=\cos\alpha,\ \text{et}\ \sin(\theta-\alpha')=-\cos(\theta-\alpha).$$

En substituant ces valeurs dans les formules [2], on trouvera

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x'\sin(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta}\\ y&=\frac{x'\sin\alpha+y'\cos\alpha}{\sin\theta}\end{aligned}\right\}\qquad [5],$$

formules au moyen desquelles on passera d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires, ayant la même origine.

101. Supposons actuellement que l'on veuille changer à la fois l'origine et la direction des axes; on mènera, par la nouvelle origine O', deux axes $x''X''$ et $y''Y''$ parallèles aux anciens, puis on passera de ces axes primitifs à ceux-ci, au moyen des formules du n° **93**.

Fig. 42.

$$x=a+x'' \quad \text{et} \quad y=b+y'',$$

et il ne s'agira plus que de passer des axes $x''X''$ et $y''Y''$ aux axes $x'X'$ et $y'Y'$ *; ce qui se fera en remplaçant x'' et y'' par leurs valeurs données par les formules [2], [3], [4] ou [5]. Ainsi, si les anciens axes et les nouveaux sont obliques, on aura

$$x=a+\frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\alpha')}{\sin\theta},$$
$$y=b+\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'}{\sin\theta};$$

d'où l'on voit qu'*on obtendra les formules nécessaires pour changer à la fois l'origine et la direction des axes, en ajoutant* a *et* b *respectivement aux seconds membres des équations qui servent à changer seulement la direction des axes*.

102. Il est important de remarquer que *la transformation des coordonnées ne peut pas altérer la nature de l'équation que l'on considère*, c'est-à-dire rendre cette équation *algébrique* ou *transcendante*, si elle était au contraire *transcendante* ou *algébrique*. En effet, on voit d'abord que les valeurs de x et de y étant des fonctions *linéaires*, c'est-à-dire du premier degré, de x' et de y', leur substitution dans une équation algébrique en x et en y ne pourra pas conduire à une équation transcendante, et *vice versa*.

Si la proposée est algébrique, il est évident que son degré ne s'élèvera point par cette substitution, et je dis qu'il ne pourra pas non plus s'abaisser. En effet, s'il en était ainsi, il faudrait qu'en remplaçant dans cette seconde équation x' et y' par leurs valeurs tirées des formules trouvées précédemment, on obtînt une équation d'un degré plus élevé; car on doit

* Il est bon de remarquer que le calcul à faire pour obtenir les formules cherchées serait assez compliqué, si on avait commencé par changer la direction des axes, pour déplacer ensuite l'origine.

ainsi revenir à l'équation primitive; or, ce degré ne peut pas augmenter, puisque les valeurs de x' et de y' sont des fonctions linéaires de x et de y; donc *le degré d'une équation algébrique à deux indéterminées ne peut être altéré par aucune transformation de coordonnées*. Ceci confirme l'exactitude de la classification des courbes que nous avons indiquée précédemment (56).

103. Les expressions les plus générales des anciennes coordonnées, en fonction des nouvelles, renferment les quatre indéterminées a, b, α et α', et par conséquent l'équation d'une courbe rapportée aux nouveaux axes contiendra aussi ces quatre indéterminées. On pourra donc, en général, faire évanouir quatre termes de cette équation en égalant leurs coefficients à zéro, ce qui donnera autant d'équations que nous avons d'inconnues a, b, α et α'. Mais on ne pourra pas se proposer d'en faire disparaître davantage, car alors on aurait plus d'équations de condition que d'indéterminées.

On voit par là que la transformation des coordonnées sera d'autant moins importante, pour simplifier l'équation d'une courbe, que cette équation sera d'un degré plus élevé, puisque le nombre des termes d'une équation augmente rapidement avec son degré*; aussi ne l'emploie-t-on guère, dans ce but, que pour simplifier les équations des courbes du second ordre.

104. La transformation des coordonnées peut encore servir à reconnaître si deux équations différentes représentent une même ligne, diversement située par rapport aux axes des coordonnées, ou deux lieux réellement distincts. On conçoit, en effet, que, dans le premier cas, il doit être possible de tracer deux axes qui soient placés, à l'égard du lieu de l'une de ces équations, absolument de la même manière que les axes auxquels le lieu de la seconde est rapporté le sont relativement à ce second lieu : par conséquent, en rapportant le premier lieu à ce nouveau système d'axes, son équation devra

---

* La formule qui donne le nombre des termes d'une équation du degré m à deux inconnues, est (*Algèbre*, 487)

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

de sorte que lorsqu'on a une équation complète du quatrième degré, on ne peut espérer que de réduire de 15 à 11 le nombre de ses termes.

devenir identique avec celle de l'autre. On substituera donc les valeurs de x et de y données par les formules générales de la transformation des coordonnées dans l'une des équations proposées, et il faudra qu'on puisse la rendre identique avec l'autre, en disposant convenablement des deux quantités *linéaires* a et b, et de l'une des deux quantités *angulaires* α et α'; car, les nouveaux axes devant faire les mêmes angles que les anciens, on a la relation $\alpha'-\alpha=\theta$. Si l'identification des deux équations est impossible, on en conclura que leurs lieux géométriques sont tout à fait distincts.

1[er] Exemple. *Les équations*

$$16y^2-24xy+9x^2-15y-20x+25=0,$$
$$y^2-2y-x-1=0,$$

représentent-elles les mêmes lignes? (On suppose que les axes des coordonnées sont rectangulaires.)

Je substitue dans la deuxième les valeurs de x et de y données par les formules

$$x=a+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \quad y=b+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes aussi rectangulaires, et en identifiant l'équation résultante avec la première des équations proposées, après les avoir divisées chacune par le coefficient de y^2, on trouvera

$$-\frac{3}{2}=2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \frac{9}{16}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad -\frac{15}{16}=\frac{2b\cos\alpha-2\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$
$$-\frac{5}{4}=\frac{2b\sin\alpha-2\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \frac{25}{16}=\frac{b^2-2b-a-1}{\cos^2\alpha}.$$

On en tire

$$\tan\alpha=-\frac{3}{4}, \quad \cos\alpha=\frac{4}{5}, \quad \sin\alpha=-\frac{3}{5}, \quad b=1, \quad a=-3,$$

valeurs réelles et finies, qui vérifient les cinq équations précédentes. Donc les courbes proposées sont identiques.

2[e] Exemple. *Deux courbes sont représentées par la même équation*

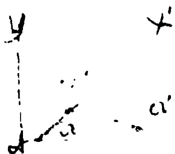
$$x^2+y^2=1,$$

mais l'une est rapportée à des axes rectangulaires, et l'autre

à des axes inclinés l'un sur l'autre de 150° : *sont-elles identiques ou différentes ?*

Je prends les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangles à un système d'axes faisant entre eux un angle de 150°. Ces formules sont

$$x = a + x' \cos\alpha - y' \cos(30^\circ - \alpha),$$
$$y = b + x' \sin\alpha + y' \sin(30^\circ - \alpha);$$



Je les substitue dans l'équation proposée, et il vient

$$x^2 + y^2 + 2\cos 30^\circ xy + \left.\begin{matrix} b\sin(30^\circ-\alpha) \\ -a\cos(30^\circ-\alpha) \end{matrix}\right| 2y + \left.\begin{matrix} b\sin\alpha \\ +a\cos\alpha \end{matrix}\right| 2x + \left.\begin{matrix} a^2 \\ +b^2 \\ -1 \end{matrix}\right\} = 0,$$

d'où l'on voit que les deux courbes sont différentes; car, pour que l'équation précédente pût s'identifier avec

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

il faudrait que l'on eût $\cos 30^\circ = 0$, et l'on sait que

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

105. Proposons-nous maintenant de chercher les formules nécessaires pour passer d'un système de coordonnées rectilignes à un système de coordonnées polaires.

Soient xX et yY les axes rectilignes, θ l'angle qu'ils for- Fig. 43.
ment ; O′ le pôle, et O′V l'axe polaire. Nous fixerons la position de ce nouveau système d'axes, en nous donnant les coordonnées a et b du pôle, et l'angle α que l'axe polaire O′V fait avec une parallèle menée par le pôle à la partie positive de l'axe des abscisses. Cet angle α peut varier depuis 0° jusqu'à 360°. Soient M un point quelconque, $\mathrm{OP} = x$ et $\mathrm{MP} = y$, ses coordonnées rectilignes, et $\mathrm{O'M} = \rho$ et $\mathrm{MO'V} = \omega$, ses coordonnées polaires. Je mène la droite OU perpendiculaire sur yY, et je projette la ligne brisée OPMO′AO sur OU : nous aurons

$$x \sin \mathrm{YOX} = \rho \sin \mathrm{MO'Y'} + a \sin \mathrm{YOX},$$

et par conséquent (95)

$$y \sin \mathrm{YOX} = \rho \sin \mathrm{MO'X'} + b \sin \mathrm{YOX}$$

Donc, en observant que $MO'Y' = \theta - \omega - \alpha$,

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{\rho \sin(\theta - \omega - \alpha)}{\sin\theta} \\ y &= b + \frac{\rho \sin(\omega + \alpha)}{\sin\theta} \end{aligned}\right\} \quad [6].$$

Comme ces formules ont été établies en supposant que les axes des coordonnées rectilignes faisaient des angles aigus avec l'axe de projection, que les coordonnées des points O' et M étaient positives, et que $(\alpha + \omega)$ était moindre que θ, on pourrait douter de leur généralité; mais en raisonnant comme nous l'avons fait au n° **96**, on reconnaîtra facilement que cette crainte serait mal fondée*.

Si les axes rectilignes sont rectangulaires, les formules précédentes deviendront

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \rho\cos(\omega + \alpha) \\ y &= b + \rho\sin(\omega + \alpha) \end{aligned}\right\} \quad [7];$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \rho\cos\omega \\ y &= b + \rho\sin\omega \end{aligned}\right\} \quad [8],$$

si, de plus, l'axe polaire est parallèle à l'axe des x et dirigé dans le sens des abscisses positives.

106. Si l'on voulait revenir d'un système de coordonnées polaires au système primitif des coordonnées rectilignes, il faudrait tirer des formules [6], [7] ou [8] les valeurs de ρ et

---

Fig. 44. * On peut, au reste, les vérifier facilement, en considérant, par exemple, le cas de la figure 44. Les angles θ, ω et α seront mesurés par les arcs ab, $dabc$ et $abcd$. Je projette le polygone OPMO'AO sur la perpendiculaire OU à Yy : les côtés OP et MO' seront dirigés dans le même sens, par rapport à l'axe Yy, mais AO le sera en sens contraire, de sorte que la projection de OP sera égale à la projection de AO, diminuée de celle de MO'; or, les projections de OP et de AO sont $x\sin\theta$ et $a\sin\theta$. Quant à celle de MO', elle est égale au produit de ρ par le cosinus de l'angle aigu formé par MO' avec OU, ou par le sinus de l'angle PMO', lequel sinus est égal à celui de MO'A; mais l'arc bc, qui mesure cet angle, est égal à

$$dabc - ba - da = [\omega - \theta - (360° - \alpha)]:$$

donc la projection de MO' est $\rho\sin(\omega - \theta + \alpha) = -\rho\sin(\theta - \omega - \alpha)$; donc enfin

$$x\sin\theta = a\sin\theta + \rho\sin(\theta - \omega - \alpha).$$

Donc la première des formules [6] convient au cas actuel. On vérifierait de même la seconde.

de ω en fonction de x et de y, et les substituer dans l'équation polaire. Supposons, par exemple, que les coordonnées rectilignes soient rectangulaires ; on commencera par faire passer a et b dans les premiers membres des équations [7], ce qui donnera

$$x-a=\rho\cos(\omega+\alpha),\quad y-b=\rho\sin(\omega+\alpha),$$

d'où l'on tirera facilement

$$\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\quad \operatorname{tang}(\omega+\alpha)=\frac{y-b}{x-a}\qquad [9],$$

et par suite (*Trig.*, **48** et **28**), les valeurs de tang ω, sin ω, et cos ω ; au moyen de ces formules, il faudra éliminer ρ et ω de l'équation proposée.

107. Ces mêmes formules [9] peuvent servir pour *passer d'un système de coordonnées polaires à un système de coordonnées rectilignes rectangulaires.* Nous observerons toutefois que, pour obtenir la position des axes sur lesquels on devra les compter, il faudra mener par le pôle O', et au-dessous de l'axe polaire, une droite O'X' qui fasse avec cet axe un angle égal à α, et sur O'X' une perpendiculaire O'Y' qui soit dirigée au-dessus de O'X'. On prendra ensuite, sur les prolongements de ces deux droites, des distances O'B et O'A respectivement égales à a et b, et en tirant par les points A et B des parallèles xX et yY à O'X' et à O'Y', on aura les axes des coordonnées. N'oublions pas que les distances a et b devraient être portées sur O'X' et sur O'Y' si elles étaient négatives.

Prenons pour exemple l'équation

$$\rho^2-2c\cos\omega.\rho-c^2=0.$$

De la formule $\operatorname{tang}(\omega+\alpha)=\frac{y-b}{x-a}$, je tire

$$\operatorname{tang}\omega=\frac{y-b-(x-a)\operatorname{tang}\alpha}{x-a+(y-b)\operatorname{tang}\alpha},$$

d'où

$$\cos\omega=\frac{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}};$$

en substituant cette valeur et celle de ρ dans l'équation proposée, il viendra

$$(x-a)^2+(y-b)^2-2c(x-a)\cos\alpha-2c(y-b)\sin\alpha-c^2=0,$$

qui représente une circonférence (70). Si l'on veut que l'origine soit au centre, il faudra disposer des indéterminées a, b et α, de manière à faire évanouir les premières puissances de x et de y (68). En conséquence, on développera les calculs indiqués, et on égalera à zéro les coefficients de x et de y, ce qui donnera

$$a+c\cos\alpha=0,\quad \text{d'où}\quad a=-c\cos\alpha;$$
$$b+c\sin\alpha=0,\quad \text{d'où}\quad b=-c\sin\alpha.$$

Fig. 45. Ainsi, l'angle α reste tout à fait indéterminé. Pour construire ce centre, on mènera par le pôle la droite quelconque OX′ et la perpendiculaire OY′ à celle-ci ; puis, ayant pris $OC=c$, on abaissera du point C une perpendiculaire CA sur OX′, et le point C ayant pour coordonnées $-OA=-c\cos\alpha$ et $-OB=-c\sin\alpha$, sera le centre. Remplaçant enfin a et b par leurs valeurs, l'équation de la circonférence se réduira à

$$x^2+y^2-2c^2=0,$$

de sorte que si du point C comme centre, avec un rayon égal à $c\sqrt{2}$, on décrit une circonférence, on aura le lieu de l'équation proposée.

CHAPITRE IV.

DISCUSSION DES LIGNES DU PREMIER ORDRE.

108. Les lignes du premier ordre sont représentées par une équation du premier degré à deux indéterminées (56). La forme générale d'une pareille équation est

$$Ay+Bx+C=0 \qquad [1];$$

ainsi, il s'agit de reconnaître quelle est la nature et la forme de la ligne ou des lignes que cette équation peut représenter.

D'abord, si l'un des coefficients A ou B est nul, on sait que le lieu de l'équation [1] est une parallèle menée à l'axe des y ou à celui des x à la distance $-\frac{C}{B}$ ou $-\frac{C}{A}$ de cet axe (53). Nous supposerons donc que ni A ni B ne soient nuls, et alors nous pourrons résoudre l'équation [1] par rapport à l'une des deux variables, y par exemple, ce qui donnera

$$y=ax+b \qquad [2],$$

en faisant, pour abréger,

$$-\frac{B}{A}=a \quad \text{et} \quad -\frac{C}{A}=b.$$

Cela posé, on voit immédiatement, à l'inspection de cette formule, que si l'on tire une parallèle BR à l'axe des x, à la distance $OB=b$ de cet axe, il suffira, pour obtenir tous les points de la ligne qu'elle représente, d'ajouter à l'ordonnée de chaque point de cette parallèle le produit de l'abscisse correspondante par le nombre constant a, en ayant égard aux signes des deux facteurs de ce produit. Si donc on prend sur l'axe des x les abscisses quelconques OP, OP', OP''..., et qu'ayant mené par les points P, P', P''..., des parallèles à l'axe des y, on porte sur ces droites, et à partir de BR, des quantités MQ, M'Q', M''Q''..., respectivement égales à a.OP, a.OP', a.OP''..., les points M, M', M''..., ainsi déterminés, appartiendront au lieu demandé. Comme les rapports $\frac{MQ}{BQ}$, $\frac{M'Q'}{BQ'}$, $\frac{M''Q''}{BQ''}$..., sont Fig. 46.

égaux à a, et par conséquent égaux entre eux, on voit que les triangles BMQ, BM'Q', BM''Q''... sont semblables et que les angles en B étant ainsi égaux, les points M, M', M''... sont en ligne droite avec le point B, qui est le point où le lieu cherché coupe l'axe des y, puisqu'en faisant $x=0$ dans [2], il en résulte $y=b$. Donc *l'équation* [2] *représente une ligne droite qui coupe l'axe des* y *à la distance* b *de l'origine.*

Cette constante b se nomme en conséquence *l'ordonnée à l'origine.*

En répétant ici ce que nous avons dit au n° **75**, on verra que *la constante* a *est égale au rapport des sinus des angles que fait la droite avec l'axe des* x *et avec celui des* y. Donc, *si les axes des coordonnées sont rectangulaires, la constante* a *sera la tangente trigonométrique de l'angle que la droite fait avec l'axe des abscisses.*

Par opposition avec la constante b qui est *linéaire*, cette constante a se nomme *le coefficient angulaire ou d'inclinaison de la droite* représentée par l'équation [2].

109. Si $C=0$, on a $b=0$: alors le lieu de l'équation [2], qui se réduit à

$$y=ax \qquad [3],$$

passe par l'origine, et la constante a conserve la même signification que précédemment. Donc, *quand l'équation du premier degré à deux indéterminées n'a pas de terme indépendant de ces variables, elle représente une droite qui passe par l'origine des coordonnées.*

110. Si $B=0$, on a $a=0$, et par conséquent $\sin\alpha=0$, d'où $\alpha=0°$ ou $\alpha=180°$: ainsi la droite, représentée par l'équation [2], est parallèle à l'axe des x, et en est distante de la quantité $b=-\frac{C}{A}$, ce qui est conforme avec ce qui précède (**108**).

111. Si $A=0$, on a $b=\infty$ et $a=\infty$, d'où $\alpha=\theta$, ce qui indique que la droite est parallèle à l'axe des y. D'un autre côté, le lieu de l'équation [2] coupe l'axe des x à la distance $-\frac{b}{a}$ de l'origine, comme on le voit en faisant dans cette équation $y=0$; mais $-\frac{b}{a}=\frac{C}{A}:-\frac{B}{A}=-\frac{C}{B}$; donc

cette parallèle à l'axe des y en est distante de la quantité $-\frac{C}{B}$. Nous avons vu, en effet, que, quand $A=0$, l'équation [1] représente une pareille droite (**108**); donc l'équation [2] convient au cas où a et b sont infinis. Cette vérification était nécessaire; car la construction du n° **108** ne pouvant être exécutée dans le cas actuel, on ne savait point ce que cette équation représentait alors.

Au reste, la droite qui a pour équation $x=-\frac{C}{B}$ est la limite des positions successives que prend le lieu de l'équation [2], lorsqu'on suppose que a et b augmentent indéfiniment, tout en conservant le même rapport, de manière à devenir infinis en même temps.

112. On voit donc que l'équation [2] est aussi générale que l'équation [1], quoiqu'on l'en ait déduite, en supposant que A ne fût pas nul. Seulement, pour trouver ce qu'elle représente quand a et b deviennent infinis, il faut la diviser par a, avant d'y introduire ces hypothèses, et remplacer ensuite le rapport $\frac{b}{a}$ par sa limite, qui doit être alors donnée par la question que l'on traite.

113. Pour construire le lieu de l'équation [1], on déterminera deux points de sa direction en choisissant, pour plus de simplicité, ceux où il rencontre chacun des deux axes. Ainsi on fera successivement

$$x=0,\quad \text{ce qui donnera}\quad y=-\frac{C}{A},$$

$$\text{et}\quad y=0,\quad \text{.}\quad x=-\frac{C}{B};$$

puis on prendra sur l'axe des ordonnées une distance $OB=-\frac{C}{A}$, Fig. 46.
sur celui des abscisses une distance $OA=-\frac{C}{B}$, et en tirant une droite indéfinie par les points A et B, le lieu sera construit.

114. Si l'équation proposée n'a pas de terme indépendant, on n'aura à déterminer qu'un seul des points de son lieu, puisqu'on sait qu'il passe par l'origine; en conséquence, on fera x égal au coefficient A de y, et il en résultera $y=-B$. On construira donc le point $(A, -B)$, et en le joignant à l'ori-

gine par une droite indéfinie, on aura le lieu de l'équation $Ay+Bx=0$.

115. La vérité de la réciproque du théorème que nous avons établi au n° **108**, c'est-à-dire que *l'équation d'une ligne droite est nécessairement du premier degré à une ou à deux variables*, résulte immédiatement de la solution du problème du n° **73**; mais on peut encore l'établir, en prouvant que *l'équation* [2] *est susceptible de représenter toute droite tracée sur le plan des axes.* En effet si, en laissant a constant nous faisons varier b depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, il est clair que la droite, en glissant parallèlement à elle-même, décrira le plan tout entier. Si, au contraire, b restant constant, nous faisons varier l'angle α depuis 0° jusqu'à 180°, ce qui revient à faire varier a depuis zéro jusqu'à $+\infty$ et jusqu'à $-\infty$, la droite, représentée par l'équation [2], prendra toutes les positions possibles autour du point B; donc, en donnant des valeurs convenables à a et à b, on fera coïncider le lieu de l'équation $y=ax+b$ avec toute droite tracée sur le plan; donc cette équation représentera cette droite.

116. L'équation générale d'une ligne droite renfermant deux indéterminées, et cette droite pouvant être construite quand ces deux indéterminées sont connues, on voit que deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour déterminer une ligne droite.

La recherche des quantités a et b, d'après les conditions données et la combinaison des lignes que représente l'équation

$$y=ax+b,$$

conduisent à différents problèmes dont il est très-important de retenir les solutions; car on y a sans cesse recours, lorsque l'on veut appliquer l'analyse à toute question de géométrie élémentaire ou générale.

117. PROBLÈME. *Trouver l'équation d'une ligne droite assujettie à passer par deux points donnés.*

Soient (x', y') et (x'', y'') les coordonnées des deux points donnés : l'équation de la droite demandée est de la forme (**115**)

$$y=ax+b \qquad [2],$$

a et b étant deux indéterminées dont il s'agit de trouver les

valeurs, d'après les conditions de la question. Or, si nous voulons d'abord exprimer que la droite passe par le premier point, il faudra écrire que les coordonnées x' et y' de ce point satisfont à l'équation de cette droite; nous aurons ainsi

$$y'=ax'+b \qquad [4].$$

Le système des équations [2] et [4] représente une droite qui passe par le point (x', y'); mais nous pouvons exprimer la même chose par une seule équation; car, si nous substituons dans [2], au lieu de a ou de b sa valeur tirée de [4], nous aurons évidemment écrit dans la première de ces équations la condition exprimée par la seconde. Or, ce calcul revient à éliminer a ou b entre elles; et comme l'élimination de b se fait par une simple soustraction, c'est celle-là que nous effectuerons. Il viendra ainsi

$$y-y'=a(x-x') \qquad [5],$$

équation générale de toute droite assujettie à passer par le point (x', y'); car a étant encore indéterminé, cette équation peut représenter telle droite que l'on voudra mener par ce point. (La forme de l'équation [5] doit être retenue avec soin.)

Exprimons maintenant que la droite demandée passe par le second point (x'', y''). Il suffira, pour cela, d'écrire que ses coordonnées vérifient l'équation [5], ce qui donnera

$$y''-y'=a(x''-x'), \quad \text{d'où} \quad a=\frac{y''-y'}{x''-x'}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans [5], on y exprimera que son lieu passe par le point (x'', y''); et comme il passe déjà par le point (x', y'), il ne sera autre que la droite demandée. Donc l'équation de cette droite est

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x') \qquad [6].$$

Il est facile de vérifier que cette équation résout la question; car elle est satisfaite, si l'on y remplace x et y respectivement par x' et par y', ou par x'' et par y''.

Si l'on suppose $y''=y'$, l'équation [6] se réduit à

$$y=y',$$

équation d'une parallèle à l'axe des x; et, en effet, les deux

points donnés, ayant la même ordonnée, sont ainsi équidistants de l'axe des abscisses.

Si $x''=x'$, le coefficient de x devient infini, ce qui nous indique que l'angle α est égal à celui des axes, et qu'ainsi l'équation [6] représente alors une parallèle à l'axe des y. Pour déterminer cette parallèle, nous allons chercher le point où elle coupe l'axe des abscisses, et, pour cela, nous ferons $y=0$ dans [6], mais avant d'y introduire l'hypothèse $x''=x'$; nous trouverons ainsi

$$x=x'-\frac{y'(x''-x')}{y''-y'}$$

pour l'abscisse de ce point. Supposons maintenant $x''=x'$, sa valeur se réduira à

$$x=x',$$

comme cela devait être, puisque par hypothèse notre parallèle passe par deux points situés l'un et l'autre à la distance x' de l'axe des y.

Remarquons qu'en vertu de la valeur trouvée plus haut pour a,

$$a=\frac{y''-y'}{x''-x'},$$

le coefficient angulaire d'une droite assujettie à passer par deux points est égal au rapport de la différence de leurs ordonnées à la différence de leurs abscisses.

118. Si l'un des points coïncide avec l'origine, $y''=0$, $x''=0$, et alors l'équation [6] se réduit à

$$y=\frac{y'}{x'}x.$$

Ainsi, *l'équation de la droite, qui joint un point donné à l'origine, se forme en égalant l'ordonnée courante au produit de l'abscisse correspondante, multipliée par le rapport de l'ordonnée du point donné à son abscisse.*

119. Si l'on suppose $y'=0$ et $x''=0$, l'équation [6] se réduira à

$$\frac{y}{y''}+\frac{x}{x'}=1,$$

équation remarquable par sa forme symétrique, et qui re-

présente une droite déterminée par les coordonnées x' et y'' des points où elle coupe les axes des x et des y.

120. Problème. *Étant données les équations de trois droites, trouver les relations qui doivent exister entre leurs coefficients pour que ces droites concourent en un même point.*

Soient

$$y=ax+b,\quad y=a'x+b',\quad y=a''x+b'',$$

les équations des trois droites : si l'on résout deux de ces équations, les valeurs de x et de y que l'on en tirera seront les coordonnées du point d'intersection des droites qu'elles représentent : donc, pour que les trois droites concourent, il faut et il suffit que ces valeurs de x et de y vérifient la troisième des équations proposées. On obtiendra donc cette équation de condition en éliminant x et y entre les équations des trois droites. Cette élimination conduit aux calculs suivants :

$$0=(a-a')x+b-b',\quad 0=(a-a'')x+b-b'';$$

d'où $$(b-b')(a-a'')-(b-b'')(a-a')=0.$$

121. Problème. *Trouver l'angle de deux droites dont les équations sont données.*

Soient $$y=ax+b,\quad y=a'x+b',$$

les équations des droites données, α et α' les angles qu'elles font avec l'axe des x, et θ l'angle des axes ; nous aurons donc Fig. 47.

$$a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\quad a'=\frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta-\alpha')}\qquad [7].$$

Cela posé, nos droites forment avec l'axe des abscisses un triangle dont l'angle au sommet est l'angle cherché, que j'appellerai V, et qui a pour angles, à la base, le plus petit des angles α et α' et le supplément du plus grand, de sorte que

$$\mathrm{V}=\pm(\alpha-\alpha'),$$

suivant que α est plus grand ou plus petit que α' ; par conséquent

$$\operatorname{tang}\mathrm{V}=\pm\frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\alpha'}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha'}.$$

Le problème sera donc résolu, si nous pouvons calculer

tang α et tang α' en fonction des quantités connues a et a'. Or, on tire de la première des équations [7], en développant sin $(\theta-\alpha)$,

$$a(\sin\theta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\theta)=\sin\alpha;$$

d'où, en divisant par cos α,

$$a(\sin\theta-\tan\alpha\cos\theta)=\tan\alpha,$$

et par suite $$\tan\alpha=\frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta}\ *;$$

donc aussi $$\tan\alpha'=\frac{a'\sin\theta}{1+a'\cos\theta}.$$

Substituant ces valeurs de tang α et de tang α' dans l'expression de tang V, il viendra, après avoir multiplié les deux termes par $(1+a\cos\theta)(1+a'\cos\theta)$ et réduit,

$$\tan V=\pm\frac{(a-a')\sin\theta}{1+aa'+(a+a')\cos\theta} \qquad [8].$$

Les deux valeurs égales et de signes contraires que donne cette formule satisfont également bien à la question, parce que deux droites qui se coupent forment deux angles différents, qui sont supplémentaires.

122. Si les droites dont on a les équations doivent se couper à angles droits, il faut et il suffit que la valeur de tang V soit infinie : or, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que le dénominateur de cette valeur soit nul, sans que le numérateur le soit, ou que le numérateur soit infini, sans que le dénominateur soit aussi infiniment grand.

On a donc, dans le premier cas,

$$1+aa'+(a+a')\cos\theta=0 \qquad [9].$$

Or le numérateur ne peut pas alors être nul, sans quoi a serait égal à a', et l'équation précédente deviendrait

$$a^2+2a\cos\theta+1=0,$$

équation dont les racines sont imaginaires.

---

* Cette formule donne le moyen de calculer l'angle que fait avec l'axe des x, une droite dont on a l'équation en coordonnées obliques. Il serait facile de la rendre calculable par logarithmes. Toutefois il vaut mieux se reporter à la première des équations [7], et on en tirera $\tan\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{a-1}{a+1}\tan\frac{\theta}{2}$. (*Trig.*, 62).

Dans le second cas, il faut que a ou a' soit une quantité infinie. Supposons que ce soit a, alors on divisera les deux termes de la valeur de tang V par a, ce qui donnera

$$\text{tang}\,V = \pm \frac{\left(1-\frac{a'}{a}\right)\sin\theta}{\frac{1}{a}+a'+\left(1+\frac{a'}{a}\right)\cos\theta},$$

d'où, en faisant $a=\infty$,

$$\text{tang}\,V = \pm \frac{\sin\theta}{a'+\cos\theta}.$$

Ainsi, la condition $a=\infty$ ne suffit pas pour rendre infinie la valeur de tang V, il faut encore que

$$a' = -\cos\theta.$$

Mais j'observe que ces deux valeurs de a et de a' vérifient l'équation [9]; car si, après avoir divisé ses deux membres par a, on y fait $a=\infty$ et $a'=-\cos\theta$, elle se réduit à $0=0$: donc l'équation [9] est la condition nécessaire et suffisante pour que les droites représentées par les équations

$$y=ax+b \quad \text{et} \quad y=a'x+b',$$

se coupent à angles droits.

123. Si les axes des coordonnées sont rectangulaires, $\cos\theta=0$, et l'équation [9] se réduit à

$$1+aa'=0, \quad \text{d'où} \quad a'=-\frac{1}{a},$$

ce qui nous apprend que, *pour que deux droites rapportées à un système de coordonnées rectangulaires soient perpendiculaires entre elles, il faut et il suffit que les tangentes trigonométriques des angles qu'elles font avec l'axe des* x, *c'est-à-dire leurs coefficients angulaires, soient réciproques et de signes contraires.*

124. Si l'on veut que les deux droites soient parallèles, il faudra que l'on ait tang $V=0$, et qu'ainsi le numérateur soit nul sans que le dénominateur le soit, ou bien que le dénominateur soit infini, sans qu'il en soit de même du numérateur.

Dans le premier cas, on aura

$$a=a',$$

et nous avons vu tout à l'heure que, quand cette condition est remplie, le dénominateur ne peut pas être nul.

Pour que le dénominateur soit infini, il faut que l'une des quantités a et a' soit elle-même infinie; mais $a=\infty$ donne $\tang V = \pm \frac{\sin\theta}{a'+\cos\theta}$: donc il faut encore que $a'=\infty$ pour que tang V soit nulle, et ces deux conditions sont suffisantes; car, si l'on divise les deux termes du second membre de l'équation [8] par aa', il viendra

$$\tang V = \pm \frac{\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a}\right)\sin\theta}{\frac{1}{aa'}+1+\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a}\right)},$$

et par conséquent tang V = 0, si a et a' sont infinis. Mais $a=\infty$ et $a'=\infty$ satisfont à la condition

$$a=a';$$

donc, *pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires soient égaux*. Et, en effet, lorsque deux droites sont parallèles, elles font des angles égaux avec l'axe des abscisses, et par conséquent les coefficients de x dans leurs équations doivent être égaux.

Il suit de là et de ce qui précède (**117**) que l'équation de la parallèle menée par le point (x', y') à la droite

$$y=ax+b,$$

sera

$$y-y'=a(x-x').$$

125. Problème. *Mener par un point donné une droite qui fasse un angle connu avec une droite donnée, et trouver la longueur de la partie de la seconde droite, qui est comprise entre la première et le point donné, en supposant que les axes des coordonnées soient rectangulaires.*

Fig. 47. Soient (x', y') les coordonnées du point donné M,

$$y=ax+b \qquad [2],$$

l'équation de la droite donnée AB, et V l'angle connu, dont nous appellerons m la tangente. La droite demandée de-

vant passer par le point (x', y'), son équation sera de la forme (117)

$$y-y'=a'(x-x') \qquad [10],$$

a' étant la tangente de l'angle inconnu qu'elle fait avec l'axe des x. Or, cette droite doit faire avec la première un angle dont la tangente est m ; on aura donc, en vertu de la formule [8] du n° **121**, en y faisant $\theta=90°$,

$$m=\pm\frac{a-a'}{1+aa'}, \quad \text{d'où} \quad a'=\frac{a\mp m}{1\pm am}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation [10], il viendra

$$y-y'=\frac{a\mp m}{1\pm am}(x-x') \qquad [11].$$

Telle est l'équation de la droite demandée. Cette équation est double, parce qu'on peut mener par un point donné deux droites qui fassent le même angle avec une autre droite.

126. Si l'on veut que la droite demandée soit perpendiculaire sur la droite donnée, on fera $m=\infty$, dans l'équation [11], et, pour cela, on divisera d'abord par m les deux termes du coefficient de x, ce qui lui donnera la forme

$$\frac{\frac{a}{m}\mp 1}{\frac{1}{m}\pm a},$$

quantité qui se réduit à $-\frac{1}{a}$ pour $m=\infty$, conformément à la règle du n° **123**. Ainsi l'équation de la perpendiculaire abaissée du point (x', y') sur la droite [2] est

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x').$$

127. Cherchons actuellement la longueur de la partie de la droite [11] comprise entre la droite et le point donnés. Or il faut, pour l'obtenir, déterminer d'abord (**66**) la différence des ordonnées et celle des abscisses du point (x', y') et du point d'intersection des lieux des équations [2] et [11]. Les ordonnées de ce dernier point étant les valeurs de x et de y qui vérifient ces deux équations, nous pourrons les représenter par x et par y, et il s'agira de tirer des équations [2] et [11] les différences $(x-x')$ et $(y-y')$. Mais

ces deux inconnues sont en évidence dans la seconde de ces équations; il faut donc les mettre aussi en évidence dans la première, ce qui se fera en retranchant y' de ses deux membres, et en ajoutant au second membre $+ax'-ax'$; de cette manière, l'équation [2] deviendra

$$y-y'=a(x-x')-y'+ax'+b.$$

En retranchant de ses deux membres ceux de l'équation [11], y sera éliminé, et on tirera facilement de l'équation résultante

$$\pm\frac{m(1+a^2)}{1\pm am}(x-x')-y'+ax'+b=0,$$

la valeur de $(x-x')$,

$$x-x'=\pm\frac{(y'-ax'-b)(1\pm am)}{m(1+a^2)}.$$

En substituant enfin cette valeur dans l'équation [11], on aura

$$y-y'=\pm\frac{(y'-ax'-b)(a\mp m)}{m(1+a^2)}.$$

Si donc on désigne par δ la longueur demandée, on trouvera, d'après la formule [4] du n° 66,

$$\delta^2=\frac{(y'-ax'-b)^2[(a\mp m)^2+(1\pm am)^2]}{m^2(1+a^2)^2}.$$

Il est facile de voir que la quantité renfermée dans les accolades revient à $(1+a^2)(1+m^2)$, et que par conséquent la valeur de δ^2 se réduit à

$$\delta^2=\frac{(y'-ax'-b)^2(1+m^2)}{m^2(1+a^2)},$$

d'où l'on tire enfin

$$\delta=\pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.\sqrt{1+\frac{1}{m^2}} \qquad [12],$$

qui est la formule demandée.

128. δ représente la distance de deux points, et n'est pas ici susceptible d'opposition de direction : c'est donc une grandeur absolue, de sorte qu'*il faudra rejeter celui des deux signes + ou —, qui donnerait une valeur négative pour* δ. Or, si l'on observe que $ax'+b$ est l'ordonnée du point de la droite donnée qui a x' pour abscisse, on verra

que le facteur $(y'-ax'-b)$ sera positif ou négatif, suivant que le point donné sera situé au-dessus ou au-dessous de cette droite relativement à l'axe des x; d'où l'on conclut que *si le point* (x', y') *et la droite* $y=ax+b$, *sont donnés de position*, il ne sera pas nécessaire de connaître les valeurs numériques des quantités x', y', a et b pour savoir lequel des deux signes $+$ ou $-$ il faut conserver dans la valeur de δ. *On prendra le signe* SUPÉRIEUR *ou le signe* INFÉRIEUR, *suivant que le point sera* AU-DESSUS *ou* AU-DESSOUS *de la droite, par rapport à l'axe des abscisses.*

Mais si le point (x', y') n'est pas donné, et qu'il faille, au contraire, déterminer ses coordonnées au moyen de la valeur de δ, la fonction $(y'-ax'-b)$ étant elle-même inconnue, son signe est indéterminé, et il faut en conséquence employer la formule [12] avec le double signe $\pm$. Il en est de même pour les formules suivantes [13], [14] et [15].

129. La formule [12] nous montre que la valeur de δ est d'autant moindre que celle de m est plus grande, et que, par conséquent, cette valeur sera minimum quand m sera maximum, c'est-à-dire quand m sera infinie; mais alors la droite représentée par l'équation [11] est perpendiculaire sur le lieu de l'équation [2] : nous voilà donc ramenés à ce théorème de géométrie élémentaire : *Si une perpendiculaire et des obliques à une droite partent d'un même point, la perpendiculaire est plus courte que toute oblique; et de deux obliques, celle qui fait le plus petit angle avec la droite est la plus grande.*

En désignant par p la perpendiculaire abaissée du point (x', y') sur la droite [2], nous aurons pour expression de cette perpendiculaire

$$p=\pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}} \qquad [13].$$

D'un autre côté, si l'on suppose l'angle $V=45°$, ce qui exige que $m=1$, la valeur de δ deviendra

$$\delta=\pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{2}=p\sqrt{2}:$$

or, δ est alors la diagonale du carré dont p est le côté : donc le rapport de cette diagonale au côté de ce carré est $\sqrt{2}$.

Si l'on remplace, dans la formule [13], a et b par $-\frac{B}{A}$ et $-\frac{C}{A}$, il viendra

$$p=\pm\frac{Ay'+Bx'+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad [14].$$

Ainsi *la longueur de la perpendiculaire abaissée du point* (x', y') *sur la droite représentée par l'équation*

$$Ay+Bx+C=0$$

est exprimée par une fraction qui a pour numérateur le premier membre de l'équation proposée, dans lequel on a remplacé x *et* y *par les coordonnées du point, et pour dénominateur la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de* x *et de* y.

Si les axes sont obliques, on trouvera facilement, en suivant la même marche que précédemment,

$$p=\pm\frac{(Ay'+Bx'+C)\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}} \qquad [15],$$

mais on peut y parvenir plus rapidement de la manière suivante.

Fig. 48. Soit, en effet, $MP=p$ la perpendiculaire abaissée du point M (x', y') sur la droite donnée AB; on a évidemment

$$p=MC.\sin C;$$

mais $\sin C=\sin(\theta-\alpha)$ et $MC=y'-CD=y'-ax'-b$, puisque l'équation de AB étant $y=ax+b$; l'ordonnée du point de cette droite, qui a x' pour abscisse, est $ax'+b$; donc

$$p=(y'-ax'-b)\sin(\theta-\alpha).$$

Or, de $$a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},$$

on tire d'abord $$\sin(\theta-\alpha)=\frac{\sin\alpha}{a},$$

et ensuite (**121**) $$\tang\alpha=\frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta},$$

d'où (*Trig.*, **28**) $$\sin\alpha=\pm\frac{a\sin\theta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}};$$

partant $$p=\pm\frac{(y'-ax'-b)\sin\theta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}}.$$

En remplaçant dans cette formule a et b par $-\frac{B}{A}$ et par $-\frac{C}{A}$, on trouvera que l'expression de la distance du point (x', y') à la droite, qui a pour équation $Ay+Bx+C=0$, est

$$p=\pm\frac{(Ay'+Bx'+C)\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}.$$

Nous allons faire quelques applications des formules trouvées précédemment.

130. Problème. *Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés.*

Soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les coordonnées des trois points rapportés à deux axes rectangulaires (*ce sont ceux qu'il faut, en général, préférer, lorsque l'on a des distances à exprimer ou des angles à faire entrer dans le calcul*) : (α, β) les coordonnées du centre, et r le rayon de la circonférence demandée ; son équation sera de la forme

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2 \qquad [16].$$

Nous exprimerons qu'elle passe par les points donnés, en écrivant que leurs coordonnées satisfont à son équation, ce qui nous donnera les trois équations de condition

$$\left.\begin{array}{l}(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2=r^2,\\(y''-\beta)^2+(x''-\alpha)^2=r^2,\\(y'''-\beta)^2+(x'''-\alpha)^2=r^2,\end{array}\right\} \qquad [17],$$

entre les trois inconnues α, β et r ; de sorte que, si l'on voulait avoir l'équation de la circonférence demandée, on devrait résoudre ces trois équations, et substituer, dans l'équation [16], les valeurs que l'on en aurait tirées pour α, β et r. Mais, comme notre objet est seulement d'arriver à un procédé géométrique pour tracer cette circonférence, nous voyons que l'inconnue de la question est le centre, et qu'ainsi il nous faut tâcher de déterminer les coordonnées α et β de ce centre. Éliminons donc r entre les équations [17]. Or, en retranchant les deux premières membre à membre, il vient

$$(y'-y'')(y'+y''-2\beta)+(x'-x'')(x'+x''-2\alpha)=0 \, [18].$$

Si on regarde α et β comme des coordonnées courantes, cette équation, qui est du premier degré par rapport à ces quantités, représentera une droite qui passe par le centre de la circonférence cherchée. Mais cette équation devient évidem-

ment identique, en y faisant $\beta=\frac{y'+y''}{2}$ et $\alpha=\frac{x'+x''}{2}$, de sorte que son lieu passe par le milieu de la droite qui joint les deux points (x', y') et (x'', y''); car on déduit facilement d'une propriété connue du trapèze (*Géom.* **376**), que *les coordonnées du milieu d'une droite sont les demi-sommes de celles de ses extrémités*. Il ne s'agit donc plus, pour déterminer ce lieu, que de trouver son inclinaison sur l'axe des x. La tangente de cette inclinaison est (**108**),

$$-\frac{x'-x''}{y'-y''},$$

puisque tel serait le coefficient de α, si on résolvait l'équation ci-dessus par rapport à β; mais la droite, qui joint les points (x', y') et (x'', y''), fait, avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente est (**117**)

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}:$$

on voit donc que ces deux tangentes sont réciproques et de signes contraires, et que par conséquent les droites correspondantes se coupent à angles droits (**123**). Ainsi l'équation [18] nous indique que le centre de la circonférence qui passe par les trois points (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') est situé sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint les deux premiers. Par la même raison, il se trouvera sur les perpendiculaires élevées sur les milieux des droites, qui vont du premier au troisième, et de celui-ci au second; d'où il semble résulter que le problème peut avoir trois solutions. Mais j'observe que les lieux de l'équation (18) et de ses deux analogues

$$(y'-y''')(y'+y'''-2\beta)+(x'-x''')(x'+x'''-2\alpha)=0 \quad [19],$$
$$(y''-y''')(y''+y'''-2\beta)+(x''-x''')(x''+x'''-2\alpha)=0 \quad [20],$$

concourent en un même point; car, l'une quelconque de ces trois équations étant la différence des deux autres*, tout

* Si, dans les équations [17], on transpose r^2 dans le premier membre, ces équations pourront être représentées par

$$A'=0,\quad A''=0,\quad A'''=0,$$

de sorte que les équations [18], [19] et [20] le seront par

$$A'-A''=0,\quad A'-A'''=0 \quad\text{et}\quad A''-A'''=0,$$

et on voit que l'une de celles-ci s'obtient en retranchant les deux autres membre à membre.

couple de valeurs de α et de β qui vérifiera celles-ci satisfera nécessairement à l'autre; ainsi, le problème n'a qu'une solution. Il sera possible, si les droites représentées par les équations [18] et [19], par exemple, se coupent : il faut donc que leurs coefficients angulaires soient inégaux (**124**), et qu'on ait en conséquence

$$-\frac{x'-x''}{y'-y''} \gtrless -\frac{x'-x'''}{y'-y'''},$$

ou $$(y'-y''')(x'-x'')-(y'-y'')(x'-x''')\gtrless 0,$$

ce qui signifie que les trois points (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') ne sont pas en ligne droite; car, l'équation de la droite qui passe par les deux premiers étant

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x'),$$

on aura la condition nécessaire et suffisante pour que les trois points soient en ligne droite, en exprimant que les coordonnées (x''', y''') du troisième satisfont à cette équation; ce qui donnera

$$y'''-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x'''-x'),$$

ou $$(y'-y''')(x'-x'')-(y'-y'')(x'-x''')=0.$$

Une circonférence ne peut donc pas être coupée en plus de deux points par une ligne droite, et les perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle concourent en un même point.

131. PROBLÈME. *Trouver le lieu de tous les points desquels on peut mener des tangentes égales à deux circonférences données.*

Soient (x, y) les coordonnées rectangulaires de l'un des points dont il s'agit, (α, β) et (α', β') celles des centres des deux circonférences données, r et r' les rayons de ces circonférences, et t la longueur de la tangente issue du point (x, y) : on aura, en vertu de la formule [3] du n° **66**, Fig. 49.

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=t^2+r^2,$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2=t^2+r'^2;$$

car la droite qui joint le point (x, y) au centre de l'un des

cercles est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont le rayon de ce cercle et la tangente t. Si l'on retranche ces deux équations membre à membre, l'indéterminée t disparaîtra, et l'équation finale résultante

$$(2y-\beta-\beta')(\beta'-\beta)+(2x-\alpha-\alpha')(\alpha'-\alpha)-r^2+r'^2=0 \quad [21]$$

sera par conséquent celle du lieu demandé. Ce lieu est donc une ligne droite. On l'appelle l'*axe radical des deux circonférences*.

Remarquons que cette équation est celle même qu'on obtiendrait en retranchant membre à membre les équations des deux circonférences données

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-r^2=0=\text{A},$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2-r'^2=0=\text{B}.$$

132. On conclut de là que, si deux circonférences se rencontrent, leur axe radical est la droite indéfinie qui joint leurs points d'intersection; car l'équation

$$\text{A}-\text{B}=0$$

représente une ligne qui passe par les points communs aux deux circonférences (**59**) lorsqu'elles se coupent; or, cette ligne est droite, donc elle n'est autre que leur corde commune indéfiniment prolongée.

133. *Les axes radicaux de trois cercles concourent en un même point*, qu'on nomme leur *centre radical*. En effet, si

$$\text{A}=0, \quad \text{B}=0, \quad \text{C}=0$$

représentent les équations de trois circonférences,

$$\text{A}-\text{B}=0, \quad \text{A}-\text{C}=0, \quad \text{B}-\text{C}=0,$$

seront celles de leurs axes radicaux; mais l'équation $\text{B}-\text{C}=0$ étant la différence des deux autres, la droite, qu'elle représente, passe par le point d'intersection des lieux de celles-ci. Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Cette proposition fournit le moyen de *construire* facilement *l'axe radical de deux circonférences qui ne se rencontrent pas*. Il suffit, pour cela, de les couper toutes deux par une circonférence auxiliaire, de prolonger les cordes communes jusqu'au point où elles se rencontrent, et d'abaisser de ce

point une perpendiculaire sur la droite qui joint les centres; car, le coefficient angulaire de la droite [21] étant $-\frac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}$ on voit que cette droite est perpendiculaire à la droite

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$$

qui joint les centres.

*134. PROBLÈME. *Si d'un point* C *pris sur le plan d'un angle* YOX, *on mène une série de transversales telles que* CBA, CB'A', CB''A'',.... *qui rencontrent les côtés de cet angle, les droites qui, comme* AB' et BA', A'B'' et B'A'',.... *joindront les points de section opposés, se couperont en des points* M, M',.... *dont on propose de trouver le lieu.* Fig. 50.

Prenons les deux côtés de l'angle donné pour axes des coordonnées, et désignons par α et β les coordonnées du point donné C; appelons d'ailleurs a et a' les abscisses des points A et A'. L'équation de la droite CA, qui passe par les deux points (α, β), (a, o), sera

$$y=\frac{\beta}{\alpha-a}(x-a);$$

ainsi son ordonnée à l'origine est $OB=\frac{a\beta}{a-\alpha}$, et par conséquent la droite BA', qui coupe les axes des x et des y aux distances a' et $\frac{a\beta}{a-\alpha}$ de l'origine, aura pour équation (119)

$$\frac{(a-\alpha)y}{a\beta}+\frac{x}{a'}=1,$$

d'où, en faisant évanouir les dénominateurs,

$$a'(a-\alpha)y+a\beta x=aa'\beta \qquad [22].$$

Il s'ensuit que la droite AB' aura pareillement pour équation

$$a(a'-\alpha)y+a'\beta x=aa'\beta \qquad [23].$$

Si donc on *peut* éliminer a et a' entre les équations [22] et [23], l'équation finale résultante en x et en y sera celle du lieu des points M (65). Or, en retranchant ces deux équations membre à membre, il viendra, après avoir fait les réductions,

$$\alpha y+\beta x=0 \qquad [24],$$

équation d'une ligne droite. Pour la construire, je prolonge l'ordonnée $CQ=\beta$ du point C d'une quantité QC' égale à elle-même, et je joins le point C' au point O par une droite indéfinie Zz (**114**), qui est le lieu des points M.

***135**. On dit que le point C est *un pôle* de la droite Zz, et que cette droite Zz est *la polaire* du point C, *par rapport à l'angle* XOY.

***136**. Il est bon d'observer que l'équation [24] ne change pas, lorsqu'on y remplace α et β par deux quantités qui leur soient proportionnelles, c'est-à-dire par les coordonnées d'un point quelconque de la droite Vv, et qu'ainsi *la droite Zz est la polaire de chacun des points de* Vv.

Réciproquement *chacun des points de* Zz *est un pôle de la droite* Vv. Soient, en effet, (x', y') les coordonnées d'un point quelconque de Zz, l'équation de la polaire de ce point sera, d'après ce qui précède (**134**),

$$x'y+y'x=0, \quad \text{ou} \quad \ldots y=-\frac{y'}{x'}x:$$

mais les coordonnées x' et y' doivent, par hypothèse, vérifier l'équation [24]; ainsi

$$\alpha y'+\beta x'=0, \quad \text{ou} \quad \ldots \frac{y'}{x'}=-\frac{\beta}{\alpha}:$$

donc l'équation de la polaire du point (x', y') revient à

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x,$$

donc cette polaire est la droite Vv.

***137**. *Les quatre droites indéfinies* Vv, Yy, Zz, Xx *jouissent de la propriété remarquable de couper en parties harmoniques* toute transversale qui, comme* CBDA, *les rencontre toutes quatre, de sorte que l'on a*

$$BC:BD::AC:AD.$$

Nous aurons évidemment démontré cette proportion, si

* On appelle *points harmoniques* quatre points situés en ligne droite, et tels, que les distances du second au premier et au troisième sont proportionnelles aux distances du quatrième à ces mêmes points. Deux points de rangs pairs ou de rangs impairs sont dits *harmoniques conjugués*.

nous prouvons que les projections des quatre parties de la transversale, faites sur l'axe des abscisses par des parallèles à l'axe des y, forment elles-mêmes une proportion harmonique, c'est-à-dire que

$$OQ:OP::AQ:AP.$$

En désignant toujours par (α, β) les coordonnées du point C, et par a la distance OA, les équations de CA et de Zz sont (**134**)

$$y=\frac{\beta}{\alpha-a}(x-a), \quad \text{et} \quad \alpha y+\beta x=0.$$

En éliminant y entre ces deux équations, on trouvera pour l'abscisse OP de leur point d'intersection

$$x=\frac{a\alpha}{2\alpha-a}, \quad \text{et par suite} \quad AP=-(x-a)=-\frac{a(a-\alpha)}{2\alpha-a}.$$

Je substitue ces valeurs dans la proportion précédente, et je trouve

$$-\alpha:\frac{a\alpha}{2\alpha-a}::-\alpha+a:-\frac{a(a-\alpha)}{2\alpha-a},$$

proportion qui est vraie, car le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

***138**. On appelle *faisceau harmonique* le système de quatre droites qui, issues d'un même point, passent par quatre points harmoniques. Celles qui passent par des points conjugués sont dites *harmoniques conjuguées*. Ainsi les quatre droites Vv, Yy, Zz et Xx forment un faisceau harmonique, et les droites Vv et Zz, par exemple, sont harmoniques conjuguées. Le théorème du n° **137** peut donc s'énoncer de la manière suivante : *Toute transversale est coupée harmoniquement par un faisceau harmonique.*

Il suit de ces définitions et du n° **136** que, *dans un faisceau harmonique quelconque, chaque point de l'une des droites peut être regardé comme un pôle de son harmonique conjuguée.*

La construction que nous avons donnée du lieu de l'équation [24] démontre cette propriété remarquable : *Toute parallèle à l'une des droites d'un faisceau harmonique est coupée par les trois autres en parties égales.*

139. Nous proposerons pour exercices les questions suivantes :

I. *Déterminer les côtés, les angles, les hauteurs et l'aire du triangle que forment les droites représentées par les équations*

$$y=2x-2,\quad y=x+2,\quad y=3x-4.$$

II. *Calculer les coordonnées du centre radical de trois cercles donnés.*

Fig. 51. III. *Démontrer que si trois droites* AB, A'B', A''B'' *sont parallèles, et que l'on joigne* AA' et BB', AA'' et BB'', A'A'' et B'B'', *les trois points de concours* C'', C' et C *seront en ligne droite.* — On prendra l'axe des x parallèle aux trois droites données; puis, quand on aura déterminé les coordonnées des points C'', C' et C, on exprimera que l'axe des y passe par deux de ces points.

Fig. 52. IV. *Si, dans le plan d'un parallélogramme* ABCD, *on tire deux parallèles* D'A' *et* D''C' *aux côtés* DA *et* DC, *les diagonales* A'D'' *et* C'D' *des deux parallélogrammes partiels* A'AD''E et EC'CD' *iront concourir avec la diagonale* BD *du parallélogramme proposé.* — On prendra pour axes deux parallèles aux côtés DA et DC, puis, quand on aura formé les équations des trois droites A'D'', C'D' et BD, on exprimera que l'origine est au point de concours des deux premières.

Fig. 53. V. *Par un point fixe* O *pris dans le plan d'un cercle, on mène une suite de sécantes qui, comme* ONN', *coupent sa circonférence aux points* N *et* N'; *puis on cherche l'harmonique conjuguée* M *du point* O, *par rapport à* N *et à* N', *de sorte que* NO : NM : : N'O : N'M, *et on propose de trouver le lieu des points* M. — On discutera ce problème en supposant, par exemple, que le point O, d'abord extérieur à la circonférence, s'en rapproche, l'atteigne, et décrive la droite indéfinie qui l'unit au centre.

VI. *Trouver sur le plan de trois droites indéfinies, un point* M *tel que ses distances à ces trois droites soient proportionnelles à trois droites données,* m, m', m''. — Discuter ce problème, en examinant combien il admet de solutions. — Ce qui arriverait si, deux des droites données étant parallèles, le point M devait en être équidistant; — si les trois droites données étant parallèles, m, m', m'' sont différentes.

Quel est, dans ce cas, le lieu des points M? Peut-il être le système de deux droites? — Construction du point demandé dans le cas général. — Comment se modifie cette construction, si $m = m' = m''$? — En conclure que le centre d'un cercle inscrit ou ex-inscrit au système de trois droites se trouve aux points de concours des bissectrices des angles formés par les droites. — Calculer les rayons des quatre cercles tangents, chacun aux trois droites données, et classer ces cercles par ordre de grandeur.

VII. *Un point* M *étant donné dans le plan de deux droites, et à égale distance de ces droites, mener par ce point une sécante qui coupe les deux droites en deux points* A *et* B, *tels que la somme des carrés des deux segments* MA *et* MB *soit égale à un carré donné* c^2. — Discussion.

VIII. *Étant donnés deux droites rectangulaires* OA *et* OB *et un point fixe* C *sur la première, trouver le lieu des points* M, *tels que si l'on joint* MC, *et que l'on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en* D *avec* OB, *on ait* $MC.CD = \overline{CO}^2$. Fig. 54.

IX. *Par un point quelconque* O, *pris sur l'hypoténuse d'un triangle* ABC *rectangle en* C, *on mène une sécante quelconque* B'OA', *qui coupe ses côtés* CB *et* BA *respectivement en* B' *et en* A'; *on fait passer une première circonférence par les trois points* B', B *et* O, *une seconde par les trois points* A', A *et* O : *trouver le lieu des points d'intersection de ces circonférences.* — On vérifiera les résultats de l'analyse par des considérations géométriques. Fig. 55.

CHAPITRE V.

MÉTHODE DES TANGENTES.

§ I. Tangente à une courbe rapportée à des coordonnées rectilignes.

140. *On appelle* TANGENTE *à une courbe en un point donné, la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante que l'on fait tourner autour de ce point jusqu'à ce qu'un second point d'intersection vienne coïncider avec le premier.*

141. Remarquons : 1° qu'une droite peut être à la fois
Fig. 30. tangente et sécante : telle est RDR′ (fig. 30); donc on ne peut pas dire qu'une tangente est une droite qui n'a qu'un point de commun avec une courbe. D'ailleurs, une droite peut très-bien n'avoir qu'un point commun avec une courbe et ne pas lui être tangente. Telles sont dans la cissoïde les parallèles à AO.

2° Que le mouvement de rotation de la sécante doit en général s'exécuter autour de l'un des points où elle coupe la courbe; car, si le centre de ce mouvement était tout autre point de la direction primitive de la sécante, il pourrait arriver que deux points d'intersection se fussent confondus en un seul, sans que la sécante fût devenue tangente. (Voyez la fig. 30, où l'on peut regarder la droite KO comme la limite des positions successives que prend la sécante KM′M en tournant autour du point K, et cependant la tangente à la cissoïde au point O est la droite OA.)

3° Par la même raison, il ne suffit pas, pour obtenir une tangente, de faire glisser une sécante parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que deux points d'intersection soient venus se réunir en un seul. C'est ce que montre encore la fig. 30; car Yy, limite des positions successives que prend la sécante KM′M en glissant parallèlement à elle-même, n'est pas une tangente.

Cependant ces deux modes de génération de la tangente

pourraient être employés avec confiance, si l'on savait *a priori* qu'aucun des points de la courbe proposée n'est formé de la réunion de deux branches distinctes. Supposons, en effet, qu'en faisant tourner une sécante autour d'un point fixe, ou en la faisant glisser parallèlement à elle-même, deux de ses points d'intersection M′ et M″ soient venus se confondre en un seul M, qui sera nécessairement situé entre eux, et soit TT′ la tangente en ce point M; on voit que la somme des trois angles TMM′, M′MM″ et M″MT′ vaut deux droits, de sorte que la somme des angles MM′M″ et MM″M′ est égale à celle des deux angles TMM′ et M″MT′, laquelle somme a pour limite zéro, puisque, quand les points M′ et M″ viennent coïncider avec M, les sécantes MM′ et MM″ deviennent les tangentes MT et MT′ (**140**), dont les directions coïncident; car le point M n'est pas formé par la réunion de deux branches qui se *coupent*. Donc les angles MM′M″ et MM″M′ tendent vers zéro, et ainsi la sécante M′M″ tend à devenir parallèle à TT′; puis donc qu'à la limite, ses points M′ et M″ viennent se réunir en un point M de cette tangente, il faut en conclure que la limite de ses positions successives est cette même tangente. Fig. 56.

142. Cela posé, proposons-nous de trouver l'équation de la tangente menée au point M (x', y') d'une courbe algébrique dont on a l'équation $\varphi(x, y) = 0$ (*cette équation est supposée entière et rationnelle; s'il n'en était pas ainsi, il faudrait commencer par la ramener à cette forme*). Je prends sur la même branche un deuxième point M′, dont je désigne les coordonnées par $x'+h$ et par $y'+k$, et je joins ces deux points par une droite indéfinie MM′. Son équation sera donc (**117**) Fig. 57.

$$y - y' = \frac{k}{h}(x - x') \qquad [1],$$

en y joignant les deux équations de condition

$$\varphi(x', y') = 0 \qquad [2],$$
$$\varphi(x'+h, y'+k) = 0,$$

qui expriment que les points M et M′ appartiennent à la courbe proposée. En développant cette dernière équation, et en ayant

égard à la précédente, elle prendra la forme (*Algèbre*, 341),

$$\left.\begin{array}{r} \varphi'(x'_1,y')h + \varphi''(x'_2,y')\frac{h^2}{1.2}+\ldots \\ +\varphi'(x',y'_1)k+2\varphi''(x'_1,y'_1)\frac{hk}{1.2}+\ldots \\ +\varphi''(x',y'_2)\frac{k^2}{1.2}+\ldots \end{array}\right\}=0 \quad [3].$$

Si l'on fait tourner la sécante MM' autour du point M, le rapport $\frac{k}{h}$ qui détermine la direction de cette droite variera, et se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$ quand le point M' sera confondu avec le point M, puisque alors h et k seront devenus nuls. Toutefois ce rapport n'est pas indéterminé *, car la sécante tend évidemment vers une limite déterminée. Pour obtenir la limite du rapport $\frac{k}{h}$ dans le cas que nous considérons, je divise tous les termes de l'équation [3] par h, puis

* Désignons, en effet, par r la longueur de la corde MM', et supposons qu'ayant pris sur sa direction une distance MN égale à l'unité linéaire, on tire NS parallèlement à l'axe des y; si on appelle α et β les droites MS et NS, on aura évidemment

$$r : 1 :: k : \beta :: h : \alpha,$$

d'où

$$k=\beta r \quad \text{et} \quad h=\alpha r,$$

et par conséquent $\frac{k}{h}=\frac{\beta}{\alpha}$. Or, l'une des quantités α et β ne peut être nulle que si la sécante MM' devient parallèle à l'axe des y ou à celui des x; donc le rapport $\frac{k}{h}$ n'est pas indéterminé, lorsque h et k sont nuls, et *c'était la présence du facteur* r *qui anéantissait alors ses deux termes*; de plus, il ne peut devenir nul ou infini que pour certaines valeurs de x' et de y'; donc *ce rapport a une limite déterminée*, dont la valeur dépend, en général, des coordonnées du point M que l'on considère.

On voit ainsi que *la limite du rapport de l'accroissement d'une fonction de* x *à celui de cette variable, est une quantité déterminée*, quelle que soit cette fonction, pourvu qu'elle soit *continue*, sans quoi $y=F(x)$ ne représenterait plus une courbe. La première démonstration analytique de ce principe, qui sert de base au calcul différentiel, est due à M. *J. Binet*, et elle a été reproduite avec quelques simplifications par M. *Duhamel*, dans son *Cours d'analyse* à l'École polytechnique.

je mets $\frac{k}{h}$ en facteur commun, ce qui donnera

$$\{\varphi'(x'_1, y') + \varphi''(x'_1, y')\frac{h}{1.2} + \varphi''(x'_1, y'_1)k + \ldots\}$$
$$+ \{\varphi'(x', y'_1) + \varphi''(x', y'_1)\frac{k}{1.2} + \ldots\}\frac{k}{h} = 0.$$

Or, si l'on suppose que h et k tendent vers zéro, le rapport $\frac{k}{h}$ tendra vers sa limite, et tous les termes qui, dans chaque accolade, suivent le premier, renfermant au moins un facteur h ou un facteur k, convergeront vers zéro, de sorte que la limite vers laquelle tend le premier membre de l'équation précédente est $\varphi'(x'_1, y') + \varphi'(x', y'_1) \lim \frac{k}{h}$; donc

$$\varphi'(x'_1, y') + \varphi'(x', y'_1) \lim \frac{k}{h} = 0,$$

d'où
$$\lim \frac{k}{h} = -\frac{\varphi'(x'_1, y')}{\varphi'(x', y'_1)} \qquad [4].$$

Donc l'équation de la tangente, menée par le point (x', y') à la courbe qui a pour équation $\varphi(x, y) = 0$, est

$$y - y' = -\frac{\varphi'(x'_1, y')}{\varphi'(x', y'_1)}(x - x') \qquad [5],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi'(x', y'_1) \cdot (y - y') + \varphi'(x'_1, y') \cdot (x - x') = 0 \quad [6],$$

avec la condition

$$\varphi(x', y') = 0 \qquad [2].$$

143. On voit, par la formule [4], que *le* COEFFICIENT ANGULAIRE *de la tangente à une courbe algébrique est une fraction dont les deux termes sont les dérivées respectives du premier membre de l'équation proposée, prises par rapport à* x *et par rapport à* y, *et dans lesquelles on a remplacé ces variables par les coordonnées du point donné, cette fraction étant affectée du signe* —.

144. Il suit de là que *si, l'équation de la courbe proposée étant résolue par rapport à* y, *son second membre est une fonction entière et rationnelle de* x, *le coefficient angulaire de la tangente sera la dérivée de cette fonction, dans laquelle dérivée on aura remplacé* x *par* x'. Ainsi,

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle et entière de x, l'équation de la tangente à la courbe

$$y=\varphi(x)$$

au point (x', y') sera

$$y-y'=\varphi'(x').(x-x') \qquad [7],$$

avec la condition $y'=\varphi(x')$.

145. Appliquons la règle exprimée par la formule [6] aux courbes du second ordre. Leur équation générale est

$$\varphi(x,y)=Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

On en tire

$$\varphi'(x,y_1)=2Ay+Bx+D, \quad \varphi'(x_1,y)=By+2Cx+E;$$

de sorte que l'équation de la tangente au point (x', y') est

$$(2Ay'+Bx'+D)(y-y')+(By'+2Cx'+E)(x-x')=0,$$

avec la condition

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F=0 \quad [8].$$

Cette équation peut se simplifier, en lui ajoutant le double de l'équation de condition. En effectuant ce calcul, on trouvera

$$(2Ay'+Bx'+D)y+(By'+2Cx'+E)x+Dy'+Ex'+2F=0 \; [9],$$

équation dont il est important de retenir la forme.

146. Au moyen de l'équation [6], il sera facile de mener une tangente à la courbe proposée; car, si l'on suppose $y=0$ dans cette équation, on en tirera la valeur de l'abscisse du point où *aa* tangente coupe l'axe des x; on construira donc ce point, et en le joignant au point de contact, la tangente sera menée.

Si, par exemple, on veut mener une tangente au point $D(r, r)$ de la cissoïde, on cherchera d'abord l'équation de la tangente en ce point; on trouvera

$$\varphi'(x_1,y)=-y^2-3x^2, \quad \varphi'(x,y_1)=2y(2r-x),$$

et on en conclura que l'équation de la tangente au point (r, r) est

$$y-2x+r=0.$$

$y=0$ donne $x=\frac{r}{2}$; ainsi on joindra le point D au milieu de OC, et on aura la tangente demandée.

Nous pouvons maintenant résoudre plusieurs questions intéressantes sur les tangentes.

147. Problème. *Par un point donné sur le plan d'une courbe, mener une tangente à cette courbe.*

Soient (α,β) les coordonnées du point donné, (x',y') celles du point de contact, et $\varphi(x,y)=0$ l'équation de la courbe proposée : l'équation de la tangente au point (x',y') sera

$$\varphi'(x',y'_1).(y-y')+\varphi'(x'_1,y').(x-x')=0,$$

avec la condition

$$\varphi(x',y')=0.$$

Mais la tangente doit passer par le point donné; donc ses coordonnées α et β doivent vérifier son équation; donc

$$\varphi'(x',y'_1).(\beta-y')+\varphi'(x'_1,y').(\alpha-x')=0.$$

Ainsi, en résolvant ces deux dernières équations, on obtiendra les coordonnées du point de contact; mais, au lieu de cela, il sera en général préférable de construire le lieu que représente cette dernière équation, lorsqu'on y regarde x' et y' comme des coordonnées courantes (**64**), et de joindre les points où il coupera la courbe proposée au point (α,β).

Application au cercle représenté par l'équation

$$x^2+y^2-r^2=0.$$

En faisant usage de l'équation [9], on aura, pour équation de la tangente au point (x',y'),

$$y'y+x'x-r^2=0,$$

et par conséquent,

$$\beta y+\alpha x-r^2=0,$$

en supprimant les accents. Nous devrions donc construire cette équation pour déterminer les points de contact, ce qui serait facile, puisqu'elle est du premier degré. Toutefois, nous pouvons arriver à une construction plus simple, en observant que l'on peut substituer (**64**) au système des équations

$$x^2+y^2-r^2=0,$$
$$\beta y+\alpha x-r^2=0,$$

le système formé de la première et de leur différence. Or, cette différence est

$$y^2-\beta y+x^2-\alpha x=0,$$

équation qui représente une circonférence passant par le point de contact, par l'origine et par le point donné. Pour la construire, il faudra, conformément à la règle du n° **71**, compléter les carrés dont y^2 et $-\beta y$, x^2 et $-\alpha x$ sont les deux premiers termes, ce qui la ramènera à la forme

$$\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\beta^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}.$$

Les coordonnées du centre sont donc $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\alpha}{2}$, de sorte que ce centre se trouve ainsi au milieu de la droite qui joint le point donné à l'origine. Donc, pour résoudre le problème, on joindra le point donné au centre, on décrira une circonférence sur cette droite comme diamètre, et les droites tirées par le point donné, et par ceux où elle coupe la circonférence proposée, résoudront le problème. C'est une des solutions données dans les *Éléments de Géométrie*.

148. Problème. *Mener à la courbe* $\varphi(x, y)=0$ *une tangente parallèle à une droite donnée.*

Soient

$$y=ax+b$$

l'équation de la droite donnée, (x', y') les coordonnées inconnues du point de contact; le coefficient angulaire de la tangente sera $-\frac{\varphi'(x'_1, y')}{\varphi'(x', y'_1)}$, et en vertu du principe du n° **124**, nous aurons

$$-\frac{\varphi'(x'_1, y')}{\varphi'(x', y'_1)}=a;$$

comme les coordonnées x' et y' doivent vérifier l'équation de la courbe proposée, nous aurons encore

$$\varphi(x', y')=0.$$

Voilà ainsi deux équations entre x' et y', et par conséquent on obtiendra les valeurs de ces inconnues en résolvant ces deux équations. Mais, si l'on veut tracer effectivement la tangente demandée, on construira le lieu de la première, et en menant par les points où il coupe celui de la deuxième,

c'est-à-dire la courbe proposée, des tangentes à cette courbe, le problème sera résolu.

Application au cercle représenté par l'équation

$$x^2+y^2-r^2=0.$$

En ne tenant pas compte des accents qui sont inutiles, la première des équations précédentes sera

$$-\frac{x}{y}=a, \quad \text{d'où} \quad y=-\frac{1}{a}x.$$

Ainsi, *les points de contact se trouveront sur la perpendiculaire abaissée du centre* sur la droite proposée (**109** et **123**), ce qui conduit à la solution donnée dans les *Eléments de Géométrie*.

149. *On appelle* NORMALE *à une courbe, la perpendiculaire élevée sur la tangente au point de contact.* Il suit de cette définition et de la formule [9] du n° **122**, que l'équation de la normale menée à la courbe $\varphi(x, y)=0$ par le point (x', y'), est

$$y-y'=\frac{\varphi'(x'_1, y')\cos\theta-\varphi'(x', y')}{\varphi'(x', y'_1)\cos\theta-\varphi'(x'_1, y')}(x-x') \qquad [10],$$

avec la condition

$$\varphi(x', y')=0 \qquad [2].$$

Il sera facile, en suivant la méthode exposée aux n^{os} **147** et **148**, de mener à une courbe une normale qui passe par un point donné, ou qui soit parallèle à une droite donnée.

150. PROBLÈME. *Mener une tangente commune à deux courbes données.*

1re MÉTHODE. Soient $\varphi(x, y)=0$ et $\psi(x, y)=0$ les équations des deux courbes proposées, (x', y') et (x'', y'') les coordonnées inconnues des points où la tangente demandée doit toucher respectivement la première et la deuxième courbe. Les équations de la tangente au point (x', y') seront

$$y-y'=-\frac{\varphi'(x'_1, y')}{\varphi'(x', y'_1)}(x-x') \qquad [5],$$

$$\varphi(x', y')=0 \qquad [2];$$

et celles de la tangente au point (x'', y'') seront

$$y-y''=-\frac{\psi'(x''_1, y'')}{\psi'(x'', y''_1)}(x-x'') \qquad [11],$$

$$\psi(x'', y'')=0 \qquad [12].$$

Mais ces deux tangentes doivent coïncider; donc leurs équations doivent être identiques, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\varphi'(x'_1,y')}{\varphi'(x',y'_1)}=\frac{\psi'(x''_1,y'')}{\psi'(x'',y''_1)} \qquad [13],$$

$$y'+x'.\frac{\varphi'(x'_1,y')}{\varphi'(x',y'_1)}=y''+x''.\frac{\psi'(x''_1,y'')}{\psi'(x'',y''_1)} \qquad [14].$$

Voilà ainsi quatre équations entre x', y', x'' et y''; de sorte que si nous éliminons x'' et y'' entre les trois dernières, nous obtiendrons une équation

$$F(x',y')=0 \qquad [15]$$

qui, conjointement avec [2], déterminera les coordonnées du point où la tangente demandée touchera la première courbe. Il ne s'agira donc plus que de résoudre ces deux équations, ou de construire le lieu de l'équation [15], et de mener ensuite des tangentes à la première courbe, aux points où elle sera coupée par ce lieu.

151. Exemple. *Mener une tangente commune au cercle et à la parabole représentés par les équations*

$$x^2+y^2=r^2 \quad \text{et} \quad y^2=2px.$$

Les équations des tangentes au point (x',y') de la première, et au point (x'',y'') de la seconde sont (**145**)

$$yy'+xx'-r^2=0, \quad yy''-p(x+x'')=0.$$

Ainsi les équations du problème proposé sont

$$x'^2+y'^2-r^2=0, \quad y''^2-2px''=0, \quad -\frac{x'}{y'}=\frac{p}{y''}, \quad \frac{r^2}{y'}=\frac{px''}{y''}.$$

On tire de ces deux dernières

$$y''=-\frac{py'}{x'}, \quad x''=-\frac{r^2}{x'},$$

et, en substituant ces valeurs dans la seconde, on trouvera

$$y'^2+\frac{2r^2}{p}x'=0.$$

Ainsi le cercle sera touché par la droite demandée, aux points où il est rencontré par la parabole que représente cette dernière équation; mais, au lieu de la construire, il vaudra

mieux éliminer y' entre les équations de ces deux courbes; car on obtiendra ainsi l'équation finale

$$x'^2 - \frac{2r^2}{p}x' - r^2 = 0$$

dont les racines se construiront avec la règle et le compas [27]. La racine positive doit être rejetée *.

152. 2e MÉTHODE. Soient toujours $\varphi(x, y) = 0$ et $\psi(x, y) = 0$ les équations des deux courbes données, et

$$y = ax + b$$

l'équation de leur tangente commune. Les inconnues de la question sont ainsi a et b. Or, si nous éliminons y entre l'équation de cette droite et $\varphi(x, y) = 0$, l'équation résultante $\varphi(x, ax + b) = 0$ aura pour racines les abscisses des points d'intersection de ces deux lignes; de sorte qu'en écrivant qu'elle a deux racines égales, nous aurons exprimé que la droite rencontre la courbe en deux points réunis en un seul, c'est-à-dire, en général, qu'elle lui est tangente (**141**). On formera donc la dérivée de l'équation $\varphi(x, ax + b)$, on cherchera le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres, et, en égalant à zéro le reste indépendant de x (*Algèbre*, **546**), on aura une équation de condition

$$f(a, b) = 0,$$

qui exprimera la relation qui doit exister entre a et b, pour que la droite $y = ax + b$ soit tangente à la courbe $\varphi(x, y) = 0$.

En faisant le même calcul pour l'équation $\psi(x, y) = 0$, on aura une seconde équation

$$F(a, b) = 0$$

qui exprimera que notre droite est tangente à la deuxième courbe; et il ne s'agira plus que de substituer dans l'équation de cette droite les valeurs de a et de b, déterminées par les équations $f(a, b) = 0$ et $F(a, b) = 0$.

---

* On peut remarquer que les racines de cette équation sont les tangentes des moitiés de tous les arcs qui, dans le cercle dont le rayon est r, ont $-p$ pour tangente (*Trig.*, **49**). De là un moyen élégant de résoudre le problème.

Cette méthode entraînera en général dans des calculs plus compliqués que la première; car l'équation $f(a, b)=0$ détermine non-seulement les relations qui doivent exister entre a et b, pour que la droite $y=ax+b$ soit tangente à la courbe $\varphi(x, y)=0$, mais encore pour qu'elle passe par les *points-multiples* de cette courbe, c'est-à-dire par ceux où plusieurs branches viennent se réunir. Toutefois elle sera préférable si les courbes proposées sont du second ordre; car les équations $f(a, b)$ et $F(a, b)=0$ se forment alors très-facilement, et nous verrons plus tard que les courbes de cet ordre n'ont pas de points multiples.

153. Exemple. *Mener une tangente commune à deux circonférences données.*

Pour plus de simplicité, nous placerons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre de l'un des cercles, et nous dirigerons l'axe des x par le centre du second; de cette manière les équations de nos deux circonférences seront

$$y^2+x^2-r^2=0 \qquad [a],$$
$$y^2+(x-d)^2-r'^2=0 \qquad [b],$$

en appelant r et r' leurs rayons et d la distance de leurs centres. Soit toujours

$$y=ax+b \qquad [c],$$

l'équation de la tangente commune. J'élimine y entre les équations [b] et [c], et j'écris que les racines de l'équation résultante

$$(a^2+1)x^2+2(ab-d)x+b^2+d^2-r'^2=0$$

sont égales, ce qui donne la condition

$$(ab-d)^2-(a^2+1)(b^2+d^2-r'^2)=0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$r'^2(a^2+1)-(ad+b)^2=0 \qquad [d].$$

En faisant $d=0$ dans cette équation et en y remplaçant r' par r, on aura évidemment la condition d'égalité des racines de l'équation qu'on obtiendrait en éliminant y entre les équations [a] et [c]. Cette condition est

$$r^2(a^2+1)-b^2=0 \qquad [e].$$

Il sera facile de tirer de ces équations les valeurs de a et de b, et, en les substituant dans l'équation [c], on aura l'équation de cette tangente ; mais, si l'on veut seulement arriver à une solution géométrique de la question, il suffira de trouver un point de la tangente commune, ou sa direction ; car la question sera alors réduite à mener à une circonférence une tangente qui passe par un point donné (**147**), ou qui soit parallèle à une droite donnée (**148**).

1° Cherchons le point où la tangente commune coupe l'axe des x. Son abscisse est (**113**) $-\frac{b}{a}$. Or, si l'on divise membre à membre les équations [d] et [e], après avoir transposé, il viendra

$$\frac{ad+b}{b}=\pm\frac{r'}{r}, \quad \text{d'où} \quad x=-\frac{b}{a}=\frac{dr}{r\mp r'} \quad [f];$$

ainsi il ne s'agit plus que de construire une abscisse égale à cette quantité. Pour cela, nous prendrons sur un rayon quelconque OA du cercle r, à partir de A, deux distances AB et AB' égales à r', nous joindrons BO' et B'O' ; et si nous menons par le point A des parallèles à ces droites, elles iront couper l'axe des x en des points C et C', tels que Fig. 58.

$$\text{OC}=\frac{dr}{r-r'} \quad \text{et que} \quad \text{OC}'=\frac{dr}{r+r'}.$$

Mais j'observe que si par le centre O' on mène un diamètre A'A'' parallèle à OA, les droites AA' et AA'' seront précisément les parallèles dont il s'agit. Ainsi, nous voilà ramenés à la construction donnée dans notre Géométrie (**275**), pour déterminer les centres de similitude de deux cercles, et par suite pour leur mener une tangente commune.

2° Voyons maintenant comment on pourra déterminer la direction de cette tangente. Il s'agit, pour cela, d'éliminer b entre les équations [d] et [e], ou mieux entre [e] et [f]. Le résultat de cette élimination est

$$a=\pm\frac{r\mp r'}{\sqrt{d^2-(r\mp r')^2}} \qquad [g],$$

et comme cette valeur de a est quadruple, on voit que le problème admet en général quatre solutions. Si l'on y fait

$r'=0$, et qu'on appelle a' la valeur correspondante de a, on trouvera

$$a'=\pm\frac{r}{\sqrt{d^2-r^2}},$$

formule qui détermine la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente menée du point O' au cercle r. Mais la valeur de a se déduit de celle de a', en y changeant r en $(r\mp r')$; donc cette valeur de a est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des abscisses la tangente menée de O' au cercle décrit du point O comme centre avec le rayon $(r\mp r')$. Donc, pour résoudre le problème, il faudra tirer cette tangente, et tracer ensuite une tangente à l'un des cercles donnés parallèlement à celle-là. C'est encore une des constructions que nous avons données dans nos *Leçons de Géométrie* (**274**).

Nous ne nous arrêterons pas à la discussion des formules [f] et [g]; car elle ne saurait présenter de difficultés.

154. PROBLÈME. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés des équations de deux lignes pour que ces lignes soient tangentes.*

Deux courbes sont dites tangentes lorsqu'elles ont un point commun, et en ce point une tangente commune. Il suit de là que si une courbe qui en rencontre une autre se meut jusqu'à ce que deux points d'intersection se soient réunis en un seul, ces deux courbes seront tangentes en ce point, à moins que ce point ne soit *multiple*. On pourra donc employer, comme dans la question précédente, deux méthodes différentes pour résoudre le problème proposé.

1re MÉTHODE. Soient $\varphi(x,y)=0$ et $\psi(x,y)=0$ les équations des courbes proposées, et (x',y') les coordonnées de leur point de contact. Nous exprimerons évidemment les conditions de la question, en écrivant que les tangentes menées aux deux courbes au point (x',y') font le même angle avec l'axe des abscisses, et que les coordonnées de ce point satisfont aux équations de ces courbes : nous trouverons ainsi les équations

$$\varphi(x',y')=0,\quad \psi(x',y')=0,\quad -\frac{\varphi'(x'_1,y')}{\varphi'(x',y'_1)}=-\frac{\psi'(x'_1,y')}{\psi'(x',y'_1)};$$

de sorte qu'en éliminant x' et y' entre elles, l'équation résultante exprimera la condition nécessaire et suffisante pour qu'un même couple de valeurs de x' et de y' puisse les vérifier toutes les trois, et sera par conséquent la relation demandée.

155. 2e Méthode. Si, entre les deux équations proposées $\varphi(x, y)=0$ et $\psi(x, y)=0$, on élimine une des variables, y par exemple, l'équation finale $f(x)=0$ aura pour racines les abscisses des points d'intersection des deux courbes; par conséquent, si l'on écrit qu'elle a deux racines égales, on aura exprimé que deux points d'intersection sont venus se confondre, et qu'ainsi les deux courbes ont *généralement* un point de contact. L'équation de condition qui exprimera que l'équation $f(x)=0$ a deux racines égales, résoudra donc la question.

On fera, sur cette deuxième méthode, les mêmes remarques qu'au n° **152**.

156. Nous allons en faire l'application à la *recherche des conditions du contact de deux circonférences*. Je place l'origine des coordonnées rectangulaires au centre de l'une des circonférences, et je dirige l'axe des x par le centre de l'autre; de cette manière leurs équations seront

$$y^2+x^2=r^2 \quad \text{et} \quad y^2+(x-d)^2=r'^2,$$

en désignant leurs rayons par r et par r', et la distance de leurs centres par d. J'élimine y entre ces deux équations, ce qui donne

$$2dx-d^2=r^2-r'^2, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}.$$

Ainsi les points d'intersection de ces deux circonférences ont la même abscisse; donc ils sont situés sur une même perpendiculaire à l'axe des x, c'est-à-dire à la droite qui joint les centres. Pour exprimer que les circonférences se touchent, il faudra écrire que les valeurs de y, correspondantes à celle que nous venons de trouver pour x, sont égales : en conséquence, je substitue $\frac{d^2+r^2-r'^2}{2d}$ au lieu de x dans la première équation, qui est la plus simple; car on peut remplacer le système des équations proposées par le système formé de l'une

d'elles et de leur différence, et il vient

$$y=\pm\frac{1}{2d}\sqrt{4d^2r^2-(d^2+r^2-r'^2)^2}$$
$$=\pm\frac{1}{2d}\sqrt{(r+d+r')(r+d-r')(r'+r-d)(r'-r+d)} \quad [h],$$

en se rappelant que la différence des carrés de deux quantités est égale au produit de leur somme par leur différence. Ces deux valeurs de y étant égales et de signes contraires, on conclut de là et de ce qui précède, que *la droite qui joint les centres de deux circonférences qui se coupent est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint leurs points d'intersection.*

Puis donc que les ordonnées des points d'intersection des deux circonférences sont de signes contraires, elles ne pourront être égales que si elles deviennent nulles; mais si l'on suppose $r>r'$, les deux premiers facteurs ne peuvent se réduire à zéro; donc il faut que l'un des deux autres soit nul, et que l'on ait en conséquence

$$r'+r-d=0, \quad \text{d'où} \quad r+r'=d;$$
ou
$$r'-r+d=0, \quad \text{d'où} \quad r-r'=d.$$

Ainsi, *pour que deux circonférences soient tangentes, il faut et il suffit que la somme ou la différence de leurs rayons soit égale à la distance de leurs centres.*

157. Le calcul précédent conduit très-simplement aux *conditions d'intersection de deux circonférences.* En effet, pour que les cercles proposés se coupent, il faut et il suffit que les deux couples de valeurs de x et de y, qui vérifient leurs équations, soient réels, et qu'ainsi la quantité soumise au radical dans la formule [h] soit positive. Or, r étant supposé plus grand que r', les deux premiers facteurs de cette quantité sont positifs; donc il faut que les deux autres aient les mêmes signes; mais ils ne peuvent être négatifs; car si l'on avait

$$r'+r-d<0 \quad \text{et} \quad r'-r+d<0,$$

on tirerait de ces inégalités

$$r+r'<d \quad \text{et} \quad r-r'>d,$$

relations qui sont évidemment incompatibles; donc on doit avoir

$$r' + r - d > 0 \quad \text{et} \quad r' - r + d > 0,$$

d'où $$r + r' > d \quad \text{et} \quad r - r' < d.$$

Ainsi, *pour que deux circonférences se coupent, il faut et il suffit que la distance de leurs centres soit moindre que la somme de leurs rayons, et plus grande que leur différence.*

§ II. Tangente à une courbe rapportée à des coordonnées polaires.

158. La tangente à une courbe rapportée à des coordonnées polaires se détermine par l'angle M, qu'elle fait avec le rayon vecteur mené au point de contact. Mais comme deux droites font deux angles différents, nous conviendrons que cet angle M sera celui qui est formé par le rayon vecteur du point de contact avec la partie de la tangente qui, si on rabattait le rayon vecteur sur l'axe polaire, en le faisant tourner autour du pole, serait dirigée au-dessous de cet axe. Ainsi, au point M'', par exemple, l'angle M a pour valeur T''M''O et est obtus, tandis qu'en M il est aigu. Fig. 59.

Cela posé, appelons ω et ρ les coordonnées du point de contact M, et $\omega + h$ et $\rho + k$ les coordonnées d'un point M' de la courbe voisin de M. Tirons MM', et faisons tourner la sécante M'MS autour du point M, jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente MT. La limite commune vers laquelle tendront les angles OM'S et OMS sera ainsi l'angle demandé M. Or, si du point M on abaisse la perpendiculaire MP sur OM', on aura, dans le triangle rectangle MM'P,

$$\tang \mathrm{OM'S} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM'} - \mathrm{OP}},$$

formule qui serait encore vraie si l'angle OM'S était obtus; car on aurait alors

$$\tang \mathrm{OM'S} = -\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{M'P}} \quad \text{et} \quad \mathrm{M'P} = -(\mathrm{OM'} - \mathrm{OP}).$$ Fig. 60.

Or, $\mathrm{OM'} = \rho + k$, $\mathrm{OP} = \rho \cos h$, $\mathrm{MP} = \rho \sin h$; Fig. 59.

donc $$\tang \mathrm{OM'S} = \frac{\rho \sin h}{\rho + k - \rho \cos h} = \frac{2\rho \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}}{2\rho \sin^2 \frac{h}{2} + k} \quad [i].$$

Si l'on suppose que le point M' vienne coïncider avec le point M, le premier membre se réduira à tang M, et le second prendra la forme $\frac{0}{0}$. Pour en trouver la véritable valeur, je divise haut et bas par $\frac{h}{2}$, ce qui donne

$$\frac{\rho \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \frac{h}{2}}{\rho \sin \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \frac{k}{h}},$$

expression qui, pour $h=0$, se réduit à $\rho \lim \frac{h}{k}$ (*Trigonométrie*, page 42); donc enfin

$$\text{tang } M = \rho \lim \frac{h}{k} \qquad [16].$$

Pour démontrer que cette formule est générale, il faudra faire voir qu'elle ne change pas, 1° si l'angle M'OV étant plus grand que ω, le rayon vecteur $OM' < \rho$; 2° si l'angle M'OV étant moindre que ω, le rayon vecteur OM' est $\gtrless \rho$. Nous nous bornerons à vérifier la formule pour le premier cas. Nous aurons alors $OM' = \rho - k$, de sorte que la valeur de tang OM'S ne différera de celle donnée par la formule [*i*] que par le changement de k en $-k$; donc cette équation [*i*] convient au cas actuel où k est une quantité négative, et par conséquent l'équation [16] est générale.

159. Pour construire la tangente, on élève au pôle une perpendiculaire OT sur le rayon vecteur du point de contact, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec la tangente. Cette perpendiculaire se nomme la *sous-tangente* polaire, et il est clair que, quand on connaît sa longueur, la tangente est déterminée. Pour en obtenir la valeur, je considère le triangle OMT : il donne $OT = \rho \text{ tang } M$, et partant

$$OT = \rho^2 \lim \frac{h}{k} \qquad [17].$$

Observons que si cette valeur de OT est négative, la sous-

tangente devra être encore comptée sur une perpendiculaire au rayon vecteur du point de contact, mais de manière qu'elle fût dirigée au-dessus de l'axe polaire, si l'on rabattait sur cet axe le rayon vecteur mené au point de contact. Fig. 60.

160. Pour donner un exemple de la manière dont on doit s'y prendre pour calculer la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{h}{k}$, lorsque h converge vers zéro, nous allons nous proposer de mener une tangente au lieu de l'équation

$$\rho = \frac{b^2}{a + c\cos\omega} \qquad [18],$$

par le point M de ce lieu qui a pour coordonnées ω et ρ. Fig. 61.

Pour déterminer la limite du rapport $\frac{h}{k}$, je remplace, dans l'équation [18], ω et ρ par $\omega + h$ et $\rho + k$, ce qui donne

$$\rho + k = \frac{b^2}{a + c\cos(\omega + h)};$$

puis, après avoir renversé les deux membres de chacune de ces équations, je les soustrais l'une de l'autre, et je trouve

$$\frac{c}{b^2}[\cos(\omega + h) - \cos\omega] = \frac{1}{\rho + k} - \frac{1}{\rho} = -\frac{k}{\rho(\rho + k)},$$

ou, en transformant la différence $\cos(\omega + h) - \cos\omega$ en un produit de deux facteurs (*Trig.*, **35**),

$$\frac{2c}{b^2}\sin\left(\omega + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} = \frac{k}{\rho(\rho + k)},$$

équation que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{c}{b^2}\sin\left(\omega + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{\rho(\rho + k)} \cdot \frac{k}{h}.$$

Passant maintenant à la limite, il viendra

$$\lim\frac{k}{h} = \frac{c\rho^2\sin\omega}{b^2}, \quad \text{et partant} \quad \lim\frac{h}{k} = \frac{b^2}{c\rho^2\sin\omega}.$$

Donc enfin

$$\text{tang}\,M = \frac{b^2}{c\rho \sin\omega} \quad \text{et} \quad OT = \frac{b^2}{c \sin\omega}.$$

Fig. 61. Pour construire cette valeur de OT, j'élève en O une perpendiculaire indéfinie sur le rayon vecteur OM, et, ayant pris sur le prolongement de l'axe polaire la distance $OC = c$, je tire par C une parallèle à ce rayon vecteur; ainsi $OD = c \sin\omega$; si donc on prend $OI = b$, et que l'on joigne ID, en menant IT perpendiculairement sur ID, on aura $OT = \frac{b^2}{c \sin\omega}$; de sorte qu'il suffira de tirer TM pour avoir la tangente demandée.

*161. Il serait facile de *former l'équation polaire de la tangente;* mais elle serait trop compliquée pour être de quelque utilité. En effet, si l'on nomme (ω', ρ') les coordonnées du point de contact, (ω, ρ) les coordonnées courantes de la tangente, p sa distance au pôle et α son inclinaison sur l'axe polaire, on aura pour l'équation polaire de cette droite (77)

$$\rho = \pm \frac{p}{\sin(\alpha - \omega)}.$$

Mais $p = \rho' \sin M$ et $\alpha = \omega' + M$, ou $= \omega' + M - 180°$; donc l'équation polaire de la tangente sera

$$\rho = \frac{\rho' \sin M}{\sin(\omega' + M - \omega)},$$

avec les deux conditions

$$\text{tang}\,M = \rho' \lim \frac{h}{k} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega', \rho') = 0,$$

en désignant par $\varphi(\omega, \rho)$ l'équation de la courbe.

*162. Pour *mener une tangente par un point donné* C(ω', ρ'), situé comme on voudra sur le plan de la courbe, je suppose le problème résolu, c'est-à-dire que CM soit la tangente demandée. Alors, en appliquant au triangle OMC le principe du n° 62 de la Trigonométrie, on trouvera
Fig. 59.

$$\frac{\rho' + \rho}{\rho' - \rho} = \frac{\text{tang}\left(M + \frac{\omega - \omega'}{2}\right)}{\text{tang}\,\frac{\omega - \omega'}{2}}.$$

En joignant à cette équation les deux suivantes,

$$\text{tang}\,M = \rho \lim \frac{h}{k} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega, \rho) = 0,$$

on aura tout ce qu'il faut pour déterminer les coordonnées du point de contact.

***163.** Si l'on veut *mener une tangente qui soit parallèle à une droite donnée*, on appellera α l'angle que cette droite fait avec l'axe polaire, et on verra facilement que

$$M = \alpha - \omega, \quad \text{ou que} \quad M = 180^\circ + \alpha - \omega,$$

partant $$\text{tang}\,M = \text{tang}(\alpha - \omega).$$

On aura donc, pour déterminer les coordonnées ω et ρ du point de contact, les deux équations

$$\text{tang}(\alpha - \omega) = \rho \lim \frac{h}{k} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega, \rho) = 0.$$

CHAPITRE VI.

DES ASYMPTOTES.

§ I. Asymptotes d'une courbe rapportée à des coordonnées rectilignes.

164. *On appelle* ASYMPTOTE *d'une courbe une ligne dont cette courbe s'approche indéfiniment, à partir d'un de ses points, sans jamais la rencontrer, à quelque distance qu'on les suppose prolongées l'une et l'autre.*

Si donc, à partir d'un certain point M de la branche indé-
Fig. 62. finie CMD, les perpendiculaires abaissées des différents points de cette courbe sur la droite AB vont sans cesse en décroissant et peuvent devenir moindres que toute grandeur donnée, on dira que AB est une asymptote de la branche CD.

Nous ne nous occuperons que des asymptotes rectilignes, parce que la connaissance des asymptotes curvilignes est fort peu utile, et qu'une courbe qui en a une en ayant souvent une infinité d'autres, la recherche de cette seconde espèce d'asymptotes est alors tout à fait indéterminée.

165. C'est en considérant la limite vers laquelle tend la direction d'une tangente à une branche de courbe infinie, lorsque le point de contact s'éloigne sans cesse, que les géomètres ont été conduits à l'idée d'asymptotisme. On comprend, en effet, que tous les points de cette tangente variable s'approchant indéfiniment d'une droite fixe, le point de contact jouit aussi de cette propriété, et que par conséquent cette droite est une asymptote. La méthode la plus naturelle pour déterminer les asymptotes rectilignes d'une courbe algébrique $\varphi(x,y)=0$ consiste donc à former l'équation générale d'une tangente à cette courbe, et à y écrire que les coordonnées du point de contact sont infinies. Or, cette équation est

$$y-y'=-\frac{\varphi'(x'_1,y')}{\varphi'(x',y'_1)}(x-x'),$$

ou bien $y=-\dfrac{\varphi'(x'_1,y')}{\varphi'(x',y'_1)}x+\dfrac{y'\varphi'(x',y'_1)+x'\varphi'(x'_1,y')}{\varphi'(x',y'_1)},$

avec la condition $\qquad \varphi(x',y')=0;$

ainsi il s'agira de trouver ce que deviennent les deux quantités

$$-\frac{\varphi'(x'_1, y')}{\varphi'(x', y'_1)} \quad \text{et} \quad \frac{y'\varphi'(x', y'_1) + x'\varphi'(x'_1, y')}{\varphi'(x', y'_1)}$$

pour $x' = \infty$ et $y' = \infty$. Mais il arrivera le plus souvent que ces quantités se présenteront alors sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$; il faudra donc, avant d'y introduire ces hypothèses, en éliminer x' ou y' au moyen de l'équation de condition $\varphi(x', y') = 0$, et chercher ensuite les limites des fonctions résultantes en y' ou en x' seulement, de sorte qu'on pourra être ainsi conduit à des calculs excessivement pénibles. M. Cauchy a donné une solution du problème des asymptotes aussi simple qu'élégante; mais avant de l'exposer, nous allons appliquer la méthode précédente à la courbe représentée par l'équation Fig. 63.

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0.$$

L'équation de la tangente à cette courbe est, d'après la formule [9] du n° 145,

$$a^2y'y - b^2x'x + a^2b^2 = 0,$$

avec la condition $\quad a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2 = 0.$

Ainsi il s'agit de trouver les limites des quantités

$$\frac{b^2x'}{a^2y'} \quad \text{et} \quad -\frac{b^2}{y'},$$

pour $x' = \infty$ et $y' = \infty$. La limite de la seconde est évidemment zéro, donc les asymptotes, s'il en existe, passent par l'origine. Quant à la première quantité, j'y remplace y' par sa valeur

$$y' = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x'^2 - a^2},$$

ce qui donne $\pm\dfrac{bx'}{a\sqrt{x'^2 - a^2}} = \pm\dfrac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}}.$

Cette fonction de x' se réduit à $\pm\frac{b}{a}$ pour $x' = \infty$; ainsi notre courbe a deux asymptotes RR' et SS' représentées par les équations

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Veut-on vérifier que l'une de ces droites,

$$y=-\frac{b}{a}x,$$

par exemple, est une asymptote, on prendra la différence entre l'ordonnée de cette droite et celle de la courbe qui répond à la même abscisse, et il faudra que cette différence tende vers zéro quand x convergera vers l'infini. Or, si l'on considère la partie de cette droite qui s'étend au-dessus de l'axe des x, on comparera son ordonnée à la valeur positive de y tirée de l'équation de la courbe, valeur que nous désignerons par y_1. Nous aurons de cette manière

$$y-y_1=\frac{b}{a}\left[-x-\sqrt{x^2-a^2}\right],$$

ou, en changeant x en $-x$, puisque l'on devra faire croître x négativement,

$$y-y_1=\frac{b}{a}\left[x-\sqrt{x^2-a^2}\right].$$

Mais lorsque x augmente, les deux termes compris dans les crochets augmentent et deviennent infinis en même temps, et l'on a alors $y-y_1=\infty-\infty$, expression indéterminée. Pour éluder cette difficulté, je multiplie et je divise le second membre par $x+\sqrt{x^2-a^2}$, ce qui donne

$$y-y_1=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

et on voit alors que x croissant indéfiniment, à partir de a, $y-y_1$ décroît constamment depuis b jusqu'à zéro, et qu'ainsi la partie de la droite

$$y=-\frac{b}{a}x$$

qui est située au-dessus de l'axe des abscisses, est nécessairement une asymptote de la courbe. On en dira autant de son autre partie, et il sera bon de discuter ce second cas, ainsi que ceux de l'équation $y=+\frac{b}{a}x$.

166. La méthode que M. *Cauchy* a donnée pour déterminer les asymptotes rectilignes des courbes est une déduction directe de leur définition. Soit AB une asymptote de la
Fig. 62.

branche de courbe CD, *qui n'est point parallèle à l'axe des* y : son équation sera de la forme

$$y = cx + d,$$

et il faudra qu'en prenant la différence entre $cx + d$ et l'ordonnée de la courbe correspondante à la même abscisse x, cette différence soit une certaine fonction V de x qui, à partir de valeurs suffisamment grandes de cette variable, converge vers zéro lorsqu'on fera augmenter x jusqu'à $\pm\infty$, suivant que la branche que l'on considère s'étend indéfiniment du côté des abscisses positives ou négatives. L'équation de cette branche de courbe est donc de la forme

$$y = cx + d + \mathrm{V} \qquad [1].$$

c et d sont les inconnues de la question, et il s'agit en conséquence d'en déterminer les valeurs.

Pour y parvenir, je divise l'équation de la courbe par x, ce qui donne

$$\frac{y}{x} = c + \frac{d + \mathrm{V}}{x}.$$

Or, il est clair que le terme $\frac{d + \mathrm{V}}{x}$ tendra vers zéro à mesure que x augmentera, et qu'il s'évanouira tout à fait pour $x = \infty$, de sorte que c est la limite du second membre de l'équation précédente, et par conséquent aussi celle du premier; donc

$$c = \lim \frac{y}{x}.$$

Supposons que l'on ait ainsi trouvé la valeur de c, nous la substituerons dans l'équation [1], et en transposant le terme cx, nous en tirerons

$$y - cx = d + \mathrm{V},$$

ce qui montre que d est la limite du second membre, puisque $\mathrm{V} = 0$ quand $x = \infty$; donc

$$d = \lim (y - cx).$$

La détermination des asymptotes d'une courbe se trouve ainsi ramenée à calculer successivement les limites vers lesquelles tendent les fonctions $\frac{y}{x}$ et $(y - cx)$, lorsque x croît au delà de toute limite assignable.

Pour obtenir la première de ces limites, j'observe d'abord que l'équation de la courbe proposée étant supposée algébrique et de l'ordre m, nous pourrons réunir tous les termes du même degré et mettre la plus haute puissance de x que renfermera chaque groupe en facteur commun de tous les termes de ce groupe; ainsi le terme $Ay^p x^{n-p}$, qui est du degré p, revient à $A\left(\frac{y}{x}\right)^p x^{n-p}$. De cette manière chaque puissance de x multipliera une certaine fonction de $\frac{y}{x}$, de sorte que l'équation proposée sera de la forme*

$$F\left(\frac{y}{x}\right).x^m+F_1\left(\frac{y}{x}\right).x^{m-1}+F_2\left(\frac{y}{x}\right).x^{m-2}+\ldots=0 \qquad [2].$$

Cette équation fera connaître le rapport $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe proposée à son abscisse en fonction de cette abscisse; elle revient à

$$F\left(\frac{y}{x}\right)+F_1\left(\frac{y}{x}\right).\frac{1}{x}+F_2\left(\frac{y}{x}\right).\frac{1}{x^2}+\ldots=0.$$

Or, à mesure que x augmente, les termes qui ont pour dénominateurs les diverses puissances de x diminuent, puisque $\lim\frac{y}{x}$ est une quantité finie, de sorte que $F\left(\frac{y}{x}\right)$ tend vers zéro: donc les valeurs-limites de $\frac{y}{x}$ c'est-à-dire les valeurs de c sont les racines réelles de l'équation

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=0 \qquad [3].$$

Pour obtenir la limite de la différence $(y-cx)$, je représente par v cette différence, ce qui donne $y=cx+v$, et en

* Si cette équation était, par exemple, celle des courbes du second ordre

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

on la mettrait sous la forme

$$\left[A\left(\frac{y}{x}\right)^2+B\left(\frac{y}{x}\right)+C\right]x^2+\left[D\left(\frac{y}{x}\right)+E\right]x+F=0.$$

substituant cette valeur de y dans l'équation [2], on aura une équation

$$F\left(c+\frac{v}{x}\right).x^m+F_1\left(c+\frac{v}{x}\right).x^{m-1}+F_2\left(c+\frac{v}{x}\right).x^{m-2}+\ldots.=0,$$

qui déterminera v en fonction de x, de sorte qu'en y faisant $x=\infty$, la valeur correspondante de v sera la limite cherchée de la différence $(y-cx)$.

Or, si on développe chacun des coefficients de x dans l'équation précédente, d'après le théorème des fonctions dérivées (*Alg.*, 335), et que l'on ordonne encore l'équation résultante par rapport aux puissances décroissantes de x, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} vF'(c) \\ +F_1(c) \end{array}\right| x^{m-1} + \left.\begin{array}{l} \frac{v^2}{1.2}F''(c) \\ +\ v\ F_1'(c) \\ +\ F_2(c) \end{array}\right| x^{m-2} + \ldots.=0 \quad [4];$$

car c étant une racine de l'équation $F\left(\frac{y}{x}\right)=0$, on a identiquement $F(c)=0$. On en tire

$$\begin{array}{l} vF'(c)+\frac{v^2}{1.2}F''(c) \\ +F_1(c)+\ v\ F_1'(c) \\ \qquad\qquad +\ F_2(c) \end{array}\left|\frac{1}{x}+\ldots.=0 \qquad [5].\right.$$

Si on suppose $x=\infty$, v atteint sa limite d, et cette équation se réduit à

$$dF'(c)+F_1(c)=0 \quad \text{d'où} \quad d=-\frac{F_1(c)}{F'(c)} \quad [6].$$

167. On déduit des formules [3] et [6] la règle suivante : *Pour déterminer les asymptotes d'une courbe de l'ordre* m, *qui ne sont point parallèles à l'axe des* y, *mettez* x^m *en facteur commun des termes du* m^{ième} *degré, et égalez à zéro le coefficient de* x^m. *Les racines réelles de l'équation résultante* $F\left(\frac{y}{x}\right)=0$ *seront les valeurs du coefficient angulaire* c *de l'asymptote.*

Remplacez $\frac{y}{x}$ *successivement par chacune de ces valeurs dans le coefficient qu'a* x^{m-1}, *lorsqu'on a mis cette puissance de* x *en facteur commun des termes du* (m—1)^{me} *degre, et*

divisez la quantité ainsi trouvée par le résultat qu'on obtient en remplaçant $\frac{y}{x}$ par sa valeur dans la dérivée de $F\left(\frac{y}{x}\right)$, *prise en signe contraire; vous aurez ainsi l'ordonnée* d *à l'origine de l'asymptote.*

La droite $y=cx+d$ ainsi déterminée sera l'asymptote d'une branche de la courbe représentée par l'équation [2]; en effet, l'équation de cette branche étant représentée par

$$y=f(x),$$

on pourra toujours concevoir qu'on l'ait mise sous la forme

$$y-cx-d=f(x)-cx-d,$$

et on voit que le premier membre tendant à devenir nul, lorsque x croît au delà de toute limite, puisque d est la limite vers laquelle tend $(y-cx)$, le second membre tend aussi vers zéro; donc la différence entre les ordonnées de la droite $y=cx+d$ et de la courbe $y=f(x)$, correspondant à la même abscisse, décroît indéfiniment, lorsque x devient plus grand que toute quantité donnée. Toutefois *cette droite ne sera réellement une asymptote qu'autant que la courbe aura une branche infinie qui s'étendra vers elle*, c'est-à-dire que l'expression de l'ordonnée de la courbe ne deviendra pas imaginaire quand x tendra vers l'infini *.

168. Il suit de cette règle, 1° que si l'équation proposée

---

* Ainsi en appliquant la règle du n° **167** et les remarques du n° **168** à l'équation

$$x^4-2x^3y+x^2y^2+2x^3-2x^2y-y^2+2xy+2y-2x=0,$$

on verra que

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=1-2\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2},\quad F_1\left(\frac{y}{x}\right)=2-2\frac{y}{x},\quad F_2\left(\frac{y}{x}\right)=2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2},$$

donc $F(c)=1-2c+c^2=(c-1)^2$; de là $c=1$, $F'(c)=2(c-1)=0$, $\frac{F''(c)}{1.2}=1$, $F_1(c)=0$, $F'_1(c)=-2$, $F_2(c)=1$, $d^2-2d+1=0$, d'où $d=1$; de sorte que l'on trouve $y=x+1$ pour équation d'une asymptote, et cependant la courbe n'a pas d'asymptotes; car, comme on tire de son équation

$$y=x+1\pm\sqrt{\frac{1}{1-x^2}},$$

on voit que ses branches ne s'étendent pas au delà de l'abscisse $x=\pm1$.

n'a pas de terme du degré m où entre y, la courbe qu'elle représente n'aura pas d'asymptote oblique à l'axe des y.

2° Que si l'équation proposée n'a pas de terme du degré $(m-1)$, $d=0$, et ainsi les asymptotes passent toutes par l'origine.

3° Que si l'équation $F\left(\frac{y}{x}\right)=0$ a des racines égales, les valeurs de d correspondantes à ces racines sont infinies; car elles vérifient $F'\left(\frac{y}{x}\right)=0$, et qu'ainsi elles ne déterminent pas *en général* d'asymptotes.

4° Que si une racine multiple de $F\left(\frac{y}{x}\right)=0$ anéantit $F_1\left(\frac{y}{x}\right)$, la valeur de d deviendra $\frac{0}{0}$. Mais alors l'équation [5] d'où l'on a tiré la formule [6] ne pourra plus déterminer cette inconnue, puisque l'équation [4] d'où elle découle se réduit dans l'hypothèse actuelle à

$$\left[\frac{v^2}{1.2}F''(c)+vF'_1(c)+F_2(c)\right]x^{m-2}+\text{etc.}=0;$$

il faut donc faire $x=\infty$ dans cette équation, ce qui donnera

$$\frac{d^2}{1.2}F''(c)+dF'_1(c)+F_2(c)=0.$$

Ainsi à la racine multiple de $F\left(\frac{y}{x}\right)=0$ qui a anéanti $F_1\left(\frac{y}{x}\right)$ correspondront deux asymptotes, dont une est située à l'infini, si cette racine est triple.

On agira semblablement si la valeur particulière de c dont il s'agit anéantit les trois fonctions $F''\left(\frac{y}{x}\right)$, $F'_1\left(\frac{y}{x}\right)$, $F_2\left(\frac{y}{x}\right)$.

169. Il est bon d'observer que, si l'équation proposée $\varphi(x, y)=0$ est de la forme $(ny+px+q).\psi(x,y)=0$, la droite qui a pour équation $ny+px+q=0$ étant elle-même sa propre asymptote, on trouvera nécessairement cette droite en cherchant les asymptotes du lieu géométrique de l'équation $\varphi(x, y)=0$; d'où il suit qu'avant d'admettre comme asymptote une des droites trouvées, il faudra essayer

de diviser $\varphi(x, y)$ par le premier membre de l'équation de cette droite, ramenée à la forme $ny+px+q=0$.

170. Pour déterminer les asymptotes parallèles à l'axe des y, on observera qu'en mettant l'équation d'une pareille asymptote sous la forme

$$x=c'y+d',$$

on pourra trouver toutes les asymptotes qui ne sont pas parallèles à l'axe des x; mais, comme il ne s'agit plus que de celles qui sont parallèles à l'axe des y, il faudra ne s'occuper que des valeurs de c' égales à zéro.

Au reste, on pourra toujours déterminer très-simplement de la manière suivante les asymptotes qui sont parallèles à l'axe des y. En effet, si

$$x=k$$

est l'équation d'une pareille asymptote, il faudra que y tende vers l'infini à mesure que x s'approchera de k; et réciproquement, si cette condition est satisfaite, la droite représentée par l'équation $x=k$ sera une asymptote. La détermination des asymptotes parallèles à l'axe des y se réduit donc à la recherche des valeurs de x qui rendent y infinie. Pour cela, on divisera les deux membres de l'équation proposée par la plus haute puissance de y qu'elle renferme, et en y faisant ensuite $y=\infty$, on obtiendra une équation en x dont les racines réelles seront les différentes valeurs de k.

Remarquons que le premier membre de cette équation sera précisément le coefficient de la plus haute puissance de y dans la proposée. Si donc ce coefficient est indépendant de x, il n'y a pas d'asymptote parallèle à l'axe des ordonnées; mais s'il renferme x, il n'y a qu'à résoudre l'équation formée en l'égalant à zéro, pour avoir immédiatement la position des asymptotes demandées.

171. Appliquons les règles que nous venons d'établir aux courbes représentées par l'équation générale du second degré

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

Je mets donc x^2 et x respectivement en facteur commun des

termes du second et du premier degré, et il viendra

$$\left[A\left(\frac{y}{x}\right)^2+B\frac{y}{x}+C\right]x^2+\left[d\frac{y}{x}+E\right]x+F=0;$$

donc on aura

$$\begin{aligned}F(c)&=Ac^2+Bc+C=0,\\ F'(c)&=2Ac+B,\\ F_1(c)&=Dc+E.\end{aligned}$$

Ainsi l'équation des asymptotes est

$$y=cx-\frac{Dc+E}{2Ac+B} \qquad [7].$$

Comme les racines de l'équation $Ac^2+Bc+C=0$ ne sont réelles que si $B^2-4AC>0$ ou $=0$, on voit qu'il n'y a pas d'asymptote si $B^2-4AC<0$. Il n'y en a pas non plus si $B^2-4AC=0$; car alors les racines de $Ac^2+Bc+C=0$ étant égales, la dérivée $2Ac+B$ de son premier membre est nulle (**168**,3°). Donc il n'y a d'asymptotes que si $B^2-4AC>0$, et alors il y en a deux *.

---

* Lorsque l'équation de la courbe, dont on demande les asymptotes, est susceptible d'être résolue par rapport à l'une des variables, on peut calculer directement, par la résolution de l'équation proposée, les limites vers lesquelles tendent les fonctions $\frac{y}{x}$ et $(y-cx)$, lorsque la variable x tend elle-même successivement vers l'infini positif et vers l'infini négatif, en suivant, pour cela, la marche dont nous avons donné un exemple au n° **165**.

Nous allons appliquer cette méthode aux courbes du second ordre. Pour éviter toute confusion, il sera bon de considérer l'une après l'autre les deux valeurs de y que l'on tirera de l'équation générale du second degré,

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q},$$

en posant pour abréger

$$B^2-4AC=n,\quad BD-2AE=p,\quad D^2-4AF=q.$$

On trouvera ainsi pour la première branche, en faisant croître x positivement,

$$\frac{y}{x}=\frac{-B-\frac{D}{x}}{2A}+\frac{\sqrt{nx^2+2px+q}}{2Ax}=\frac{-B-\frac{D}{x}+\sqrt{n+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}}{2A};$$

d'où

$$c=\frac{-B+\sqrt{n}}{2A};$$

Lorsque A=0, auquel cas cette condition est remplie, si B

---

et x croissant négativement (on commence par changer x en $-x$, et ensuite on fait croître x positivement dans le résultat),

$$\frac{y}{x}=\frac{-B+\frac{D}{x}}{2A}-\frac{\sqrt{nx^2-2px+q}}{2Ax}=\frac{-B+\frac{D}{x}-\sqrt{n-\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}}{2A};$$

d'où
$$c=\frac{-B-\sqrt{n}}{2A};$$

puis, en prenant successivement la première et la seconde valeur de c,

$$y-cx=\frac{\sqrt{nx^2+2px+q}-x\sqrt{n}}{2A}-\frac{D}{2A}$$

$$=\frac{2p+\frac{q}{x}}{2A\left(\sqrt{n+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}+\sqrt{n}\right)}-\frac{D}{2A};$$

d'où
$$d=\frac{p-D\sqrt{n}}{2A\sqrt{n}};$$

$$y-cx=\frac{\sqrt{nx^2-2px+q}-x\sqrt{n}}{2A}-\frac{D}{2A}$$

$$=\frac{-2p+\frac{q}{x}}{2A\left(\sqrt{n-\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}+\sqrt{n}\right)}-\frac{D}{2A};$$

d'où
$$d=\frac{-p-D\sqrt{n}}{2A\sqrt{n}}.$$

Ainsi la droite $y=\frac{-B+\sqrt{n}}{2A}x+\frac{p-D\sqrt{n}}{2A\sqrt{n}}$ est asymptote de la partie de la branche

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}+\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$$

qui s'étend dans le sens des abscisses positives, et l'autre partie de cette branche a pour asymptote la droite

$$y=\frac{-B-\sqrt{n}}{2A}x-\frac{p+D\sqrt{n}}{2A}.$$

On trouvera de la même manière que la première droite est asymptote de la partie de la branche

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}-\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$$

qui s'étend dans le sens des abscisses négatives, tandis que l'autre partie de cette branche a la seconde droite pour asymptote.

n'est pas nul, l'une des racines de $F(c)=0$ est infinie, et alors l'asymptote qu'elle détermine doit être parallèle à l'axe des y. Mais, comme la règle du n° **167** n'a été établie que pour les asymptotes qui ont une autre direction, il faut appliquer ici la règle du n° **170**. J'ordonne donc l'équation proposée par rapport aux puissances décroissantes de y, ce qui donne

$$(Bx+D)y+(Cx^2+Ex+F)=0;$$

et je vois qu'il y a une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées dont l'équation est

$$Bx+D=0, \quad \text{d'où} \quad x=-\frac{D}{B}.$$

Voyons donc si cette équation est un cas particulier de l'équation [7]. En conséquence, nous allons y faire $A=0$ et partant $c=\infty$; mais auparavant nous diviserons ses deux membres par c, ce qui donnera

$$x=\frac{y}{c}+\frac{D+\frac{E}{c}}{2Ac+B}.$$

Quand on y fera $A=0$, les termes $\frac{y}{c}$ et $\frac{E}{c}$ s'évanouiront, mais le terme Ac deviendra $0\times\infty$. Pour en obtenir la vraie valeur, je divise l'équation $Ac^2+Bc+C=0$ par c, puis en y faisant $c=\infty$, je trouve qu'elle se réduit à $Ac+B=0$, d'où $Ac=-B$. L'équation des asymptotes deviendra donc

$$x=-\frac{D}{B}.$$

Ainsi l'équation [7] donne toutes les asymptotes que peut avoir la courbe représentée par l'équation générale du second degré lorsque $B^2-4AC>0$.

Remarquons que si $D=0$, l'équation ci-dessus se réduit à $x=0$.

172. Donc *quand le carré de* y *manquera dans l'équation du second degré, cette équation représentera une courbe qui aura une asymptote parallèle à l'axe des* y, *et qui sera cet axe lui-même, si le terme du premier degré en* y *manque aussi.* Les mêmes propriétés ont lieu par rapport à l'axe des x; car si l'on y permute x et y, ce qui revient à prendre l'axe

des abcisses pour celui des ordonnées, et réciproquement on a toujours $B^2-4AC>0$.

173. Il suit de là que *si l'équation du second degré ne renferme que le rectangle des variables et un terme constant, elle représentera une courbe rapportée à ses asymptotes*, comme on peut le reconnaître directement en résolvant l'équation

$$Bxy+F=0,$$

successivement par rapport à chaque variable et en faisant ensuite croître l'autre jusqu'à $\pm\infty$.

Si en outre $F=0$, cette courbe se réduit au système de deux droites qui se coupent.

174. Enfin si $C=-A$, et que les axes des coordonnées soient rectangulaires, les deux asymptotes se coupent à angles droits; car le produit des racines de l'équation $F(c)=0$ est alors égal à -1. Ainsi *quand les coefficients des carrés des variables sont égaux et de signes contraires dans l'équation du second degré en coordonnées rectangulaires, cette équation représente une courbe qui a deux asymptotes perpendiculaires entre elles.*

§ II. Asymptotes d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires.

175. Lorsqu'une courbe est rapportée à des coordonnées polaires, on connaîtra d'abord toutes les directions que peuvent avoir ses asymptotes, en cherchant les valeurs de ω qui donnent pour ρ une valeur infinie. Pour cela, on ordonnera l'équation proposée par rapport aux puissances décroissantes de ρ, on égalera ensuite à zéro le coefficient de la plus haute puissance de cette variable (**170**), et en résolvant l'équation ainsi formée, on en tirera différentes valeurs ω', ω'', ω'''... de ω. Ce seront là les inclinaisons des asymptotes sur l'axe polaire, de sorte que, pour achever de déterminer ces droites, si elles existent, il suffira de calculer leurs distances au pôle. On y parviendra par les mêmes considérations sur lesquelles nous nous sommes appuyés dans ce qui précède.

Regarde-t-on, en effet, l'asymptote comme la limite vers laquelle tend la direction d'une tangente dont le point de

contact s'éloigne indéfiniment : il ne s'agira que de construire, au moyen de la sous-tangente polaire,

$$OT = \rho^2 \lim \frac{h}{k},$$

les tangentes correspondantes aux valeurs trouvées $\omega = \omega'$, $= \omega''$, $= \omega'''$, etc., et $\rho = \infty$. Ainsi ce procédé ne présente pas d'autre difficulté que celle de trouver ce que devient l'expression précédente de OT quand on y suppose, par exemple, $\omega = \omega'$ et $\rho = \infty$. Si cette valeur de OT n'a point de limite, la courbe n'a pas d'asymptote.

Prenons pour exemple l'équation

$$\rho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega},$$

a, b, c étant trois constantes liées entre elles par la relation

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Pour que ρ soit infini, il faut et il suffit que $\cos\omega = \frac{a}{c}$, et si l'on appelle α le plus petit des arcs positifs qui ont $\frac{a}{c}$ pour cosinus, la formule de tous ces arcs sera $\omega = 2k\pi \pm \alpha$; mais comme en donnant à ω des valeurs plus grandes que 360°, on retrouve les mêmes valeurs de ρ, et par conséquent les mêmes points qu'en faisant croître ω depuis zéro jusqu'à 360°, on n'a pour ω que les deux valeurs α et $360° - \alpha$.

Cela posé, j'observe que l'équation de notre courbe ne différant de celle que nous avons considérée au nº **160** que par le signe de c, la valeur de OT que nous cherchons ne différera de celle que nous avons trouvée alors que par le signe de cette constante : donc

$$OT = -\frac{b^2}{c\sin\omega}.$$

Mais $\cos\omega = \frac{a}{c}$ donne $\sin\omega = \pm\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2}} = \pm\frac{b}{c}$; donc

$$OT = \mp b.$$

Ainsi, il y a deux asymptotes distantes du pôle de la quantité b, et faisant avec l'axe polaire les angles qui ont $\frac{a}{c}$ pour

cosinus. La première valeur de OT répond au plus petit de ces angles, et la seconde au plus grand.

Fig. 63. Pour construire ces asymptotes, je prends $OC=c$, $CA=a$; j'élève au point A une perpendiculaire que je coupe par un arc de cercle décrit de C comme centre avec le rayon c, et l'angle ACD, et son supplément à 360° ont $\frac{a}{c}$ pour cosinus, de sorte qu'en menant par O des parallèles aux côtés CD et CD' de ces angles, nous aurons les directions des rayons vecteurs qui sont infinis. Il faut donc leur mener des parallèles qui en soient distantes de b et qui soient situées du côté de CD et de CD' (159). Or, si l'on abaisse OB perpendiculaire sur CD, on forme un triangle OBC égal à CAD; partant $OB=AD=\sqrt{c^2-a^2}=b$; donc CD est la première asymptote. Par la même raison, CD' est la seconde.

176. La seconde méthode pour déterminer les asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées polaires découle
Fig. 62. de la définition même de ces lignes. Désignons, en effet, par ω' une valeur de ω pour laquelle ρ est infini, on prendra sur la courbe un point quelconque M, duquel on abaissera une perpendiculaire $MQ=z$ sur la direction de ce rayon vecteur OQ, et on aura ainsi

$$z=\rho\sin(\omega'-\omega).$$

La limite vers laquelle tendra z lorsque l'angle ω convergera vers ω' sera la distance OA du pôle à l'asymptote. Si cette limite est zéro, on en conclura que la droite qui fait l'angle ω' avec l'axe polaire est l'asymptote; mais, si l'on trouve $\lim\rho\sin(\omega'-\omega)=\pm k$, l'asymptote sera une parallèle à cette droite située au-dessous ou au-dessus d'elle, par rapport à l'axe
Fig. 64. polaire, et à la distance k. En effet, dans la figure 64 on a

$$z=\rho\sin(\omega-\omega'),$$

de sorte que

$$OA=-\lim\rho\sin(\omega'-\omega),$$

et ici la perpendiculaire OA sera dirigée au-dessus de l'axe polaire quand le rayon vecteur infini OQ sera rabattu sur cet axe; ce sera le contraire dans la figure 62.

Enfin, si z n'a pas de limite, il n'y a pas d'asymptote qui fasse l'angle ω' avec l'axe polaire.

Pour déterminer la limite du produit $\rho \sin(\omega' - \omega)$, on pourra observer qu'elle est la même que celle du produit $\rho(\omega' - \omega)$; car, lorsque $\omega = \omega'$, les quantités $(\omega' - \omega)$ et $\sin(\omega' - \omega)$ deviennent égales, puisque la limite de leur rapport $\frac{\sin(\omega' - \omega)}{\omega' - \omega}$ est l'unité. On éliminera donc ρ entre l'équation $z = \rho(\omega' - \omega)$ et celle $\varphi(\omega, \rho) = 0$ de la courbe proposée, puis on posera $\omega' - \omega = \alpha$, d'où $\omega = \omega' - \alpha$; de cette manière z sera exprimé en fonction de ω' et de α, et en cherchant ce que devient cette fonction pour $\alpha = 0$, on aura sa valeur pour $\omega = \omega'$.

CHAPITRE VII.

DU CENTRE.

177. *On appelle* CENTRE *d'une courbe un point tel que toute sécante passant par ce point rencontre la courbe en des points qui sont deux à deux équidistants du point dont il s'agit.*

178. Il suit immédiatement de cette définition que si l'origine des coordonnées est placée au centre d'une courbe quelconque, l'équation de cette courbe ne sera pas altérée si
Fig. 65. l'on y remplace x et y par $-x$ et par $-y$. Considérons, en effet, une sécante menée arbitrairement par le centre O : elle coupera la courbe en des points qui seront deux à deux équidistants de O. Soient M et M' deux de ces points. Tirons leurs ordonnées MP et M'P', et nous formerons deux triangles OMP et OM'P' qui seront évidemment égaux : donc MP=M'P' et OP=OP'; donc les coordonnées du point M' sont égales et de signes contraires à celles de M; donc, puisque la sécante MOM' est quelconque, les coordonnées de tous les points de la courbe seront deux à deux égales et de signes contraires, de sorte que *l'équation de cette courbe ne devra pas changer si l'on y remplace* x *et* y *par* $-$x *et par* $-$y.

Réciproquement, *si l'équation d'une courbe n'est pas altérée lorsqu'on y change* x *et* y *en* $-$x *et en* $-$y, *cette courbe a pour centre l'origine des coordonnées.* Soit, en effet, M un point quelconque de la courbe dont il s'agit, menons par l'origine la droite MO, et prolongeons-la d'une quantité OM' égale à OM, il est clair que les coordonnées du point M' seront égales et de signes contraires à celles du point M; mais l'équation de la courbe ne change pas lorsqu'on y remplace x et y par $-x$ et par $-y$; puis donc que les coordonnées de M satisfont à cette équation, celles de M' la vérifieront aussi; donc M' est un point de la courbe. Or, MOM' est une sécante quelconque; donc toute sécante menée par l'origine coupe la courbe en des points qui, deux à deux, sont également distants de O; donc O est un centre.

Ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour que l'origine des coordonnées soit un centre d'une courbe quelconque,* ALGÉBRIQUE *ou* TRANSCENDANTE, *c'est que l'équation de cette courbe ne soit pas altérée lorsqu'on y changera* x *et* y *en* —x *et en* —y.

Il suit de là que la courbe transcendante $y = \sin x$ a pour centre l'origine des coordonnées, et qu'elle a même une infinité de centres qui sont les points où elle coupe l'axe des x; car, si l'on transporte l'origine des coordonnées sur cet axe au point dont l'abscisse est $k\pi$, cette équation deviendra $y = \sin(k\pi + x) = \pm \sin x$, équation qui reste invariable, quand on y remplace x et y par $-x$ et par $-y$. Il sera facile de discuter l'équation de cette courbe qu'on a nommée la *sinussoïde*, et de reconnaître exactement sa forme.

179. Si la courbe proposée est algébrique, la condition ci-dessus énoncée revient à la suivante : *Pour que l'origine des coordonnées soit le centre d'une courbe algébrique, il faut et il suffit que tous ses termes soient de même parité, c'est-à-dire tous de degré pair ou tous de degré impair*. Soit, en effet, Ax^py^q un terme quelconque de cette équation : si $(p+q)$ est pair, p et q sont tous deux pairs, ou tous deux impairs : dans ces deux cas, le terme Ax^py^q ne changera pas de signe lorsqu'on remplacera x et y par $-x$ et par $-y$; mais le contraire aura lieu si $(p+q)$ est impair; car l'un des exposants p ou q étant pair et l'autre impair, un des facteurs du produit x^py^q deviendra négatif, tandis que l'autre sera positif. Donc, si l'équation contenait des termes qui fussent les uns de degré pair, et les autres de degré impair, elle serait altérée lorsqu'on y remplacerait x et y par $-x$ et par $-y$; au contraire, elle ne sera pas altérée par ce changement, si ces termes sont tous de degré pair ou tous de degré impair.

La courbe $y = x^3$ que nous avons construite au n° **52**, a pour centre celui de ses points où est placée l'origine.

180. Il suit de la théorie précédente que pour reconnaître si une courbe algébrique donnée par son équation a un centre, il faudra représenter par a et par b les coordonnées inconnues de ce centre, y transporter l'origine en changeant dans son équation x et y respectivement en $x+a$ et en $y+b$ (**93**), puis égaler à zéro les coefficients de tous les termes qui, dans la transformée, seront de degré impair, si

cette équation est de degré pair, ou ceux de tous les termes de degré pair, si elle est de degré impair. Les équations de condition ainsi formées serviront à déterminer a et b. La courbe proposée aura donc un centre, si l'on peut tirer de ces équations un couple de valeurs réelles et finies pour a et b, et elle n'en aura pas si les équations de condition n'admettent pas de pareilles valeurs. Si ces équations sont indéterminées, il y aura une infinité de centres.

181. Or, *il est très-remarquable qu'une courbe algébrique ne puisse pas avoir plusieurs centres* *. Supposons, en effet,
Fig. 65. qu'une pareille courbe puisse avoir deux centres A et O : prenons l'un d'eux O pour origine, faisons passer l'axe des y par l'autre centre A, et soit $\varphi(x,y)=0$ l'équation de la courbe rapportée à ce système d'axes. Cette équation aura tous ses termes de même parité, et elle devra conserver la même forme si l'on transporte l'origine au point A (**179**), ce qui se fera en changeant y en $y+b$ dans $\varphi(x,y)=0$. Or, si Ay^nx^p est le terme de cette équation où y a le plus haut exposant (p peut être nul), il y aura dans la transformée le terme $nAby^{n-1}x^p$ qui ne pourra se réduire avec aucun autre; car la proposée ne renferme aucun terme semblable à celui-ci. Donc l'équation transformée n'aura pas tous ses termes de même parité, si la proposée renferme y. Cette proposée n'est donc fonction que de x, et représente par conséquent, non pas une courbe, mais un système de droites parallèles à l'axe des y, et qui en sont deux à deux équidistantes. Chacun des points de cet axe est un centre de ce système de parallèles, et cet axe est même l'une de ces droites, si l'équation est de degré impair.

---

* Cela résulte de ce que, parmi les équations de condition, il y en a toujours deux qui ne renferment a et b qu'à la première puissance. C'est ce qu'on reconnaît facilement en considérant les deux premiers termes de l'équation générale du degré m à deux variables, savoir : $a_0x^m+(a_1y+b_1)x^{m-1}$; car, en y remplaçant x et y respectivement par $a+x$ et par $b+y$, on trouve que le coefficient de x^{m-1} est $ma_0a+a_1b+b_1$. S'il n'y avait pas de terme en x seulement, ce coefficient se réduirait à a_1b+b_1, c'est-à-dire qu'il ne renfermerait que l'une seulement des deux quantités a et b. Les termes en y^m et en y^{m-1} conduiraient de même à une équation du premier degré en a et en b.

182. Appliquons la règle du n° **180** aux courbes représentées par l'équation générale du second degré

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad [1].$$

Changeons-y donc x et y respectivement en $(x+a)$ et en $(y+b)$, et il viendra

$$Ay^2+Bxy+Cx^2 \left.\begin{array}{l}+2Ab\\+Ba\\+D\end{array}\right| y \left.\begin{array}{l}+Bb\\+2Ca\\+E\end{array}\right| x \begin{array}{l}+Ab^2\\+Bab\\+Ca^2\\+Db\\+Ea\\+F\end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}=0.$$

Remarquez avec soin que les termes du second degré dans cette transformée sont les mêmes que dans la proposée; que les coefficients de x et de y sont les dérivées respectives, par rapport à x et par rapport à y, du premier membre de l'équation [1], dans lesquelles on a remplacé x et y par les coordonnées a et b de la nouvelle origine, et que le terme indépendant des variables est le résultat de la substitution de ces quantités a et b au lieu de x et de y dans le premier membre de [1].

Pour que le lieu de l'équation ci-dessus ait un centre, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un couple de valeurs de a et de b qui vérifient les deux équations

$$\left.\begin{array}{r}2Ab+Ba+D=0\\Bb+2Ca+E=0\end{array}\right\} \quad [2].$$

Or, si l'on regarde a et b comme des coordonnées courantes, ces deux équations représenteront deux lignes droites qui passeront chacune par le centre et qui le détermineront par leur intersection. Ainsi, pour que ce centre existe, il faut et il suffit que les droites représentées par les deux équations ci-dessus se coupent, ou, ce qui revient au même, que les coefficients angulaires de ces droites soient inégaux (**124**), c'est-à-dire que l'on ait

$$-\frac{B}{2A} \gtrless -\frac{2C}{B}, \quad \text{ou bien} \quad B^2-4AC \gtrless 0.$$

Telle est donc la relation nécessaire et suffisante qui doit

existier entre les coefficients de l'équation générale du second degré pour que le lieu de cette équation ait un centre.

Mais si l'on a $B^2-4AC=0$, il en résultera $-\frac{B}{2A}=-\frac{2C}{B}$, et les coefficients angulaires des droites représentées par les équations [2] étant égaux, ces droites seront parallèles; donc le centre qui doit être déterminé par leur intersection n'existera pas. Et, en effet, B^2-4AC étant le dénominateur des valeurs

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}, \quad b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}$$

qu'on tire des équations [2], ces valeurs deviennent infinies lorsque $B^2-4AC=0$, et par conséquent les équations de la simultanéité desquelles dépend l'évanouissement des termes de degré impair étant incompatibles, comme on le démontre dans l'*Algèbre* (**146**), on voit qu'il ne peut pas y avoir alors de centre.

Si les droites représentées par les équations [2] coïncident, ce que l'on exprimera en posant

$$-\frac{B}{2A}=-\frac{2C}{B} \quad \text{et} \quad -\frac{D}{2A}=-\frac{E}{B},$$

ou, ce qui revient au même,

$$B^2-4AC=0 \quad \text{et} \quad 2AE-BD=0,$$

la courbe aura une infinité de centres, tous situés sur la droite que représentent alors également les deux équations [2]. C'est ce qu'indique l'Algèbre; car les valeurs trouvées pour a et b se réduisent à $\frac{0}{0}$, dans les hypothèses actuelles, et on sait que, dans ce cas, l'une des équations [2] est le produit de l'autre par un certain facteur, de sorte qu'elles ne tiennent lieu que d'une seule, et ne sauraient en conséquence suffire pour déterminer a et b (*Algèbre*, **147**) : il y a donc une infinité de couples de valeurs de a et de b au moyen desquelles on pourra faire évanouir de l'équation générale du second degré, les termes de degré impair, et partant il y a une infinité de centres. Cette équation devra alors représenter, non pas une courbe, mais le système de deux droites parallèles à la droite

$$2Ab+Ba+D=0$$

et qui en seraient également distantes (**181**). En effet, si l'on résout l'équation [1] par rapport à y, on trouvera

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF},$$

formule qui, en vertu des hypothèses,

$$B^2-4AC=0 \quad \text{et} \quad 2AE-BD=0,$$

se réduit à $\quad y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF} \qquad [3].$

Si $D^2-4AF>0$, cette équation représente deux parallèles CD et EF à la droite AB, qui a pour équation Fig. 66.

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \quad \text{ou} \quad 2Ay+Bx+D=0,$$

et qui en sont également éloignées. Ainsi cette dernière équation, qui n'est d'ailleurs que la première des équations [2], représente le lieu des centres du système des droites comprises dans l'équation [3].

183. Remarquons que *le centre d'une courbe du second ordre se trouve déterminé par l'intersection des droites qui ont pour équations les dérivées de l'équation de cette courbe prises successivement par rapport à* x *et par rapport à* y,

$$\begin{aligned} 2Ay+Bx+D&=0, \\ By+2Cx+E&=0; \end{aligned}$$

et qu'ainsi, *pour exprimer qu'une pareille courbe a pour centre un point donné, il faut écrire que ses coordonnées* a *et* b *vérifient ces deux équations*. On a donc alors les deux équations de condition

$$\begin{aligned} 2Ab+Ba+D&=0, \\ Bb+2Ca+E&=0, \end{aligned}$$

entre les coefficients indéterminés de la proposée, ce qui montre que *la détermination du centre équivaut à deux conditions*.

CHAPITRE VIII.

DES DIAMÈTRES.

184. *On appelle* DIAMÈTRE *une ligne qui divise en deux parties égales un système de cordes parallèles.*

Si un diamètre est une ligne droite, et qu'il soit perpendiculaire à ses CORDES CONJUGUÉES, c'est-à-dire aux cordes qu'il divise en deux parties égales, *on lui donne le nom d'*AXE, *et les points où il rencontre la courbe sont dits les* SOMMETS *de cette courbe.*

185. Nous allons nous proposer de *trouver l'équation générale des diamètres d'une courbe donnée par son équation.*

Fig. 67. PREMIÈRE MÉTHODE. Soient $\varphi(x, y) = 0$ l'équation rationnelle et entière de la courbe proposée, AB, A'B',... un système de cordes parallèles dont le coefficient angulaire est m; (x', y') les coordonnées du milieu M de l'une d'elles: transportons l'origine au point M. L'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes sera $\varphi(x+x', y+y') = 0$, et la corde AB aura pour équation $y = mx$. Puis donc que la nouvelle origine est le milieu de cette corde AB, il faudra qu'en éliminant y entre les équations $\varphi(x+x', y+y') = 0$ et $y = mx$, l'équation résultante $\psi(x) = 0$ ait deux racines égales et de signes contraires. Il devra donc y avoir un plus grand commun diviseur du second degré entre son premier membre et $\psi(-x)$, ou, ce qui revient au même, entre la somme des termes de degré pair de l'équation $\psi(x) = 0$ et la somme de ses termes de degré impair divisée par x (*Alg.*, **561**). On cherchera ce plus grand commun diviseur, et en égalant à zéro le reste correspondant au diviseur du second degré, *lequel reste sera indépendant de* x, on aura une équation entre les coordonnées x' et y' du milieu de la corde AB et la constante m. Or, cette équation ne renfermera rien de particulier à cette corde; donc la relation qu'elle établira entre les coordonnées de son milieu conviendra également aux coordonnées du milieu de toute autre corde dont le co-

efficient angulaire est encore m; donc elle sera l'équation du lieu de tous ces milieux, c'est-à-dire l'équation générale des lignes diamétrales de la proposée $\varphi(x, y) = 0$.

186. Deuxième Méthode. Soient $\varphi(x, y) = 0$ l'équation de la courbe proposée, et $y = mx + n$ celle d'une sécante Fig. 67. quelconque AC. Si nous voulons avoir les abscisses des points d'intersection de ces deux lignes, il n'y aura qu'à éliminer y entre leurs équations, et ces abscisses seront ainsi les racines de l'équation $\varphi(x, mx + n) = 0$.

Cela posé, soient x' et y' les coordonnées du milieu M de l'une quelconque AB des cordes que la sécante laisse dans la courbe : nous aurons entre ces coordonnées la relation

$$y' = mx' + n,$$

et x' sera la demi-somme des abscisses des extrémités de cette corde. Donc l'équation qui a pour racines les abscisses des milieux de toutes les cordes interceptées par la courbe sur notre sécante est précisément l'équation aux demi-sommes des racines de l'équation $\varphi(x, mx + n) = 0$. Formons cette équation, et appelons-la

$$\pi(x') = 0.$$

Alors, si entre les équations $y' = mx' + n$ et $\pi(x') = 0$ nous éliminons la quantité n, qui varie en passant d'une sécante à une autre qui lui est parallèle, l'équation finale

$$F(x', y') = 0$$

sera l'équation du lieu des milieux de toutes les cordes dont le coefficient angulaire est m, c'est-à-dire l'équation générale des lignes diamétrales de la courbe proposée.

187. Cette méthode s'applique très-bien aux courbes du second et du troisième ordre; car elle ne présente d'autre difficulté de calcul que la formation de l'équation aux demi-sommes des racines de l'équation $\varphi(x, mx + n) = 0$; et quand cette équation est d'un degré inférieur au quatrième, on peut écrire immédiatement son équation aux demi-sommes (*Alg.*, **331**). Mais elle devient presque impraticable si l'équation proposée est d'un degré supérieur au troisième. La première lui est préférable même pour les courbes du second ordre, et surtout pour celles d'un degré plus élevé que le troisième. On

voit, en effet, que l'équation $\psi(x) = \varphi(x + x', y' + mx) = 0$ du n° **185** se formera très-facilement au moyen du *théorème de Taylor*, étendu aux fonctions de deux variables (*Algèbre*, **341**), et ensuite que la recherche du plus grand commun diviseur entre la somme des termes de degré pair de cette équation et celle de ses termes de degré impair divisée par x, ne sera pas, en général, bien longue, puisque chaque diviseur ne renfermera que des termes de degré pair, et sera ainsi d'un degré inférieur au moins de deux unités à celui du précédent.

Exemple. Soit $\varphi(x, y) = xy^2 + yx^2 - a^3 = 0$. Nous trouverons

$$\psi(x) = \begin{array}{l} x'y'^2 \\ + y'x'^2 \\ - a^3 \end{array} \begin{array}{l} + y'(y'+2x') \\ + x'(x'+2y')m \\ \end{array} \left| \, x \begin{array}{l} + y' \\ + 2(y'+x')m \\ + x'm^2 \end{array} \right| \, x^2 \begin{array}{l} + m \\ + m^2 \\ \end{array} \left| \, x^3 = 0. \right.$$

Pour abréger, nous représenterons cette équation par

$$\psi(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

La somme des termes de degré impair est $(Ax^2 + C)x$, celle des termes de degré pair est $Bx^2 + D$; il faut donc que l'un quelconque des binômes $Ax^2 + C$ et $Bx^2 + D$ divise l'autre, ce qui donne l'équation de condition $\frac{C}{A} = \frac{D}{B}$, ou $BC - AD = 0$. Substituant enfin aux lettres A, B, C, D les quantités qu'elles représentent, on trouvera, en supprimant les accents,

$$[y + 2m(y + x) + m^2x].[y(y + 2x) + mx(x + 2y)] \\ - m(m + 1)(xy^2 + yx^2 - a^3) = 0.$$

Telle est l'équation cherchée.

188. Prenons pour *deuxième exemple* l'équation générale du second degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Il suit de la remarque que nous avons faite au n° **182**, que si, dans le premier membre de cette équation, on remplace x et y par $x + x'$ et par $y + y'$, les coefficients de y et de x seront respectivement $2Ay' + Bx' + D$ et $By' + 2Cx' + E$, de sorte que, quand on aura remplacé y par mx, le coeffi-

cient de la première puissance de x dans l'équation transformée sera

$$(2Ay'+Bx'+D)m+(By'+2Cx'+E):$$

mais, pour que cette équation ait ses racines égales et de signes contraires, il faut et il suffit que le coefficient de cette première puissance de x soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$(2Ay+Bx+D)m+(By+2Cx+E)=0 \quad [5],$$

en supprimant les accents. Telle est donc l'équation générale des lignes diamétrales des courbes du deuxième ordre. Pour la former, *ajoutez à la dérivée du premier membre de l'équation de ces courbes, prise par rapport à* x, *le produit par* m *de la derivée par rapport à* y *de la même équation, et égalez la somme à zéro.*

189. La forme de cette équation donne lieu à diverses conséquences que nous allons développer.

On voit, 1° que *les courbes du second ordre ne peuvent avoir que des diamètres rectilignes.*

2° Que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle à ses cordes conjuguées;* car de l'équation générale des diamètres on tire $m=-\frac{By+2Cx+E}{2Ay+Bx+D}$, et cette valeur de m est précisément le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y).

La tangente menée au point où une courbe du second ordre est coupée par son axe, est donc perpendiculaire à cet axe.

3° *Tout diamètre passe par le centre;* car il est évident que les coordonnées de ce point satisfont nécessairement à l'équation générale des diamètres, puisqu'elles ne sont autres (**183**) que les valeurs de x et de y qui vérifient les équations

$$2Ay+Bx+D=0 \quad \text{et} \quad By+2Cx+E=0.$$

4° Réciproquement, *toute droite menée par le centre d'une courbe du second ordre est un diamètre de cette courbe;* car si

$$y-b=m'(x-a)$$

est l'équation de cette droite, a et b désignant les coordonnées

du centre, il suffira, pour la faire coïncider avec un diamètre, d'égaler leurs coefficients angulaires, c'est-à-dire de poser

$$-\frac{Bm+2C}{2Am+B}=m'.$$

Or, on pourra toujours satisfaire à cette équation, puisqu'elle est du premier degré par rapport à m, et que cette inconnue est susceptible de recevoir toutes les valeurs possibles.

Il faut toutefois excepter le cas où la valeur de m' serait telle que l'équation précédente déterminerait pour m une valeur égale à celle de m'; car alors le diamètre serait parallèle à ses cordes conjuguées, ce qui serait absurde. Cette valeur exceptionnelle de m' sera donnée par l'équation

$$-\frac{Bm'+2C}{2Am'+B}=m', \quad \text{d'où} \quad Am'^2+Bm'+C=0.$$

190. Si $B^2-4AC=0$, auquel cas la courbe n'a pas de centre (**182**) et est une *parabole,* comme nous le verrons bientôt (**200**), on trouvera, en introduisant cette condition dans l'expression $-\frac{Bm+2C}{2Am+B}$ du coefficient angulaire du diamètre, que ce coefficient se réduit à la quantité constante $-\frac{B}{2A}$. Donc *tous les diamètres de la parabole sont parallèles.*

191. Si l'on veut *déterminer les axes des courbes du second ordre* (**184**), il faudra exprimer que le coefficient angulaire du diamètre et celui de ses cordes conjuguées sont réciproques et de signes contraires (*nous supposerons dans ce numéro et dans le suivant que les axes des coordonnées soient rectangulaires*); donc

$$-\frac{Bm+2C}{2Am+B}=-\frac{1}{m}, \quad \text{d'où} \quad Bm^2-2(A-C)m-B=0 \quad [6],$$

équation dont les racines sont réelles, réciproques et de signes contraires; donc elle fait connaître à la fois et la direction des cordes et celle du diamètre qui les coupe perpendiculairement par leurs milieux; et comme il n'y a pas de raison pour prendre l'une de ces racines pour le coefficient angulaire de ces cordes plutôt que pour celui de ce diamètre, on en conclut que *les courbes du second ordre ont deux axes qui se coupent à angles droits. Ces axes divisent chacun la courbe en deux*

parties symétriques, et on les nomme, en conséquence, les AXES DE SYMÉTRIE *ou les* AXES PRINCIPAUX *de cette courbe.*

192. Toutefois l'un de ces axes cesserait d'exister si l'une des valeurs de m tirée de l'équation [6] rendait infinie l'ordonnée à l'origine du diamètre correspondant; or, cette ordonnée a pour expression $-\frac{Dm+E}{2Am+B}$; donc il faut que l'on n'ait pas $2Am+B=0$, ou $m=-\frac{B}{2A}$. Mais, dans le cas où $B^2-4AC=0$, les racines de l'équation [6] sont $-\frac{B}{2A}$ et $\frac{2A}{B}$; donc *la parabole n'a qu'un axe* dont les cordes conjuguées ont pour coefficient angulaire $\frac{2A}{B}$. La formule $-\frac{Dm+E}{2Am+B}$ se réduit alors à $-\frac{BE+2AD}{B^2+4A^2}$, de sorte que l'équation de l'axe de la parabole est

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{BE+2AD}{B^2+4A^2}.$$

193. Soit $y=m'x+n'$ l'équation du diamètre dont les cordes conjuguées sont comprises dans l'équation $y=mx+n$, on aura entre m et m' la relation

$$-\frac{Bm+2C}{2Am+B}=m',$$

ou, ce qui revient au même,

$$2Amm'+B(m+m')+2C=0 \qquad [7].$$

Si donc on tire un système de cordes parallèles à ce premier diamètre, et que $y=m''x+n''$ soit l'équation du diamètre qui les divisera en deux parties égales, on aura la condition

$$2Am'm''+B(m'+m'')+2C=0.$$

Or, si l'on compare cette équation à la précédente, on en conclura que $m''=m$ *, et qu'ainsi notre second diamètre est

* En effet, si l'on retranche membre à membre les deux équations précédentes, il viendra

$$(m-m'')(2Am'+B)=0,$$

d'où l'on voit que, si m n'est pas égal à m'', il faudra que l'on ait

$$2Am'+B=0;$$

mais l'équation [7] revenant à

$$(2Am'+B)m+Bm'+2C=0,$$

parallèle aux cordes du premier. Donc *les diamètres* représentés par les équations

$$y = m'x + n' \quad \text{et} \quad y = m''x + n'',$$

sont tels que chacun divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. On dit en conséquence que *ce sont deux* DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

Par conséquent l'équation [7] est tout à la fois la relation qui existe entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués et entre les coefficients angulaires d'un diamètre et de ses cordes conjuguées.

Cette dernière conséquence prouve que deux diamètres sont conjugués lorsque leurs coefficients angulaires m et m' satisfont à la relation [7]; car m' et m sont alors les coefficients angulaires respectifs des cordes conjuguées du premier et du second; donc chacun d'eux est parallèle aux cordes conjuguées de l'autre; donc ils sont conjugués.

194. *Quant à la parabole,* il est évident qu'*elle ne peut pas avoir de diamètres conjugués,* puisque tous ses diamètres sont parallèles entre eux (**190**).

195. Si l'on veut *déterminer les diamètres rectilignes de la courbe représentée par l'équation* $\varphi(x, y) = 0$, il n'y aura qu'à chercher les valeurs de m, qui feront acquérir des facteurs rationnels et du premier degré au premier membre de l'équation générale $\psi(x, y) = 0$ de ses lignes diamétrales. Pour cela, on ordonnera le polynôme $\psi(x, y)$ relativement aux puissances décroissantes de celle des deux variables qui y a le plus faible exposant, par rapport à y, par exemple; puis on divisera ce polynôme par $y + px + q$, et on écrira que le reste indépendant de y est nul, quel que soit x, et, en substituant les valeurs tirées des équations ainsi obtenues, au lieu de p et de q dans $y + px + q = 0$, on aura les équations de tous les diamètres rectilignes de la courbe $\varphi(x, y) = 0$.

196. La méthode précédente entraînera dans des calculs très-longs, lorque l'équation proposée sera d'un degré un

---

si l'on avait $2Am' + B = 0$, il en résulterait $Bm' + 2C = 0$, et par conséquent $B^2 - 4AC = 0$; or, puisque tous les diamètres de la parabole sont parallèles, il est impossible qu'il y ait des cordes qui soient parallèles à l'un de ces diamètres (**190**), et ainsi $B^2 - 4AC \gtrless 0$.

peu élevé; aussi vaudra-t-il mieux avoir recours à un autre procédé, fondé sur la transformation des coordonnées, pour résoudre ce problème général :

Trouver les diamètres rectilignes de la courbe représentée par l'équation algébrique entière et rationnelle $\varphi(x, y)=0$, *les coordonnées étant rectangulaires.*

Soient AB un de ces diamètres, O' le point où il coupe l'axe des y, et CD une des cordes qu'il divise en deux parties égales. Menons par le point O' une parallèle à CD, et prenons cette parallèle et AB pour axes des y' et des x'. Si, dans l'équation de la courbe proposée rapportée à ces nouveaux axes, on donne une valeur quelconque à x', on en tirera deux valeurs de y' égales et de signes contraires, de sorte que cette équation ne pourra renfermer que des puissances paires de y'; réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'axe des x' divisera en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe des y', et sera, par conséquent, un diamètre. Supposons donc que l'on désigne par b la distance OO', par α et par α' les angles que les droites AB et CD font avec la partie positive de l'axe des x; on rapportera la courbe proposée aux nouveaux axes O'X' et O'Y' en remplaçant x et y dans $\varphi(x, y)=0$, par leurs valeurs données par les formules Fig. 68.

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',\quad y=b+x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'.$$

L'équation transformée étant une certaine fonction des quantités x', y', α, α' et b, on profitera de l'indétermination des trois dernières, pour faire évanouir tous les termes où y' entrera à des puissances de degré impair, en égalant leurs coefficients à zéro. Si l'on trouve ainsi moins de trois équations de condition, on en conclura que le problème est indéterminé, et que la courbe proposée a une infinité de diamètres rectilignes; s'il y a trois équations de condition, il y aura, en général, de pareils diamètres : mais il n'y en aura point si le nombre de ces équations surpasse trois, à moins que quelques-unes d'entre elles ne rentrent dans les autres. Il suit de là que la probabilité qu'une courbe a des diamètres rectilignes est d'autant moins grande qu'elle est d'un ordre plus élevé. Il en est de même pour le centre (**180**).

Si l'on demandait les axes d'une courbe, il faudrait faire dans les calculs précédents $\alpha'-\alpha=90^\circ$, de sorte que les

équations de condition ne renfermeraient plus que deux indéterminées.

EXEMPLE. Soit $\varphi(x,y)=xy^2+yx^2-a^3=0$ l'équation proposée. On trouvera pour équations de condition

$$2\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha'+\cos\alpha')+\sin^2\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha'\cos^2\alpha=0 \quad [1],$$
$$\sin\alpha'\cos\alpha'(\sin\alpha'+\cos\alpha')=0 \quad [2],$$
$$b[\sin\alpha'\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\cos\alpha']=0 \quad [3],$$
$$b\cos\alpha'=0 \quad [4].$$

On satisfera d'abord aux deux dernières de ces équations en posant $b=0$; on tirera ensuite des équations [1] et [2]

$$\sin\alpha'=0\ldots.2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha=0\ldots.\text{tang}\,\alpha=-2,$$
$$\cos\alpha'=0\ldots.2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=0\ldots.\text{tang}\,\alpha=-\frac{1}{2}.$$
$$\sin\alpha'+\cos\alpha'=0\ldots\ldots.\text{tang}\,\alpha'=-1\ldots.\text{tang}\,\alpha=+1.$$

On vérifie encore l'équation [4], si $b \gtrless 0$, en posant $\cos\alpha'=0$; mais alors l'équation [3] exige que $\cos\alpha$ soit nul aussi, ce qui ne se peut.

Il y a donc trois diamètres rectilignes, qui ont pour équations

$$y=-2x, \quad y=-\frac{x}{2}, \quad y=x,$$

et celles de leurs cordes conjuguées sont de la forme

$$y=k, \qquad x=k, \qquad y=-x+k.$$

Le troisième diamètre est donc un axe (**123**).

CHAPITRE IX.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU DEUXIÈME DEGRÉ A DEUX INDÉTERMINÉES.

§ I. Division des lignes du second ordre en trois genres.

197. L'objet que nous allons nous proposer actuellement est de chercher quelle est la forme des courbes représentées par l'équation générale du second degré

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad [1]$$

et de découvrir les propriétés les plus générales de chacune de ces courbes.

En conséquence, nous allons d'abord appliquer à cette équation la méthode de discussion que nous avons ébauchée précédemment (**51**). Résolvons-la donc par rapport à l'une des deux variables, par rapport à y, par exemple, ce qui donnera

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF},$$

ou $$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q} \quad [2],$$

en posant, pour abréger, comme nous l'avons déjà fait dans la note du n° **171**,

$$B^2-4AC=n, \quad BD-2AE=p, \quad D^2-4AF=q.$$

Or, si l'on compare cette équation à

$$y=-\frac{Bx+D}{2A} \quad [3],$$

on voit que, si l'on avait construit la droite RS représentée par cette équation, on obtiendrait tous les points du lieu cherché, en augmentant et en diminuant l'ordonnée de chacun des points de cette droite de la valeur que prend la quantité $\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$, lorsque l'on y remplace x par l'abscisse Fig. 69.

du point que l'on considère; car on trouvera de cette manière deux points qui auront respectivement pour ordonnées

$$-\frac{Bx+D}{2A}+\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$$

et

$$-\frac{Bx+D}{2A}-\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q},$$

c'est-à-dire les deux valeurs de y déterminées par la formule [2]. On voit ainsi que le lieu de l'équation $y=-\frac{Bx+D}{2A}$ est le *diamètre* qui coupe en deux parties égales toutes les cordes de la courbe qui sont parallèles à l'axe des y, et que la quantité $\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$ dont il faut augmenter et diminuer l'ordonnée de chaque point de ce diamètre est la valeur absolue de l'ordonnée de la courbe, comptée à partir du diamètre. Nous représenterons désormais cette quantité par y_1, et nous poserons en conséquence

$$y_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q} \qquad [4].$$

Cela posé, si l'on écrit cette valeur de y_1 de la manière suivante :

$$y_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{x^2\left(n+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}\right)},$$

on verra que la quantité $\left(\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}\right)$ tendant vers zéro à mesure que x augmente, on pourra assigner à x une valeur assez grande pour que la valeur absolue du binôme $\left(\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}\right)$ soit moindre que celle de n, de sorte qu'il existe des valeurs positives et négatives de x, à partir desquelles la quantité soumise au radical prendra des valeurs qui auront constamment le même signe que n, et qui croîtront au delà de toute limite, lorsque l'on fera augmenter x; car le facteur x^2 tend vers l'infini, tandis que $\left(n+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}\right)$ converge vers n.

Donc, si $n=B^2-4AC<0$, il y a des valeurs de x au delà desquelles y_1 sera toujours imaginaire, soit que l'on prenne x positivement ou qu'on la prenne négativement. La courbe sera donc limitée dans le sens des abscisses, tant positives que

négatives : elle le sera pareillement de part et d'autre de son diamètre, puisque y_1 ne saurait devenir infinie tant que x ne reçoit que des valeurs finies.

Lorsque $n=B^2-4AC$ sera positif, il y aura des valeurs positives et négatives de x, à partir desquelles y_1 sera toujours réelle et croîtra au delà de toute grandeur donnée. Donc alors la courbe représentée par l'équation [1] s'étend indéfiniment à droite et à gauche de l'axe des ordonnées, au-dessus et au-dessous de son diamètre.

Enfin, si $n=B^2-4AC=0$, la quantité soumise au radical dans l'expression de y_1 se réduisant à $(2px+q)$, on voit que si p est positif, y_1 sera toujours réelle pour des valeurs positives de x suffisamment grandes, et croîtra indéfiniment avec x. Mais, si on prend x négativement, y_1 finira par devenir imaginaire. Ce sera le contraire lorsque p sera négatif. Ainsi, dans ces deux cas, la courbe sera illimitée du côté des abscisses positives ou négatives, et limitée dans le sens opposé; mais elle s'étendra indéfiniment de part et d'autre de son diamètre.

198. Les raisonnements qui précèdent sont fondés sur l'hypothèse que A n'est pas égal à zéro : mais A serait nul, que l'on n'aurait cependant pas d'autres genres de courbe. En effet, on aurait pu résoudre l'équation [1] par rapport à x, au lieu de la résoudre par rapport à y; et comme cela serait revenu à permuter dans la formule [2] x et y, A et C, D et E, on voit que, la quantité $B^2-4AC=n$ ne changeant pas par ces permutations, on aurait appliqué ainsi aux axes des x et des y ce que l'on a dit par rapport aux axes des y et des x. Par conséquent, faire $A=0$ revient à supposer $C=0$, dans l'analyse du n° **197**, mais à appliquer à l'axe des ordonnées ce que nous y avons dit de l'axe des abscisses, *et vice versa*. Or, l'hypothèse de $C=0$ n'introduit aucun changement dans ce que nous avons reconnu, sinon que n est alors essentiellement positif, si B n'est pas nul; donc la courbe s'étend indéfiniment dans tous les sens, ou est illimitée dans un sens et limitée dans le sens contraire, selon que B est différent de zéro ou égal à zéro, c'est-à-dire selon que B^2-4AC est plus grand que zéro ou égal à zéro.

199. Si l'on avait à la fois $A=0$ et $C=0$, l'analyse du n° **197** ne serait plus applicable; car l'équation [1] perd

ses termes en x^2 et en y^2 et se réduit au premier degré par rapport à x et à y.

Mais alors, quelque valeur que l'on assigne à l'une des variables, on obtient toujours des valeurs réelles pour l'autre; donc la courbe s'étend indéfiniment de part et d'autre de chacun des deux axes, et c'est précisément la propriété dont jouissent les courbes dont le caractère analytique est n ou $B^2-4AC>0$, caractère auquel satisfait la double hypothèse $A=0$ et $C=0$ (B n'est pas nul alors, sans quoi l'équation [1] se réduirait au premier degré).

200. Il résulte de ce qui précède que les courbes du second ordre se partagent en trois genres distingués par l'étendue et la direction de leurs branches, savoir :

Courbes limitées dans tous les sens, et dont un des caractères * est $B^2-4AC<0$; on les appelle *ellipses;*

Courbes indéfinies dans tous les sens, et dont un des caractères est $B^2-4AC>0$; on les nomme *hyperboles;*

Courbes indéfinies dans un sens et limitées dans le sens opposé, et dont un des caractères est $B^2-4AC=0$. On leur a donné le nom de *paraboles.*

Nous allons maintenant discuter l'équation générale dans chacun des trois cas que nous venons d'établir, afin de reconnaître exactement la forme des trois genres de courbes qu'elle représente.

§ II. Construction des ellipses. $B^2-4AC<0$.

Fig. 69. **201**. En résolvant l'équation [1], nous avons trouvé

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q} \qquad [2],$$

et nous avons vu (**197**) que l'équation

$$y=-\frac{Bx+D}{2A} \qquad [3],$$

représente une droite qui divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe des y, et que l'équation

$$y_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q} \qquad [4],$$

* Nous disons : *un des caractères,* parce que l'équation [1] peut très-bien ne pas représenter *une courbe.*

détermine les ordonnées des différents points de la courbe comptées à partir de ce diamètre. On commencera donc, *dans tous les cas*, par construire ce diamètre, et il ne s'agira plus que de suivre la marche des valeurs de y_1, lorsque x croîtra d'une manière continue depuis 0 jusqu'à $+\infty$ et depuis 0 jusqu'à $-\infty$, pour savoir comment la courbe s'étend de part et d'autre de son diamètre.

Soit donc RS le lieu de l'équation [3]; afin de déterminer immédiatement les limites de notre courbe dans le sens de l'axe des abscisses, nous commencerons par chercher les points où elle coupe le diamètre RS, et, pour cela, nous poserons l'équation

$$nx^2+2px+q=0 \qquad [5];$$

car il est évident qu'en ces points l'ordonnée y_1 doit être nulle. Ici trois cas peuvent se présenter, suivant que les racines de cette équation seront réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires.

1[er] Cas. Supposons que les racines de l'équation [5] soient réelles et inégales, et désignons-les par x' et par x''. Nous prendrons sur l'axe des abscisses des distances $OA=x'$ et $OB=x''$, nous mènerons par les points A et B des parallèles à l'axe des y, et les points C et D où elles couperont le diamètre RS seront ceux même où cette droite est rencontrée par la courbe.

Cela fait, nous décomposerons le trinôme $nx^2+2px+q$ en facteurs, ce qui donnera

$$n(x-x')(x-x'')=-n(x-x')(x''-x), \text{ et partant}$$

$$y_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{-n(x-x')(x''-x)},$$

en supposant, pour fixer les idées, que la valeur *relative* de x' soit moindre que celle de x'' (*Algèbre*, **26**)*. On voit ainsi que y_1 sera réelle tant que l'on donnera à x des valeurs comprises entre x' et x'', puisque les facteurs $(x-x')$ et $(x''-x)$ sont alors positifs ainsi que $-n$. Donc la courbe

* Si, par exemple, la quantité soumise au radical était $-4x^2+8x-1$, on la mettra sous la forme

$$-4\left[x-\left(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right]$$
$$=4\left[x-\left(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right]\left[\left(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)-x\right].$$

sera continue depuis le point C jusqu'au point D, tant au-dessus qu'au-dessous de son diamètre. Mais, comme la somme des deux facteurs $(x-x')$ et $(x''-x)$ est la quantité constante $x''-x'$, ce produit est susceptible d'un *maximum* qu'il atteindra quand on aura (*Algèbre*, **241**)

$$x-x'=x''-x, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{x'+x''}{2},$$

et ce *maximum* sera $\left(\frac{x''-x'}{2}\right)^2$, de sorte que pour

$$x=\frac{x'+x''}{2}, \quad y_1=\frac{x''-x'}{4A}\sqrt{-n}.$$

On prendra donc le milieu E de AB; car l'abscisse du milieu d'une droite est la demi-somme des abscisses de ses extrémités; on tirera par le point E la parallèle EF à l'axe des y, et en prenant sur cette droite les deux distances FG et FH égales à $\frac{x''-x'}{4A}\sqrt{-n}$, on aura les deux points G et H de l'ellipse, qui sont les plus éloignés du diamètre RS.

Le point F milieu de CD est le *centre* de l'ellipse (**189**, 3° et **177**), et la droite FGH menée par ce centre parallèlement aux cordes que CD divise en deux parties égales est le *conjugué* de ce diamètre (**193**).

Maintenant, si l'on donne à x des valeurs moindres que x', ou plus grandes que x'' (on a toujours égard aux signes), l'un des facteurs $(x-x')$ et $(x''-x)$ sera négatif, tandis que l'autre sera positif; de sorte que la quantité $-n(x-x')(x''-x)$ résultant alors de la multiplication du produit de deux facteurs positifs par un facteur négatif sera négative; donc y_1 sera imaginaire; donc l'ellipse est limitée dans le sens de l'axe des abscisses par les droites AC et BD.

Il ne s'agit donc plus, pour avoir une idée exacte de sa forme, que d'examiner si elle est sinueuse, ou bien si elle est concave ou convexe vers son diamètre.

L'ellipse étant une courbe du second ordre ne peut pas être coupée par une ligne droite en plus de deux points; donc elle n'est ni sinueuse, ni partout convexe vers son diamètre; donc elle lui présente constamment sa concavité; d'ailleurs les droites AC et BD sont des tangentes, ainsi que les parallèles menées par les points G et H au diamètre RS (**189**, 2°). L'ellipse a ainsi la forme représentée dans la figure 69, et se

trouve inscrite dans un parallélogramme dont chaque côté est divisé en deux parties égales par le point de contact.

202. 2ᵉ Cas. Si les racines x' et x'' de l'équation [5] sont égales, son premier membre revient à $n(x-x')^2$ de sorte que la formule [2] se réduit à

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{x-x'}{2A}\sqrt{n},$$

et comme n est supposé négatif, on voit que y ne sera réelle que si l'on fait $x=x'$, de sorte que l'équation [1] ne peut être vérifiée que par le seul couple $x=x'$, $y=-\frac{Bx'+D}{2A}$, et que par conséquent le lieu de cette équation est le *point* dont ce sont là les coordonnées.

203. 3ᵉ Cas. Supposons que les racines de l'équation [5] soient imaginaires, le premier membre de cette équation restera négatif, quelque valeur que l'on attribue à x, et par conséquent la formule [2] donnera constamment des valeurs imaginaires pour y. Donc l'équation [1] ne pourra être vérifiée par aucun couple de valeurs de x et de y, et ainsi elle ne représente rien.

204. Il résulte de cette discussion que, dans l'hypothèse où $n=B^2-4AC<0$, l'équation [1] ne représentera une ellipse que si les racines de l'équation [5] sont réelles et inégales, ce qui exige que l'on ait $p^2-nq>0$. En développant cette condition, on trouvera que

LES CARACTÈRES DE L'ELLIPSE SONT

$$B^2-4AC<0, \quad \text{et} \quad AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)>0\,^*.$$

Comme le second et le troisième cas correspondent à l'hypothèse $B^2-4AC<0$, qui est un des caractères de l'ellipse, on a coutume de dire que le POINT ET LA COURBE IMAGINAIRE *sont des* VARIÉTÉS *de l'ellipse.*

---

* On peut former très-simplement le premier membre de cette inégalité d'après la règle suivante : *remplacez dans le premier membre de l'équation* [1] x *et* y *respectivement par* $\pm$D *et par* $\mp$E *et* F *par* F(B²—4AC).

§ III. Construction des hyperboles $B^2-4AC>0$.

208. En raisonnant comme au n° **197**, on sera conduit à construire d'abord le diamètre que représente l'équation [3], puis à chercher les abscisses des points où il rencontre la courbe, en résolvant l'équation

$$nx^2+2px+q=0 \qquad [5],$$

ce qui donnera lieu à distinguer aussi trois cas, suivant que les racines de cette équation seront réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires.

1er Cas. Soient toujours x' et x'' les deux racines réelles
Fig. 70. de l'équation [5], et C et D les points du diamètre RS correspondant à ces abscisses. Ce sont donc les points où ce diamètre rencontre la courbe (**201**).

Cela fait, nous décomposerons le trinôme $nx^2+2px+q$ en facteurs, et nous trouverons ainsi

$$y_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{n(x-x')(x-x'')}.$$

Or, on voit par cette formule que y_1 sera imaginaire pour toute valeur de x comprise entre x' et x''; que cette ordonnée sera nulle pour $x=x'$ et pour $x=x''$, mais que si l'on fait croître x depuis x'' jusqu'à $+\infty$ et décroître x depuis x' jusqu'à $-\infty$ (on suppose $x'<x''$), y_1 croîtra depuis zéro jusqu'à l'infini; d'où il suit que la courbe n'a aucun point situé entre les deux parallèles AC et BD; que de chacun des points C et D partent deux branches qui s'étendent au-dessus et au-dessous du diamètre RS, en s'éloignant indéfiniment de ce diamètre et de ces deux parallèles; d'ailleurs elles présentent leur concavité à RS, comme on l'a vu pour l'ellipse (**201**), et touchent AC et BD aux points C et D (**189**, 2°). La courbe a donc la forme représentée dans la figure 70.

Remarquons que le point F milieu de CD est le *centre* de l'hyperbole (**189**, 3°), et que la parallèle EF, menée par ce point à l'axe des y est la direction du *diamètre conjugué* de CD* (**193**).

---

* On peut conclure de là et du n° **201**, que *l'ellipse et l'hyperbole ont une infinité de systèmes de diamètres conjugués :* car, si l'on change

Enfin, pour mieux déterminer la direction des branches de la courbe, on construira ses asymptotes. On pourrait, pour cela, faire usage des formules du n° **171**, mais il sera plus simple de les déduire de l'équation [4] qui représente la courbe tout aussi bien que [1]. En élevant les deux membres de cette équation au carré et en transposant, on trouvera

$$4A^2y_1^2-nx^2-2px-q=0,$$

qui revient à

$$x^2\left(4A^2\frac{y_1^2}{x^2}-n\right)-2px-q=0.$$

On aura donc

$$F(c)=4A^2c^2-n=0,\quad \text{d'où}\quad c=\pm\frac{\sqrt{n}}{2A},$$
$$F'(c)=8A^2c=\pm 4A\sqrt{n},$$
$$F_1(c)=-2p,$$

et partant $$y_1=\pm\frac{\sqrt{n}}{2A}\left(x+\frac{p}{n}\right),$$

pour les équations des asymptotes *. Mais il ne faudra pas oublier que les ordonnées doivent être comptées à partir du diamètre RS. Cette formule montre que *les asymptotes se croisent au centre de l'hyperbole;* car elles coupent le diamètre RS au point dont l'abscisse est $-\frac{p}{n}=\frac{x'+x''}{2}$, c'est-à-dire au point F. On prendra donc sur l'axe des y, à partir de N, deux distances NP et NQ égales à $\frac{p}{2A\sqrt{n}}$, et en tirant PF et QF, on aura les asymptotes.

206. 2° Cas. Si $x'=x''$, la formule [2] se réduit à

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{x-x'}{2A}\sqrt{n}.$$

Cette équation représente deux lignes droites qui se croisent

---

d'axes des coordonnées, l'équation [1] conservera la même forme, et on pourra répéter sur la transformée tous les raisonnements que l'on a faits sur la proposée.

* Il est facile de retenir cette formule; car le second membre est le résultat du calcul indiqué dans le second membre de l'équation [4], en se bornant aux deux premiers termes.

sur le diamètre RS, au point dont l'abscisse est $x=x'=-\frac{p}{n}$, et coupent l'axe des y en deux points distants de N de la quantité $\frac{x'\sqrt{n}}{2A}=\frac{p}{2A\sqrt{n}}$; et, en effet, si on suppose que les coefficients de l'équation [1] prennent des valeurs telles que la différence $(x''-x')$ des abscisses des points C et D devienne de plus en plus petite, il est clair que cette courbe tendra à se confondre avec ses asymptotes, et que cela aura lieu à la limite, c'est-à-dire lorsque q sera égal à $\frac{p^2}{n}$. On dit en conséquence que *l'hyperbole a pour variété le système de deux droites concourantes.*

207. 3e Cas. Si les racines de l'équation $nx^2+2px+q=0$
Fig. 71. sont imaginaires, la courbe ne rencontre pas son diamètre RS. Le trinôme $nx^2+2px+q$ étant alors la somme de deux quantités positives, nous mettrons ces quantités en évidence, ce qui se fera en complétant le carré dont x^2 et $+2\frac{p}{n}x$ sont les deux premiers termes (*Algèbre*, **206**), et l'équation [4] prendra la forme

$$y_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{n\left[\left(x+\frac{p}{n}\right)^2+\left(\frac{nq-p^2}{n^2}\right)\right]}.$$

On voit de cette manière que la valeur de y_1 sera *minimum* quand on aura $x+\frac{p}{n}=0$, d'où $x=-\frac{p}{n}$; et partant $y_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{q-\frac{p^2}{n}}$; on prendra donc une abscisse $OE=-\frac{p}{n}$; on tirera par le point E une parallèle indéfinie à l'axe des y, et prenant $FG=FH=\frac{1}{2A}\sqrt{q-\frac{p^2}{n}}$, on aura les deux points G et H qui sont les plus près du diamètre RS; donc la courbe n'a aucun point situé entre les parallèles menées à RS par ces deux points; x croissant depuis $-\frac{p}{n}$ jusqu'à $+\infty$, et décroissant depuis $-\frac{p}{n}$ jusqu'à $-\infty$, la valeur absolue de y_1 augmentera depuis $\frac{1}{2A}\sqrt{q-\frac{p^2}{n}}$ jusqu'à l'infini; ainsi de chacun des points G et H partent deux branches qui s'éloignent indéfiniment du diamètre RS et de la droite GH. Elles présen-

tent d'ailleurs leur convexité à RS, puisqu'une ligne droite ne peut couper la courbe en plus de deux points. Les parallèles menées par G et par H au diamètre RS sont donc des tangentes en ces points.

Si, pour obtenir l'équation du diamètre conjugué de RS, on fait $m=-\frac{B}{2A}$ dans l'équation [5] du n° **188**, on trouvera

$$x=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}=-\frac{p}{n},$$

de sorte que la direction de ce diamètre est celle même de la corde *minimum* GH. Le point F est donc le centre de l'hyperbole. Enfin on pourra construire les asymptotes, ainsi que nous l'avons fait au n° **205**.

208. On voit donc qu'il ne suffit pas que B^2-4AC soit positif pour que l'équation [1] représente une hyperbole, il faut encore que les racines de l'équation [5] ne soient pas égales, c'est-à-dire que (p^2-nq) ne soit pas nul; donc

LES CARACTÈRES DE L'HYPERBOLE SONT

$$B^2-4AC>0 \text{ et } AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)\gtrless 0.$$

209. Le cas où le coefficient du carré de l'une des variables est nul ne saurait donner lieu à aucune difficulté, d'après ce que nous avons dit plus haut (**198**) : toutefois nous allons examiner l'hypothèse de $A=0$, parce qu'on peut discuter l'équation

$$Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

en la résolvant à la manière de celles du premier degré.

On en tire

$$y=-\frac{Cx^2+Ex+F}{Bx+D} \qquad [6],$$

ou

$$y=ax+b+\frac{r}{Bx+D},$$

en effectuant la division du numérateur par le dénominateur et en posant, pour abréger,

$$-\frac{C}{B}=a,\quad \frac{CD-BE}{B^2}=b,\quad \frac{BDE-CD^2-FB^2}{B^2}=r.$$

r n'est pas nul; car le numérateur de la fraction qu'il re-

présente est, au signe près, la quantité à laquelle se réduit $AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)$ lorsque $A=0$. Nous admettrons, pour fixer les idées, que a, b, r, B et D soient des quantités positives. Cela posé, j'observe que si l'on avait construit la droite

$$y=ax+b,$$

il suffirait, pour obtenir tous les points de la courbe, d'ajouter à l'ordonnée de chaque point de cette droite une quantité déterminée par la valeur que prend la fraction $\frac{r}{Bx+D}$, lorsque l'on y remplace x par l'abscisse du point que l'on considère. Je construis donc la droite représentée par l'équation

Fig. 72. $y=ax+b$, et je suppose que UV soit cette droite. J'appelle y_1 l'ordonnée de chaque point de la courbe comptée à partir de la droite UV, et la discussion de l'équation proposée se trouve ramenée à celle de l'équation plus simple

$$y_1=\frac{r}{Bx+D}.$$

En conséquence, je fais croître x depuis zéro jusqu'à $+\infty$ et depuis zéro jusqu'à $-\infty$, et je forme ainsi le tableau suivant :

$x=0$ donne. . . . . $y_1=\frac{r}{D}$;
x aug^{te} . . . . y_1 diminue;
$x=\infty$. . . . . $y_1=0$;
$x<0$ . . . . $y_1=\frac{r}{D-Bx}$;
$x=0$ . . . . $y_1=\frac{r}{D}$;
x aug$^{te}<\frac{D}{B}$. . . . . . y_1 aug^{te};
$x=\frac{D}{B}$ . . . . $y_1=\infty$;
x aug^{te} . . . . y_1 diminue négativement.
$x=\infty$. . . . . $y_1=0$.

On voit par là que la courbe coupe l'axe des y en un point que l'on trouve, en prenant sur cet axe, et à partir de A, une distance AB égale à $\frac{r}{D}$; que de ce point B part une branche

de courbe qui s'approche indéfiniment de la droite AV, lorsque x croît au delà de toute grandeur donnée, de sorte que AV est une asymptote de cette branche; que cette même branche s'étend à gauche du point B en s'éloignant de UV et en s'approchant de plus en plus de la droite ST, qui a pour équation $x=-\frac{D}{B}$, lorsque x tend vers $-\frac{D}{B}$. Donc CS est une seconde asymptote de la courbe.

x croissant négativement depuis $\frac{D}{B}$ jusqu'à l'infini, y_1 diminue négativement depuis l'infini jusqu'à zéro; ainsi il y a une seconde branche qui est située tout entière dans l'angle UDT et qui s'approche indéfiniment de CT et de DU, en s'éloignant respectivement de AU et de CT, au delà de toute limite assignable. Elle a donc pour asymptotes les droites AU et CT.

On voit par là que la courbe se compose encore de deux branches indéfinies, et entièrement séparées l'une de l'autre, qui s'opposent leur convexité et ont pour asymptotes les droites UV et ST. Donc, quand le carré de y manque dans l'équation [1], l'une des asymptotes est parallèle à l'axe des y (172).

Si $D=0$, l'équation $x=-\frac{D}{B}$ de l'asymptote ST se réduit à $x=0$. Donc, quand le carré et la première puissance de y ne se trouvent pas dans l'équation du second degré, l'axe des y est une asymptote (172).

Si $C=0$, l'équation $y=ax+b$ de l'asymptote UV se réduit à $y=b$, et à $y=0$ si on a de plus $E=0$. Ainsi, quand les carrés des variables n'entrent pas dans l'équation du second degré, les axes des coordonnées sont parallèles aux asymptotes, et sont eux-mêmes les asymptotes si l'équation ne renferme que le rectangle des variables et un terme constant (173).

210. Si $r=0$, tant que x sera différent de $-\frac{D}{B}$, la valeur de y_1 sera nulle; donc une portion de l'hyperbole coïncide avec UV; mais, lorsque l'on fera $x=-\frac{D}{B}$, la valeur de y_1 se réduira à $\frac{0}{0}$, et l'équation $y_1=\frac{r}{Bx+D}$ étant vérifiée,

quelque valeur que l'on donne à y_1, on voit que l'autre partie de la courbe coïncide avec ST, de sorte que l'hyperbole se réduit alors au système des deux droites UV et ST; mais aussi l'équation $r=0$ exige que $AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)=0$, puisque $A=0$: c'est le cas du n° **206**. D'ailleurs l'équation [6] revient alors à $y=\frac{(ax+b)(Bx+D)}{Bx+D}$, ou $(Bx+D)(y-ax-b)=0$, qui représente les deux droites UV et ST.

§ IV. Construction des paraboles. $B^2-4AC=0$ *.

211. On commencera toujours par construire le diamètre RS dont l'équation est $y=-\frac{Bx+D}{2A}$, puis on cherchera le point où la courbe rencontre ce diamètre en résolvant l'équation

Fig. 73.

$$2px+q=0;$$

car la formule [4] se réduit ici à

$$y_1=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2px+q}=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2p\left(x+\frac{q}{2p}\right)}.$$

On tire de cette équation $x=-\frac{q}{2p}$: on prendra donc $OA=-\frac{q}{2p}$, on tirera par le point A une parallèle à l'axe des y, et on obtiendra ainsi le point B où la courbe coupe son diamètre. Cela posé, il est clair que si p est positif, lorsque x croîtra depuis $-\frac{q}{2p}$ jusqu'à l'infini, y_1 croîtra indéfiniment depuis zéro jusqu'à l'infini, et que pour toute valeur de x moindre que $-\frac{q}{2p}$, y_1 sera imaginaire. Donc, à partir du point B, la courbe s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous de son diamètre du côté des abscisses positives, mais elle est limitée du côté opposé par la parallèle AB qui lui est tangente en B (**189**, 2°).

Si p est négatif, la parabole s'étendra indéfiniment du côté des abscisses négatives et sera limitée dans le sens contraire.

* Il est bon de remarquer que *cette condition* $B^2-4AC=0$ *revient à dire que, dans l'équation du second degré, les trois termes du deuxième degré forment un carré parfait.*

212. Si $p=0$, l'équation [2] se réduit à

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{q},$$

et son lieu est ainsi le système de deux parallèles réelles ou imaginaires, suivant que q est >0 ou <0; ou est une seule droite, si $q=0$. On dit en conséquence que *la parabole admet pour variétés le système de deux parallèles réelles ou imaginaires, ou encore une ligne droite.*

213. Les caractères de la parabole sont donc

$$B^2-4AC=0, \quad AE^2-BDE+CD^2 \gtrless 0;$$

car cette dernière condition exprime que p est différent de zéro, puisqu'elle provient de

$$p^2-nq=AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)\gtrless 0.$$

214. Supposons que l'on ait $A=0$ et $B=0$, mais que ni C ni D ne soient nuls, auquel cas les conditions qui forment le caractère analytique de la parabole seront remplies. Si l'on résout l'équation

$$Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

par rapport à y, on trouvera

$$y=ax^2+bx+c,$$

en représentant par a, b, c les rapports $-\frac{C}{D}$, $-\frac{E}{D}$, $-\frac{F}{D}$.

Il peut se présenter trois cas, suivant que $b^2-4ac>0$, $=0$ ou <0 : nous supposerons d'ailleurs $a>0$; car, si a était négatif, il n'y aurait qu'à changer les signes du second membre, et à porter les valeurs positives de y dans le sens des ordonnées négatives, *et vice versa.*

1er Cas. $b^2-4ac>0$. Les racines de l'équation Fig. 74.

$$ax^2+bx+c=0$$

sont réelles et inégales, et en les représentant par x' et par x'', il viendra

$$y=a(x-x')(x-x'').$$

On voit par là que la valeur relative de x' étant supposée plus petite que celle de x'', lorsque l'on fera croître x depuis x'' jusqu'à l'infini, ou que l'on fera diminuer cette variable depuis x' jusqu'à $-\infty$, y croîtra depuis zéro jusqu'à l'infini

positif; car les facteurs $(x-x')$ et $(x-x'')$ seront constamment de mêmes signes. Si donc on prend sur l'axe des abscisses des distances $OA=x'$ et $OB=x''$, on aura les points où la parabole coupe l'axe des x, et de ces points A et B partiront deux branches de courbe qui s'étendront indéfiniment, l'une du côté des abscisses négatives, l'autre du côté des abscisses positives, en s'élevant indéfiniment au-dessus de l'axe des x.

Pour toute valeur de x comprise entre x' et x'', y sera constamment négative; car le facteur $(x-x'')$ sera négatif et $(x-x')$ sera positif; ainsi les deux branches AU et BV se prolongeront au-dessous de l'axe des x, et s'y réuniront pour ne former qu'une seule courbe. Si on met la valeur de y sous la forme suivante

$$y=-a(x''-x)(x-x'),$$

on verra que la somme des facteurs $(x''-x)$ et $(x-x')$ étant la quantité constante $(x''-x')$, leur produit est susceptible d'un *maximum* qu'il atteindra quand on aura

$$x-x'=x''-x, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{x'+x''}{2}.$$

Ce *maximum* sera $\left(\frac{x''-x'}{2}\right)^2$, de sorte que pour $x=\frac{x'+x''}{2}$, on aura $y=-a\left(\frac{x''-x'}{2}\right)^2$. On prendra donc le milieu C de AB, on mènera par ce point une parallèle CD à l'axe des y, et en prenant $CD=a\left(\frac{x''-x'}{2}\right)^2$, on aura le point de la parabole qui est le plus éloigné de l'axe des x du côté des ordonnées négatives. Comme d'ailleurs la courbe est concave vers l'axe des x, dans l'intervalle compris entre les points A et B, on voit que la parallèle menée par le point D à cet axe lui est tangente.

Si l'on résout l'équation $y=ax^2+bx+c$ par rapport à x, on reconnaîtra que la droite CD, qui a pour équation $x=-\frac{b}{2a}=\frac{x'+x''}{2}$, est un diamètre dont les cordes conjuguées sont parallèles à l'axe des x.

2ᵉ Cas. Si $b^2-4ac=0$, $x'=x''$, et il n'y a de différence entre ce cas et le précédent qu'en ce que la courbe est tangente à l'axe des x au point dont l'abscisse est $-\frac{b}{2a}$.

3ᵉ CAS. $b^2-4ac<0$. On mettra l'équation $y=ax^2+bx+c$ sous la forme suivante :

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

et on verra immédiatement que la courbe est située tout entière au-dessus de l'axe des x; qu'elle s'étend indéfiniment à droite et à gauche de l'axe des y en présentant sa convexité à l'axe des x, et que celui de ses points qui en est le plus près a pour coordonnées $x=-\frac{b}{2a}$, $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

215. Lorsqu'on voudra discuter une équation du second degré, dans laquelle les coefficients seront des nombres donnés, il faudra appliquer directement la méthode que nous avons développée dans ce qui précède, sans qu'il soit besoin de s'astreindre à former, pour le cas particulier que l'on a à considérer, les conditions qui sont le caractère analytique de l'ellipse, de l'hyperbole ou de la parabole; seulement il faudra observer le signe du coefficient de x^2, dans la quantité soumise au radical, lorsque l'on aura résolu l'équation proposée par rapport à y (on suppose que cette équation renferme les carrés des deux variables; sans quoi on la traiterait d'après les méthodes exposées aux nᵒˢ **209** et **214**), ce qui apprendra que le lieu cherché *peut être* une ellipse, une hyperbole ou une parabole. La nature des racines de l'équation formée en égalant à zéro la quantité soumise au radical lèvera tous les doutes; car, si ces racines sont égales, ce lieu est ce que nous avons appelé une variété des courbes du second ordre (nᵒˢ **204**, **206** et **212**). L'équation proposée ne représentera rien, si les racines dont il s'agit sont imaginaires, et si, de plus, le coefficient de x^2 sous le radical est négatif.

216. Nous proposerons pour exercices les exemples suivants :

$y^2-2xy+3x^2-2y-6x+7=0$.	ellipse (fig. 75).
$y^2-4xy+5x^2-2y+2x+2=0$.	point (1, 3) (fig. 76).
$y^2-4xy+5x^2-2y+10x+13=0$.	ellipse imaginaire.
$4y^2-4xy-7x^2-8y+20x+28=0$.	hyperbole (fig. 77).
$4y^2-8xy+2x^2-4y+8x-3=0$.	hyperbole (fig. 78).
$4y^2-x^2+2x-1=0$.	deux droites converg^tes (fig. 79).
$4y^2-4xy+x^2-4y+x+2=0$.	parabole (fig. 80).
$9y^2-12xy+4x^2+9y-6x=0$.	deux parallèles (fig. 81).
$4y^2-4xy+x^2+4y-2x+1=0$. . . .	une droite (fig. 82).
$4y^2-4xy+x^2+2y-2x+2=0$. . . .	deux parallèles imaginaires.

217. *Quelles sont les relations qui doivent exister entre les coefficients de l'équation* [1], 1° *pour qu'elle ne représente rien?*

On exprimera que la quantité $nx^2+2px+q$ est négative indépendamment de toute valeur particulière donnée à x, ce qui exige qu'on ait :

$$p^2-nq<0 \quad \text{et} \quad n<0;$$

ou

$$n=0, \quad p=0, \quad q<0.$$

2° *Pour qu'elle représente un point?*

La quantité $nx^2+2px+q$ ne devra être anéantie que par une seule valeur de x, et rester négative pour toute autre valeur de cette variable; par suite

$$p^2-nq=0 \quad \text{et} \quad n<0.$$

3° *Pour qu'elle représente deux droites?*

Les deux valeurs de y données par la formule [2] devront être rationnelles et réelles, quelque valeur que l'on assigne à x. On trouvera, d'après cela, qu'on aura deux droites qui concourent, si

$$p^2-nq=0 \quad \text{et} \quad n>0;$$

deux parallèles, si

$$p=0, \quad n=0, \quad q>0;$$

une seule droite, si

$$p=0, \quad n=0, \quad q=0.$$

CHAPITRE X.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DES COURBES DU SECOND ORDRE A LA FORME LA PLUS SIMPLE POSSIBLE.

218. La discussion à laquelle nous venons de nous livrer ne nous a fait connaître que la forme générale des trois courbes du second ordre, de sorte qu'il faut encore étudier spécialement les propriétés dont jouit chacune d'elles. Mais on conçoit que cette étude sera d'autant plus facile que l'équation de la courbe que nous aurons à considérer sera plus simple. Nous allons donc tâcher de faire évanouir de l'équation générale du second degré les termes qui ne tiennent pas essentiellement à la nature de la courbe qu'elle représente.

D'abord, s'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole, on pourra la rapporter à un système de diamètres conjugués, et comme chacun d'eux divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'autre, il faudra que l'équation de la courbe ne renferme aucun terme où l'une des variables x et y entrerait au premier degré, puisqu'à une même valeur de l'une d'elles devront correspondre deux valeurs de l'autre égales et de signes contraires. Ainsi, *l'équation de cette ellipse ou de cette hyperbole ne renfermera plus que les carrés des variables et un terme constant,* c'est-à-dire qu'elle sera de la forme

$$A'y^2+C'x^2+F'=0.$$

Réciproquement, *s'il en est ainsi, la courbe sera rapportée à un système de diamètres conjugués;* car, pour chaque valeur donnée à x ou à y, on trouvera pour l'autre variable deux valeurs égales et de signes contraires, de sorte que chacun des axes des coordonnées partagera en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'autre.

S'il s'agit d'une parabole, et qu'on prenne pour axe des abscisses son diamètre, et pour axe des ordonnées la parallèle menée à ses cordes conjuguées par le point où il rencontre cette courbe, l'équation qui représentera la parabole ne devra

plus contenir aucun des termes où y entre à la première puissance; ni le carré de x, puisque les termes du second degré doivent former un carré parfait; ni le terme indépendant, puisque l'origine étant sur la courbe, l'équation doit être vérifiée par $x=0$ et $y=0$; cette équation sera donc de la forme

$$A'y^2+E'x=0, \quad \text{ou} \quad y^2=2px.$$

Nous allons donc tâcher de ramener l'équation

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad [1]$$

à la forme

$$A'y^2+C'x^2+F'=0, \quad \text{si} \quad B^2-4AC \gtrless 0,$$

ou à la forme

$$A'y^2+E'x=0, \quad \text{si} \quad B^2-4AC=0.$$

219. Puisque l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués ne doit renfermer que les carrés des variables et un terme constant, on voit que l'origine est le centre; car tous les termes de l'équation sont de même parité. Si donc nous transportons l'origine des coordonnées au centre de la courbe, nous ferons disparaître de son équation les premières puissances de x et de y. Soient a et b l'abscisse et l'ordonnée de ce point, l'équation [1] deviendra (**182**)

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\left.\begin{array}{r}+2Ab\\+Ba\\+D\end{array}\right|y+\left.\begin{array}{r}+Bb\\+2Ca\\+E\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{l}+Ab^2\\+Bab\\+Ca^2\\+Db\\+Ea\\+F\end{array}\right\}=0 \quad [2],$$

et pour exprimer que le point (a, b) est le centre de la courbe, on égalera à zéro les coefficients des premières puissances de x et de y, ce qui donnera les deux équations de condition

$$\left.\begin{array}{r}2Ab+Ba+D=0\\Bb+2Ca+E=0\end{array}\right\} \quad [3],$$

desquelles on tirera

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}, \quad b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}.$$

En substituant ces valeurs dans la transformée, elle se réduira à

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F'=0 \qquad [4].$$

Cette quantité F' se calcule assez simplement de la manière suivante : du double du terme indépendant des variables dans l'équation [2] retranchez la somme des produits des premiers membres des équations [3] multipliés respectivement par b et par a, et vous aurez

$$Db+Ea+2F,$$

d'où, en remplaçant a et b par leurs valeurs,

$$F'=\frac{AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)}{B^2-4AC} \qquad [5].$$

Il s'agit maintenant de faire évanouir de l'équation [4] le rectangle des variables. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que les axes auxquels la courbe est rapportée sont rectangulaires, et cette hypothèse n'altérera en rien la généralité des résultats ; car, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait substituer dans l'équation [4] les valeurs de x et de y données par les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires (**100**), et il est évident, d'après la composition de ces formules, que la nouvelle équation aurait encore la même forme que l'équation [4].

Comme les diamètres conjugués dont nous avons reconnu l'existence étaient obliques (**193** et note de **205**), nous emploierons les formules

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\sin\alpha',$$

qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, en conservant l'origine. La substitution de ces valeurs de x et de y dans l'équation [4] donnera

$$\left.\begin{array}{r}A\sin^2\alpha'\\+B\sin\alpha'\cos\alpha'\\+C\cos^2\alpha'\end{array}\right|y'^2+\left.\begin{array}{l}A\sin^2\alpha\\+B\sin\alpha\cos\alpha\\+C\cos^2\alpha\end{array}\right|x'^2+\left.\begin{array}{l}2A\sin\alpha\sin\alpha'\\+B\sin\alpha\cos\alpha'\\+B\sin\alpha'\cos\alpha\\2C\cos\alpha\cos\alpha'\end{array}\right|x'y'+F'=0 \qquad [6].$$

Ainsi, nous ferons évanouir le rectangle des variables, en cherchant pour α et pour α' des valeurs qui vérifient l'équation

$$2A\sin\alpha\sin\alpha'+B(\sin\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha'\cos\alpha)+2C\cos\alpha\cos\alpha'=0 \quad [7],$$

formée en égalant son coefficient à zéro. Cette équation renfermant quatre lignes trigonométriques, nous diviserons tous ses termes par $\cos\alpha \cos\alpha'$, et l'équation résultante

$$2A \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'+B(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha')+2C=0 \quad [8]$$

n'en contiendra plus que deux, $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\alpha'$. Comme elle est du premier degré par rapport à chacune de ces deux inconnues, et qu'une tangente peut prendre toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, on voit que, quelque valeur réelle que l'on donne à l'un des angles indéterminés α et α', on tirera toujours de l'équation [8] une valeur réelle pour l'autre. Mais ces valeurs de α et de α' déterminent les directions des deux diamètres conjugués, puisqu'elles réduisent l'équation [6] à la forme

$$A'y^2+C'x^2+F'=0;$$

donc on peut établir ce théorème remarquable :

L'ellipse et l'hyperbole ont une infinité de systèmes de diamètres conjugués, et toute droite menée par le centre de l'une de ces courbes, sauf les asymptotes de l'hyperbole, fait partie d'un pareil système, et est par conséquent un diamètre.

220. Les asymptotes de l'hyperbole font exception à ce théorème, puisque, d'après leur position à l'égard de la courbe, ni l'une ni l'autre ne sauraient couper en deux parties égales un système de cordes parallèles. Cela d'ailleurs résulte de l'analyse précédente; car, si l'on assignait à l'une des quantités $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\alpha'$ une valeur telle que l'équation [8] déterminât la même valeur pour l'autre, les valeurs correspondantes des angles α et α', étant égales ou différant de 180°, devraient être rejetées, puisque alors les directions des nouveaux axes des coordonnées coïncideraient, ce qui ne se peut. Pour reconnaître cette valeur exceptionnelle, il n'y a qu'à faire $\operatorname{tang}\alpha'=\operatorname{tang}\alpha$ dans [8], ce qui donnera

$$A \operatorname{tang}^2\alpha+B \operatorname{tang}\alpha+C=0.$$

Ainsi l'on ne pourra pas prendre pour l'un des nouveaux axes la droite qui ferait avec l'ancien axe des x un angle dont la tangente serait une racine de cette équation, c'est-à-dire l'une ou l'autre des asymptotes; car l'équation ci-dessus est précisément celle qui détermine l'inclinaison des asymptotes sur l'axe des x (**171**), et nous avons vu (**205**) que les asymptotes de l'hyperbole se croisent à son centre.

Ce cas d'exception n'aura pas lieu pour l'ellipse, puisque les racines de l'équation $A \tang^2 \alpha + B \tang \alpha + C = 0$, sont imaginaires lorsque $B^2 - 4AC < 0$.

221. Pour savoir si parmi le nombre infini de systèmes de diamètres conjugués qu'admettent l'ellipse et l'hyperbole, il y en a qui sont rectangulaires, je pose (**123**)

$$\tang \alpha' = -\frac{1}{\tang \alpha},$$

et je substitue cette valeur de $\tang \alpha'$ dans l'équation [8] qui devient ainsi

$$\tang^2 \alpha - 2\frac{A-C}{B} \tang \alpha - 1 = 0 \qquad [9].$$

Cette équation a ses deux racines réelles, réciproques et de signes contraires, puisque son dernier terme est -1; donc les droites qui font avec l'axe des x les angles dont les tangentes satisfont à cette équation sont perpendiculaires entre elles (**123**), de sorte que si l'une d'elles est prise pour le nouvel axe des abscisses, l'autre sera le nouvel axe des ordonnées. D'où il suit que

L'ellipse et l'hyperbole ont chacune un système de diamètres conjugués rectangulaires, et n'en ont qu'un seul, quoique l'équation [9] soit du second degré. Nous les avons nommés, ces diamètres, les AXES *de symétrie* ou les AXES *principaux* de la courbe (**191**) *.

Nous venons de dire que l'ellipse et l'hyperbole n'avaient

---

* Si $A = C$, l'équation [9] donne $\tang \alpha = \pm 1$, de sorte que les axes principaux de l'ellipse ou de l'hyperbole sont alors parallèles aux bissectrices des angles des axes des coordonnées.

Cette propriété est un cas particulier de ce THÉORÈME : *Si l'équation d'une courbe n'est pas altérée, lorsque l'on y permute* x *et* y, *ou lorsqu'on y change* x *en* $-$y *et* y *en* $-$x, *cette courbe a pour axe la bissectrice de*

qu'un seul système d'axes principaux : cette proposition est toujours vraie pour la deuxième de ces courbes, mais souffre une exception pour la première. L'équation [9] revient, en effet, à

$$B \tan^2\alpha - 2(A-C)\tan\alpha - B = 0:$$

or, il est évident que, si l'on suppose $B=0$ et $A=C$, cette équation sera satisfaite d'elle-même, et indépendamment de toute valeur particulière donnée à tang α; donc le lieu de l'équation [4] est alors une courbe qui a une infinité de diamètres conjugués rectangulaires; et cela doit être puisque cette équation se réduit à

$$y^2 + x^2 = -\frac{F'}{A},$$

qui représente un cercle; car A peut toujours être regardé comme positif, et, dans le cas de l'ellipse, F' est négatif (**204** et **219**).

Mais il y a plus, c'est que la circonférence ne peut avoir pour diamètres conjugués que des droites perpendiculaires entre elles. Si l'on se reporte, en effet, à l'équation [8], et qu'on y introduise la double hypothèse $B=0$, $A=C$, qui est nécessaire et suffisante pour que l'équation [4] représente une circonférence, elle se réduira à

$$\tan\alpha \tan\alpha' + 1 = 0,$$

condition de perpendicularité des axes des y' et des x'.

---

l'angle des coordonnées positives ou la bissectrice du supplément de cet angle.

Supposons, en effet, que l'équation d'une courbe ne change pas lorsqu'on y permute x et y; si α et β sont les coordonnées d'un de ses points, il y aura sur cette courbe un point M' dont les coordonnées seront β et α. l'ordonnée MA du premier point et l'abscisse M'A' du second formeront une losange OAQA' dont la diagonale OQ divisera l'angle MQM' en deux parties égales, et sera par conséquent perpendiculaire sur le milieu de MM'. Donc la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle YOX. Fig. 83.

Si l'équation de la courbe ne change pas lorsqu'on y remplace x et y respectivement par $-y$ et par $-x$, on verra, en considérant la losange BOB''Q' que les points $M(\alpha, \beta)$ et $M''(-\beta, -\alpha)$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle YOx.

Il suit de ce théorème que *le lieu de l'équation* $xy = m^2$ *a pour axes principaux les bissectrices des angles des coordonnées.*

Tout ceci dérive des propriétés les plus élémentaires de la circonférence.

222. Concluons de tout ce qui précède que l'équation générale du second degré pourra toujours être ramenée à la forme

$$A'y'^2+C'x'^2+F'=0 \qquad [10],$$

lorsque (B^2-4AC) ne sera pas nul, et il résulte de la formule [5] qu'elle représentera

une ellipse si $B^2-4AC<0$ et $F'<0$;

une hyperbole si $B^2-4AC>0$ et $F'\gtrless 0$;

d'où il suit que dans le cas de l'ellipse A' et C' doivent être de mêmes signes, pour que la condition $B'^2-4A'C'<0$ puisse être remplie, et positifs, sans quoi le premier membre de l'équation [10] serait la somme de trois quantités négatives, et ainsi ne représenterait rien. Si l'équation [10] représente une hyperbole, A' et C' seront de signes contraires.

223. Nous allons chercher les distances du centre aux points où la courbe rencontre les diamètres conjugués auxquels elle est rapportée, et il suffira, pour cela, de faire successivement $y=0$ et $x=0$ dans son équation. Nous trouverons

$$x'=\pm\sqrt{-\frac{F'}{C'}}, \qquad y'=\pm\sqrt{-\frac{F'}{A'}}.$$

Ainsi, lorsque le lieu de l'équation [10] sera une ellipse, ces valeurs de x et de y seront réelles, comme cela doit être, d'après la forme connue de l'ellipse. Nous les représenterons par a et b, ce qui donnera

$$a=+\sqrt{-\frac{F'}{C'}}, \qquad b=+\sqrt{-\frac{F'}{A'}},$$

d'où $\quad C'=-\frac{F'}{a^2}, \qquad A'=-\frac{F'}{b^2}.$

En substituant ces valeurs dans l'équation [10], puis en divisant par $-F'$, il viendra

$$\frac{y'^2}{b^2}+\frac{x'^2}{a^2}-1=0, \quad \text{ou} \quad a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2=0.$$

Telle est l'équation de l'ellipse rapportée à un système quel-

conque de diamètres conjugués. $2a$ et $2b$ sont les longueurs de ces diamètres.

224. Si le lieu de l'équation [10] est une hyperbole, l'une des valeurs trouvées tout à l'heure pour x et pour y sera réelle et l'autre imaginaire, de sorte que *l'hyperbole rencontre toujours une des droites qui forment un système de diamètres conjugués, et ne rencontre pas l'autre* (**205, 207**). Le premier de ces diamètres porte le nom de *diamètre transverse,* et le second de *diamètre non transverse* ou *imaginaire.* Quoiqu'il ne rencontre pas la courbe, on prend cependant sur sa direction de part et d'autre du centre deux
Fig. 70 et 71. distances FI et FK égales au rapport de la valeur trouvée à $\sqrt{-1}$, et le double de cette distance, c'est-à-dire IK, se nomme la longueur du diamètre non transverse.

Nous conviendrons de compter les abscisses sur le diamètre transverse. En conséquence, nous disposerons de α de manière que $\sqrt{-\frac{F'}{C'}}$ soit réelle, c'est-à-dire de manière que C′ soit de signe contraire à F′ *; alors A′ sera de même signe que cette quantité; et, par conséquent, le rapport de $\sqrt{-\frac{F'}{A'}}$ à $\sqrt{-1}$ sera la quantité réelle $\sqrt{\frac{F'}{A'}}$. Nous représenterons cette quantité par b et $\sqrt{-\frac{F'}{C'}}$ par a, ce qui nous donnera

$$a=+\sqrt{-\frac{F'}{C'}}, \qquad b=+\sqrt{\frac{F'}{A'}},$$

d'où

$$C'=-\frac{F'}{a^2}, \qquad A'=\frac{F'}{b^2},$$

et, par conséquent, en substituant dans l'équation [10], puis divisant par F′,

$$\frac{y'^2}{b^2}-\frac{x'^2}{a^2}+1=0, \quad \text{ou} \quad a^2y'^2-b^2x'^2+a^2b^2=0.$$

Telle est l'équation de l'hyperbole rapportée à un système

---

* La valeur de C′ étant $A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha$ ou $\cos^2\alpha(A\tang^2\alpha+B\tang\alpha+C)$, il suffira de disposer de α de manière que $A\tang^2\alpha+B\tang\alpha+C \gtrless 0$, suivant que F′ sera $\lessgtr 0$.

quelconque de diamètres conjugués. $2a$ représente la longueur du diamètre transverse, et $2b$ celle du diamètre non transverse.

225. Il ne nous reste plus, pour avoir résolu complétement le problème, de *trouver les équations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à un système de diamètres conjugués*, qu'à calculer les valeurs des coefficients A' et C' en fonction de ceux de l'équation [1]. Parmi plusieurs manières d'y parvenir, nous préférerons la suivante, qui nous a été indiquée par M. le professeur *Chevillard.*

Nous avons obtenu l'équation [10] en remplaçant, dans l'équation [4], x et y par leurs valeurs données par les formules

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha', \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha';$$

si donc on substitue dans l'équation [10] à x' et à y' leurs valeurs

$$x' = \frac{x\sin\alpha' - y\cos\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha)} \quad \text{et} \quad y' = \frac{-x\sin\alpha + y\cos\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)},$$

tirées des formules ci-dessus, on devra retrouver identiquement l'équation [4]. Le résultat de cette substitution est

$$\begin{gathered} A'\frac{y^2\cos^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha + x^2\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha'-\alpha)} \\ + C'\frac{y^2\cos^2\alpha' - 2xy\sin\alpha'\cos\alpha' + x^2\sin^2\alpha'}{\sin^2(\alpha'-\alpha)} + F' = 0; \end{gathered}$$

d'où, en identifiant avec [4],

$$A = \frac{A'\cos^2\alpha + C'\cos^2\alpha'}{\sin^2(\alpha'-\alpha)} \quad [11], \qquad C = \frac{A'\sin^2\alpha + C'\sin^2\alpha'}{\sin^2(\alpha'-\alpha)} \quad [12],$$

$$B = -\frac{2(A'\sin\alpha\cos\alpha + C'\sin\alpha'\cos\alpha')}{\sin^2(\alpha'-\alpha)} \quad [13].$$

On tire facilement de ces équations

$$A + C = \frac{A' + C'}{\sin^2\theta} \quad \text{et} \quad B^2 - 4AC = -\frac{4A'C'}{\sin^2\theta},$$

en appelant θ l'angle des deux diamètres conjugués.

Les deux inconnues A' et C' dont nous connaissons actuellement la somme $(A+C)\sin^2\theta$, et le produit $-\frac{1}{4}(B^2-4AC)\sin^2\theta$

sont donc les racines de l'équation

$$z^2-(A+C)\sin^2\theta.z-\frac{B^2-4AC}{4}\sin^2\theta=0 \quad [14];$$

de sorte qu'elles ne dépendent que des coefficients des termes du second degré dans l'équation [1], et de l'angle que doivent faire les diamètres conjugués.

Si donc l'angle θ est donné, les coefficients A' et C', et, par suite, les valeurs des diamètres conjugués seront déterminées (223 et 224). Quant à leurs directions, on aura, pour les calculer, l'équation [8] jointe à $\alpha'-\alpha=\theta$; d'où l'on voit que l'on trouvera, en général, pour ces angles deux valeurs, et qu'ainsi il peut y avoir deux systèmes de diamètres conjugués qui fassent un angle donné.

Si l'angle θ n'est pas connu, on donnera à α une valeur arbitraire, qui rende C' de signe contraire à F', s'il s'agit d'une hyperbole, et l'équation [8] déterminera la valeur correspondante de α', et, par suite, l'angle θ, de sorte qu'en résolvant l'équation [14], on obtiendra A' et C', et, partant, a et b.

226. La considération de l'équation [14] va nous faire connaître plusieurs propriétés remarquables dont jouissent deux diamètres conjugués, et d'abord que *dans l'hyperbole l'angle de deux diamètres conjugués peut passer par tous les états de grandeur;* car le dernier terme de cette équation est négatif, puisque $B^2-4AC>0$.

Il n'en est pas de même dans l'ellipse; car le dernier terme de l'équation [13] étant positif, puisque alors $B^2-4AC<0$, les racines de cette équation peuvent être imaginaires. Or, la condition de réalité de ces racines est

$$(A+C)^2\sin^4\theta+(B^2-4AC)\sin^2\theta\geqq 0, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta\geqq\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{A+C}.$$

Si donc on appelle θ_1 le plus petit des angles positifs qui ont $+\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{A+C}$ pour sinus, on verra que l'angle θ ne peut varier que depuis θ_1 jusqu'à $180°-\theta_1$, et que, s'il est égal à l'une de ces deux limites, les racines de l'équation [14] sont égales, de sorte que $A'=C'$, donc alors $a=b$ (223). Ainsi, *dans l'ellipse, il y a un système de diamètres conjugués qui sont égaux, et il n'y en a qu'un;* car il est facile de voir que

l'hypothèse $\sin\theta = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{A+C}$ rend égales les racines de l'équation obtenue, en éliminant α' entre l'équation [8] et $\alpha' - \alpha = \theta$.

Dans ce cas où $\sin\theta = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{A+C}$, l'équation de l'ellipse devient

$$y^2 + x^2 = -\frac{F'}{A'},$$

c'est-à-dire qu'elle a la même forme que l'équation du cercle rapporté à des axes rectangulaires qui se croisent à son centre.

227. Nous avons vu qu'en appelant $2a$ et $2b$ les longueurs de deux diamètres conjugués, sur les directions desquels on compte respectivement les abscisses et les ordonnées, on a

$$C' = -\frac{F'}{a^2}, \quad A' = \mp\frac{F'}{b^2},$$

le signe supérieur se rapportant à l'ellipse et le signe inférieur à l'hyperbole (**223** et **224**) : or, si l'on substitue ces valeurs dans les équations

$$A' + C' = (A + C)\sin^2\theta \quad \text{et} \quad A'C' = -\frac{1}{4}(B^2 - 4AC)\sin^2\theta,$$

il viendra, après avoir divisé la première par $\pm F'$ et la seconde par $\pm F'^2$,

$$\frac{1}{b^2} \pm \frac{1}{a^2} = \mp\frac{(A+C)\sin^2\theta}{F'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^2b^2} = \mp\frac{(B^2 - 4AC)\sin^2\theta}{4F'^2}.$$

Cette dernière équation donne immédiatement

$$ab\sin\theta = \frac{2F'}{\sqrt{\mp(B^2 - 4AC)}};$$

et en divisant la première par la seconde, on trouve

$$a^2 \pm b^2 = \frac{4F'(A+C)}{B^2 - 4AC}.$$

Les seconds membres de ces deux formules étant des quantités constantes, on en déduit ces théorèmes attribués au géomètre grec APOLLONIUS :

1° *L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole est constante;* car $4ab\sin\theta$ est l'aire d'un parallélogramme qui a pour côtés contigus $2a$ et $2b$, et θ pour angle compris entre

eux, *et est, par conséquent, égale à celle du rectangle construit sur les axes principaux de cette courbe.*

2° *La somme des carrés de deux diamètres conjugués d'une ellipse est constante, et est, par conséquent, égale à la somme des carrés de ses axes.*

3° *La différence des carrés de deux diamètres conjugués d'une hyperbole est constante, et est, par conséquent, égale à la différence des carrés de ses axes**.

228. Si dans l'équation [14] on suppose $\theta=90°$, elle deviendra

$$z^2-(A+C)z-\frac{1}{4}(B^2-4AC)=0 \qquad [15],$$

équation dont les racines sont les valeurs des coefficients A' et C', quand la courbe est rapportée à ses axes. Pour nous conformer à la convention faite au n° **224** de compter les abscisses sur l'axe transverse, dans le cas de l'hyperbole, nous devrons prendre pour valeur de C' celle de ces racines qui sera de signe contraire à F'.

Pour que les axes d'une hyperbole soient égaux, il faut que $A'=-C'$ (**224**), et pour que l'équation ci-dessus ait ses racines égales et de signes contraires, il faut que $A+C=0$.

On appelle hyperbole *équilatère* celle dont les deux axes sont égaux. On voit donc

1° Que *les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation générale du second degré représente une hyperbole équilatère sont que les coefficients des carrés des varia-*

---

* On arrivera immédiatement à ces résultats en répétant *identiquement* sur les équations

$$\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{x^2}{a^2}\mp 1=0 \quad \text{et} \quad \frac{y'^2}{b'^2}\pm\frac{x'^2}{a'^2}\mp 1=0$$

qui représentent respectivement une ellipse ou une hyperbole rapportée à ses axes principaux et à un système de diamètres conjugués, les raisonnements et les calculs que nous avons faits au n° **225** sur les équations [4] et [10]. On trouvera ainsi

$$\mp\frac{1}{a^2b^2}=\mp\frac{1}{a'^2b'^2\sin^2(\alpha'-\alpha)}, \quad \text{d'où} \quad ab=a'b'\sin(\alpha'-\alpha);$$

$$\frac{1}{b^2}\pm\frac{1}{a^2}=\frac{1}{\sin^2(\alpha'-\alpha)}\left(\frac{1}{b'^2}\pm\frac{1}{a'^2}\right), \quad \text{d'où} \quad \frac{a^2\pm b^2}{a^2b^2}=\frac{a'^2\pm b'^2}{a'^2b'^2\sin^2(\alpha'-\alpha)};$$

et par conséquent $\qquad a^2\pm b^2=a'^2\pm b'^2.$

bles soient égaux et de signes contraires, et qu'on ait en même temps (**208**)

$$AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)\gtrless 0.$$

2° Que *les asymptotes d'une hyperbole équilatère se coupent à angles droits, et réciproquement;* car l'équation qui détermine les coefficients angulaires des asymptotes est $Ac^2+Bc+C=0$, de sorte que c'est là une propriété caractéristique de l'hyperbole équilatère.

3° Que, *parmi les hyperboles, celle qui est équilatère a seule des diamètres conjugués égaux, et que, dans une pareille hyperbole, les deux diamètres de chaque système sont égaux.*

229. Le calcul des valeurs de A' et de C' peut se faire d'une manière plus directe, et partant plus simple, lorsque l'on veut *rapporter l'ellipse ou l'hyperbole à ses axes principaux.*

En supposant, en effet, que l'équation [10] soit rapportée à un système de coordonnées rectangulaires, on l'aura obtenue en remplaçant, dans l'équation [4], x et y par leurs valeurs données par les formules (**99**)

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Si donc on substitue dans l'équation [10] à x' et à y' leurs valeurs

$$x'=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y'=y\cos\alpha-x\sin\alpha$$

tirées de ces formules, on devra retrouver identiquement l'équation [4]. Le résultat de cette substitution est

$$A'(y^2\cos^2\alpha-2xy\sin\alpha\cos\alpha+x^2\sin^2\alpha)$$
$$+C'(y^2\sin^2\alpha+2xy\sin\alpha\cos\alpha+x^2\cos^2\alpha)+F'=0.$$

Donc, en identifiant avec [4]

$$A=A'\cos^2\alpha+C'\sin^2\alpha,\quad C=A'\sin^2\alpha+C'\cos^2\alpha,$$
$$B=-2(A'-C')\sin\alpha\cos\alpha;$$

ces équations donnent

$$A+C=A'+C',\quad A-C=(A'-C')\cos 2\alpha,$$
$$B=-(A'-C')\sin 2\alpha,$$

d'où

$$\tang 2\alpha=-\frac{B}{A-C} \qquad [16].$$

On tire de cette valeur de tang 2α,

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{A-C}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}}.$$

Cette valeur est double, parce que l'équation [16] détermine à la fois l'axe des x' et l'axe des y'. En effet, si l'on appelle $2\alpha_1$ le plus petit des angles positifs qui ont $-\frac{B}{A-C}$ pour tangente, on aura $2\alpha = 2\alpha_1 + k\pi$, d'où $\alpha = \alpha_1 + \frac{k\pi}{2}$. Mais l'angle $\alpha < 2\pi$ (95) et $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$; donc on doit avoir $k > 0$ et $\alpha_1 + \frac{k\pi}{2} < 2\pi$, ou $\alpha_1 < \frac{4-k}{2}\pi$; et comme l'angle α_1 est positif, il faut que k soit < 4; donc k ne peut avoir pour valeurs que

$$k=0, \quad k=1, \quad k=2, \quad k=3,$$

qui donnent

$$\alpha=\alpha_1, \quad \alpha=\alpha_1+\frac{\pi}{2}, \quad \alpha=\alpha_1+\pi, \quad \alpha=\alpha_1+\frac{3\pi}{2}.$$

Or, la première et la troisième de ces valeurs déterminent une seule droite; la seconde et la quatrième donnent aussi une seule droite, mais perpendiculaire à la première, de sorte que, si l'on prend l'une d'elles pour l'axe des x', l'autre sera celui des y'. Ce qui prouve encore que *l'ellipse et l'hyperbole ont un seul système de diamètres conjugués rectangulaires.*

En substituant, dans l'expression de $(A'-C')$, la valeur trouvée ci-dessus pour $\cos 2\alpha$, il viendra

$$A'-C' = \pm \sqrt{B^2+(A-C)^2},$$

et, par suite,

$$A' = \frac{1}{2}\left[A+C \pm \sqrt{B^2+(A-C)^2}\right],$$

$$C' = \frac{1}{2}\left[A+C \mp \sqrt{B^2+(A-C)^2}\right],$$

formules dans lesquelles les signes se correspondent.

Si l'on observe que $\sqrt{B^2+(A-C)^2} = \sqrt{B^2-4AC+(A+C)^2}$, on verra que, dans le cas de l'hyperbole, il faudra, pour se

conformer à la convention du n° **224**, prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que $F' \gtrless 0$*.

230. Nous avons remarqué que *l'équation* $xy = m^2$ *représente une hyperbole rapportée à ses asymptotes* (**173**), et qu'ainsi l'équation [1] doit être réductible à cette forme. Mais, pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet, nous allons nous proposer cette questions générale : *Quelles relations faut-il établir entre les coefficients de l'équation générale du second degré pour qu'on puisse la ramener à la forme* $xy = m^2$*?*

D'abord il est évident que la courbe que l'on considère a un centre où est placée l'origine des nouvelles coordonnées : par conséquent, on doit déjà avoir entre les coefficients de l'équation [1] la relation

$$B^2 - 4AC \gtrless 0.$$

Cette condition étant supposée remplie, on pourra transporter l'origine au centre, ce qui donnera (**219**)

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0 \qquad [4],$$

les nouveaux axes pouvant être supposés rectangulaires. Il s'agit donc de faire évanouir de cette équation les carrés des deux variables, et, par conséquent, il faudra y remplacer x et y par leurs valeurs données par les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, en conservant l'origine, afin

---

* Cette méthode a cela de remarquable qu'elle fournit le moyen d'*obtenir l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à ses axes principaux*, sans passer par le calcul de l'équation [6], et on devait prévoir qu'elle serait plus simple que la méthode directe, puisqu'elle fait porter la transformation des coordonnées sur l'équation la plus simple.

On pourra de même éviter le calcul de cette équation, *lorsque la courbe devra être rapportée à un système de diamètres conjugués*, à l'aide de la méthode de M. *Chevillard* (**225**) ; mais il faudra éliminer A' et C' entre les équations [11], [12], [13], afin d'avoir une équation qui détermine la direction des nouveaux axes par rapport aux anciens. Il suffira, pour cela, de multiplier les deux premières respectivement par $\sin\alpha \sin\alpha'$ et par $\cos\alpha \cos\alpha'$ et d'ajouter membre à membre les équations produites, en ayant égard à la formule [13], et on retombera ainsi sur l'équation [7].

d'introduire deux indéterminées dans cette équation. Nous obtiendrons ainsi l'équation [6], et la possibilité d'effectuer la réduction demandée dépendra par conséquent de la possibilité de trouver des valeurs réelles de α et de α' qui satisfassent aux deux équations

$$A \sin^2\alpha' + B \sin\alpha' \cos\alpha' + C \cos^2\alpha' = 0,$$
$$A \sin^2\alpha + B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos^2\alpha = 0,$$

formées en égalant à zéro les coefficients de y'^2 et de x'^2 dans cette équation [6]. En divisant la première de ces équations par $\cos^2\alpha'$ et la seconde par $\cos^2\alpha$, on trouvera

$$A \operatorname{tang}^2\alpha' + B \operatorname{tang}\alpha' + C = 0,$$
$$A \operatorname{tang}^2\alpha + B \operatorname{tang}\alpha + C = 0.$$

Ces deux équations ont les mêmes racines; et comme $\operatorname{tang}\alpha'$ et $\operatorname{tang}\alpha$ ne peuvent pas être égales, il s'ensuit que chacune d'elles détermine à la fois ces deux quantités et que, par conséquent, on doit avoir

$$B^2 - 4AC > 0,$$

sans quoi on ne pourra pas faire évanouir à la fois les carrés des variables de l'équation [6]. Si cette condition est remplie, on pourra substituer les valeurs trouvées pour α et pour α' dans l'équation [6], qui se réduira alors à

$$B'xy + F' = 0, \quad \text{ou} \quad xy = m^2.$$

Cette équation représentera une courbe si, outre la condition $B^2 - 4AC > 0$, on a encore $F' \gtrless 0$, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit au n° **222**.

231. Si l'on veut calculer B', on pourra le faire assez simplement en appliquant la méthode du n° **225** aux équations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0 \quad \text{et} \quad B'xy + F' = 0.$$

On trouvera

$$A = -\frac{B' \cos\alpha \cos\alpha'}{\sin^2(\alpha' - \alpha)}, \qquad B = \frac{B'(\sin\alpha' \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha')}{\sin^2(\alpha' - \alpha)},$$
$$C = -\frac{B' \sin\alpha \sin\alpha'}{\sin^2(\alpha' - \alpha)};$$

puis, $$B^2 - 4AC = \frac{B'^2}{\sin^2(\alpha' - \alpha)}, \quad A + C = -\frac{B' \cos(\alpha' - \alpha)}{\sin^2(\alpha' - \alpha)},$$

partant

$$B^2-4AC+(A+C)^2 \quad \text{ou} \quad B^2+(A-C)^2=\frac{B'^2}{\sin^4(\alpha'-\alpha)}$$

et enfin

$$B'=\pm\frac{B^2-4AC}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}}.$$

EXEMPLES. *Rapporter à leurs asymptotes les hyperboles représentées par les équations*

$$4y^2-5xy+x^2-y+1=0,\ 2y^2-3xy-2x^2+y+x-1=0.$$

232. Supposons maintenant que $B^2-4AC=0$: les trois termes du second degré formeront un carré parfait, et on pourra en conséquence ramener l'équation [1] à la forme

$$(y+Nx)^2+Py+Qx+R=0 \quad [17],$$

de sorte qu'il s'agira de réduire cette équation à

$$A'y^2+E'x=0.$$

Le moyen le plus simple d'effectuer cette réduction est de changer d'abord la direction des axes, en conservant l'origine. Substituons donc dans l'équation [17] les valeurs de x et de y données par les formules

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',\quad y=x'\sin\alpha+y'\sin\alpha',$$

et l'équation résultante sera de la forme

$$(A'y'+B'x')^2+D'y'+E'x'+R=0 \quad [18],$$

dans laquelle

$$A'=\sin\alpha'+N\cos\alpha',\qquad B'=\sin\alpha+N\cos\alpha,$$
$$D'=P\sin\alpha'+Q\cos\alpha',\quad E'=P\sin\alpha+Q\cos\alpha.$$

Le coefficient du rectangle des variables étant $A'B'$, on voit que pour le faire évanouir, il faudra poser $A'B'=0$, et partant $A'=0$ ou $B'=0$; donc

Quand on fait évanouir de l'équation d'une parabole le rectangle des variables, le carré de l'une de ces variables disparaît en même temps.

Supposons qu'ayant laissé α' indéterminé, on ait posé $B'=0$, on en tirera

$$\tan g\,\alpha=-N.$$

La direction de l'axe des x étant ainsi déterminée, on pourrait, en disposant convenablement de α', faire évanouir de l'équation [18] la première puissance de y' en posant $D'=0$;

de sorte qu'en transportant ensuite l'origine au point où l'axe des x' coupe la parabole, on ramènerait son équation à ne plus contenir que le carré de y' et la première puissance de x', et c'est là le but auquel nous tendons. Mais, en suivant cette marche, on se priverait de la faculté d'examiner s'il y a plusieurs systèmes d'axes relativement auxquels l'équation de la courbe peut être ramenée à la forme $A'y'^2 + E'x = 0$. Nous allons donc laisser α' indéterminé et transporter les axes parallèlement à eux-mêmes au moyen des formules

$$x' = a + x'', \quad y' = b + y'',$$

a et b étant les coordonnées de la nouvelle origine. L'équation [18] deviendra de cette manière (182)

$$\left.\begin{array}{l} A''y''^2 + \begin{array}{l|l} 2A''b & y'' + E'x'' + A''b^2 \\ +D' & \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + D'b \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + E'a \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + R \end{array}\right\} = 0.$$

Le second et le quatrième termes de cette équation sont les seuls qui soient fonctions de a et de b, et, par conséquent, les seuls que l'on puisse faire évanouir en disposant de ces deux indéterminées. On s'en débarrassera donc en posant

$$2A''b + D' = 0, \quad A''b^2 + D'b + E'a + R = 0,$$

équations que l'on peut remplacer par

$$2A''b + D' = 0, \quad D'b + 2E'a + 2R = 0.$$

La première de ces deux équations donnera pour b une valeur réelle et finie; car, pour que A' fût nul, il faudrait que l'on fît $\alpha' = \alpha$ ou $= \alpha + \pi$, ce qui ne se peut. En substituant cette valeur de b dans la seconde, on trouvera une pareille valeur pour a; car E' ne peut pas être nul, sans quoi l'équation

$$A''y'^2 + D'y' + E'x' + R = 0$$

ne représenterait pas une parabole *. Donc on pourra tou-

* Pour que E' fût nulle, il faudrait que l'on eût $P \sin\alpha + Q \cos\alpha = 0$, c'est-à-dire que l'équation [1] donnerait $D \sin\alpha + E \cos\alpha = 0$, d'où $\tang\alpha = -\frac{E}{D} = -\frac{B}{2A}$: partant $E = \frac{BD}{2A}$, d'où $BD - 2AE = 0$, ce qui ne saurait être, puisque nous supposons que l'équation [1] représente une parabole (182).

jours trouver pour chaque valeur arbitraire donnée à α' un couple de valeurs réelles et finies pour a et b, et ramener, par conséquent, l'équation générale des paraboles à la forme

$$A''y''^2 + E'x'' = 0 \quad \text{ou} \quad y''^2 = 2px''.$$

Il y a donc une infinité de systèmes d'axes coordonnés par rapport auxquels l'équation de la parabole ne renfermera que le carré de l'une des variables et la première puissance de l'autre; et, parmi tous ces systèmes, il y en a un seul qui est rectangulaire. En effet, puisque l'angle α' est resté indéterminé, on peut le faire égal à $\alpha + 90^\circ$, et alors les axes des coordonnées se couperont à angles droits; mais les équations $2A''b + D' = 0$ et $D'b + 2E'a + 2R = 0$ ne détermineront qu'un seul couple de valeurs correspondantes pour a et b.

233. La forme de l'équation $y^2 = 2px$ montre que l'axe des abscisses partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe des y; et, comme il y a une infinité de systèmes d'axes par rapport auxquels l'équation de la parabole est réductible à la forme $y^2 = 2px$, et que l'axe des x de chacun de ces systèmes fait le même angle α avec l'axe des abscisses primitives ($\tan\alpha = -N$) on en conclut que *la parabole a une infinité de diamètres parallèles, et parmi eux un seul axe de symétrie* (**192**).

234. Il y a plus, c'est que *tous les diamètres de la parabole sont parallèles.* Considérons, en effet, un système quelconque de cordes parallèles : nous pourrons prendre pour valeur de α' l'angle qu'elles font avec l'axe des abscisses primitives, et en substituant cette valeur de α' dans les expressions de a et de b, nous trouverons pour ces quantités un couple de valeurs réelles et finies. Si donc nous transportons l'origine des coordonnées au point déterminé par ces valeurs de a et de b, et que nous prenions pour axe des y' une parallèle aux cordes dont il s'agit, et pour axe des x' la droite qui fait avec l'ancien axe des x l'angle dont la tangente est $-N$, nous trouverons $y^2 = 2px$ pour l'équation de notre parabole; mais alors l'axe des x est le diamètre qui coupe en deux parties égales le système des cordes proposées, et il fait encore avec l'axe des abscisses primitives l'angle constant α; donc tous les diamètres sont parallèles (**190**).

235. La quantité $2p=-\frac{E'}{A'^2}$ pouvant être positive ou négative; car on peut donner à α' une valeur qui rende $\sin\alpha'+N\cos\alpha' \gtrless 0$, l'équation de la parabole peut recevoir l'une ou l'autre des deux formes

$$y^2=2px \quad \text{ou} \quad y^2=-2px;$$

mais, comme la seconde se déduit de la première en y changeant x en $-x$, on voit que le lieu de la seconde n'est que celui de la première, auquel on aurait fait faire une demi-révolution autour de l'origine. Nous supposerons donc désormais que $2p$ soit positif. Cette constante se nomme le *paramètre* du diamètre de la parabole sur lequel on compte les abscisses (79).

***236.** Calculons la valeur de $2p=-\frac{E'}{A'^2}$. J'observe, pour cela, que $\tang\alpha$ étant égale à $-N$, il en résulte

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+N^2}} \quad \text{et} \quad \sin\alpha=\frac{-N}{\sqrt{1+N^2}},$$

et par suite, $$E'=-\frac{NP-Q}{\sqrt{1+N^2}},$$

$$A'=\sin\alpha'-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha'=\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{\cos\alpha}=\sqrt{1+N^2}\sin\theta,$$

en appelant θ l'angle des nouveaux axes. Donc

$$2p=\frac{NP-Q}{\sqrt{(1+N^2)^3}\sin^2\theta}.$$

Si l'on veut calculer aussi les coordonnées de la nouvelle origine, on observera que θ étant égal à $\alpha'-\alpha$, il en résulte

$$\sin\alpha'=\sin\alpha\cos\theta+\sin\theta\cos\alpha=\frac{\sin\theta-N\cos\theta}{\sqrt{1+N^2}};$$

$$\cos\alpha'=\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta=\frac{\cos\theta-N\sin\theta}{\sqrt{1+N^2}};$$

Donc, $$D'=\frac{(P+NQ)\sin\theta+(Q-NP)\cos\theta}{\sqrt{1+N^2}}.$$

Mais les équations

$$2A'^2b+D'=0 \quad \text{et} \quad D'b+2E'a+2R=0$$

donnent $$b=-\frac{D'}{2A'^2} \quad \text{et} \quad a=\frac{D'^2-4RA'^2}{4A'^2E'};$$

donc, en remplaçant A', D' et E' par leurs valeurs,

$$b=-\frac{(P+NQ)\sin\theta+(Q-NP)\cos\theta}{\sqrt{(1+N^2)^3}\sin^2\theta},$$

$$a=\frac{\{(P+NQ)^2-4R(1+N^2)^2\}\sin^2\theta+2(P+NQ)(Q-NP)\sin\theta\cos\theta+(Q-NP)^2\cos^2\theta}{4(Q-NP)\sqrt{(1+N^2)^3}\sin^2\theta}.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, θ sera égal à $90°$, et les trois formules précédentes deviendront

$$2p=\frac{NP-Q}{\sqrt{(1+N^2)^3}},\quad b=-\frac{P+NQ}{\sqrt{(1+N^2)^3}},\quad a=\frac{(P+NQ)^2-4R(1+N^2)^2}{4(Q-NP)\sqrt{(1+N^2)^3}}.$$

Si, pour nous conformer à la convention du n° **235**, nous voulons que $2p$ soit positif, il faudra affecter $\sqrt{(1+N^2)^3}$ du signe $+$ ou du signe $-$, selon que $NP-Q$ sera >0 ou <0.

237. Il est maintenant établi que l'on peut ramener l'équation générale des ellipses et des hyperboles à la forme

$$A'y^2+C'x^2+F'=0,$$

et qu'alors chaque axe des coordonnées rencontre l'ellipse, mais que l'un d'eux seulement coupe l'hyperbole. Supposons que ce soit celui sur lequel nous comptons les abscisses, qui jouisse de cette propriété (**224**), et transportons l'origine au point où cet axe des x rencontre la courbe. Nous ferons, pour cela, $x=x'+\sqrt{-\frac{F'}{C'}}$, $\sqrt{-\frac{F'}{C'}}$ étant ainsi une quantité réelle, et nous trouverons, pour équation transformée,

$$A'y^2+C'x^2+2\sqrt{-F'C'}.x=0;$$

d'où l'on voit que l'équation générale des courbes du second ordre pourra toujours se ramener à la forme

$$y^2=nx^2+2px \qquad [19];$$

car l'équation $y^2=2px$ de la parabole se déduit de celle-ci en y supposant $n=0$.

Remarquons que l'équation [19] est moins générale que l'équation [1]; car elle représente toujours au moins un point, tandis que celle-ci peut ne rien représenter.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DE L'ELLIPSE.

§ I. Construction de l'ellipse par points.

238. Nous avons vu que l'équation générale des ellipses pouvait toujours être ramenée à

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0 \qquad [1],$$

dans laquelle $2a$ et $2b$ représentent les longueurs des diamètres conjugués, sur les directions desquels on compte les abscisses et les ordonnées. On déduit de cette forme de l'équation de l'ellipse plusieurs procédés pour construire géométriquement cette courbe par points, lorsque l'on connaît deux diamètres conjugués de grandeur et de position. Nous nous contenterons de citer les suivants qui sont des plus simples.

Si l'on résout l'équation [1] par rapport à y, on trouvera

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad \text{d'où} \quad a:b::\sqrt{a^2-x^2}:y.$$

Ainsi l'ordonnée d'un point quelconque est une quatrième proportionnelle aux quantités a, b et $\sqrt{a^2-x^2}$.
Fig. 84. Soient donc $A'A=2a$ et $B'B=2b$ les diamètres conjugués donnés : j'élève au point O la perpendiculaire indéfinie CC' sur A'A, et je fais mouvoir ensuite dans l'angle droit COA une droite UMV telle que $UM=a$ et $MV=b$, de manière que ses extrémités U et V glissent respectivement sur CC' et sur AA'. Le point M décrira le quart d'une ellipse dont les axes seront égaux à $2a$ et à $2b$. Menons, en effet, par le centre O la parallèle ON à la droite UV jusqu'au prolongement de l'ordonnée MP : ON sera égale à UM, c'est-à-dire à a, et, par conséquent, $PN=\sqrt{a^2-x^2}$. Or, la similitude des triangles OPN et PMV donne $a:b::\sqrt{a^2-x^2}:PM$; donc le point M est un point de l'ellipse dont $2a$ et $2b$ seraient les axes. Si donc on incline les ordonnées de ses différents points

parallèlement à BB′, sans changer leurs longueurs, on obtiendra l'ellipse demandée.

239. Corollaire. Si les axes de l'ellipse sont égaux, le point M est le milieu de UV, et, par conséquent, la distance OM est constante et égale à UM, c'est-à-dire à a. Donc la courbe décrite par le point M est une circonférence, de sorte que *la circonférence est une ellipse dont les axes sont égaux*, comme cela résulte de l'équation, en coordonnées rectangulaires, $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, lorsqu'on y suppose $a=b$.

240. Voici une seconde méthode par laquelle on détermine le point de l'ellipse correspondant à une abscisse donnée OP. Décrivez deux circonférences sur AA′ et sur BB′ comme Fig. 85 et 86.
diamètres, et élevez au point P une perpendiculaire PN au diamètre AA′ : cette perpendiculaire sera égale à $\sqrt{a^2-x^2}$, et, par conséquent, si on joint ON, et qu'on tire par le point C une parallèle CM à A′A, la partie PM de la droite PN ainsi déterminée sera évidemment une quatrième proportionnelle aux trois droites a, b et $\sqrt{a^2-x^2}$. Donc, si les diamètres conjugués donnés sont rectangulaires, le point M sera le point de Fig. 85.
l'ellipse demandée correspondant à l'abscisse OP, et s'ils sont obliques, il n'y aura qu'à mener par le point P une Fig. 86.
parallèle PM′ à BB′, et à rabattre PM sur cette parallèle. Le point M′ ainsi déterminé appartiendra à l'ellipse demandée.

241. La quantité $\sqrt{a^2-x^2}$ étant l'ordonnée rectangulaire du cercle correspondante à l'abscisse x, il résulte de la proportion $a:b::\text{PN}:\text{PM}=\text{PM}'$ que, *si sur un diamètre* 2a *d'une ellipse on décrit une circonférence, les ordonnées de cette circonférence et de cette ellipse comptées parallèlement à une perpendiculaire à ce diamètre et à son conjugué, seront proportionnelles à ces diamètres respectifs.*

242. On voit par là que, si sur les deux axes d'une ellipse, comme diamètres, on décrit deux circonférences, l'ellipse contiendra la plus petite et sera renfermée dans la plus grande. Donc *les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus grand et l'autre le plus petit de ses diamètres.*

§ II. Des cordes supplémentaires.

243. *On appelle* CORDES SUPPLÉMENTAIRES *deux cordes*

menées des extrémités d'un diamètre quelconque à un même point d'une ellipse ou d'une hyperbole.

244. Nous allons examiner quelles relations existent entre les tangentes des angles que deux cordes supplémentaires font avec le grand axe de l'ellipse, et, en conséquence, nous supposerons que l'on ait rapporté la courbe à ses deux axes $2a$ et $2b$, en convenant *toujours* de compter les abscisses sur le plus grand que nous supposerons être $2a$. Son équation sera donc

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0 \qquad [1].$$

Fig. 87 Soient (x', y') les coordonnées de l'extrémité C du diamètre CC'; celles de son autre extrémité C' seront $(-x', -y')$: j'appelle α et α' les angles que font avec le grand axe les cordes MC et MC' menées au point $M(x, y)$ de l'ellipse, et nous aurons (**117**)

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{y-y'}{x-x'}, \qquad \operatorname{tang}\alpha'=\frac{y+y'}{x+x'},$$

et, parce que les points M, C et C' appartiennent à la courbe

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2; \quad a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2.$$

Si entre ces quatre équations nous éliminons x, y, et l'une des deux quantités x' et y', y' par exemple, nous aurons une équation finale entre $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha'$ et x' qui exprimera la relation qui a lieu entre les coefficients angulaires des cordes supplémentaires issues des extrémités du diamètre CC' ou de celles de son symétrique par rapport au grand axe. Or, on déduit facilement de nos quatre équations

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'=\frac{y^2-y'^2}{x^2-x'^2}, \quad \text{et} \quad a^2(y^2-y'^2)+b^2(x^2-x'^2)=0,$$

et de ces deux-ci

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2} \qquad [2],$$

relation qui, étant indépendante de x' et de y', convient aux cordes supplémentaires issues des extrémités d'un diamètre *quelconque* de l'ellipse, et par conséquent à celles qui partiraient des sommets (**184**). Donc

Le produit des tangentes des angles que deux cordes supplémentaires quelconques font avec le grand axe de

l'ellipse est égal à MOINS *le carré du rapport du petit axe au grand.*

Réciproquement, toutes les fois que cette condition sera remplie pour deux cordes issues des extrémités d'un diamètre ou aboutissant à un même point de l'ellipse, on sera certain qu'elles sont supplémentaires, c'est-à-dire que, dans le premier cas, elles iront concourir sur la courbe, et que, dans le second, le centre et les points où elles coupent l'ellipse seront en ligne droite. Cette réciproque se démontre facilement par la réduction à l'absurde : ainsi nous ne nous y arrêterons pas.

Si $a=b$, la relation [2] devient

$$\tang\alpha \tang\alpha' = -1,$$

ce qui prouve que tout angle inscrit dans une demi-circonférence de cercle est droit.

245. De ce que la relation [2] est indépendante de la position du diamètre par les extrémités duquel on a tiré les cordes supplémentaires, il suit que, *par les extrémités d'un diamètre quelconque, on peut toujours mener deux cordes supplémentaires parallèles à celles qui correspondent à tout autre diamètre;* car, si l'on appelle β et β' les angles que font avec le grand axe deux cordes supplémentaires qui partent des extrémités de ce grand axe, par exemple, on aura

$$\tang\beta \tang\beta' = \tang\alpha \tang\alpha'.$$

Si donc $\beta=\alpha$, c'est-à-dire si une corde du second système est parallèle à une corde du premier, on aura

$$\tang\beta' = \tang\alpha', \quad \text{d'où} \quad \beta'=\alpha',$$

de sorte que les deux autres cordes seront aussi parallèles.

246. L'angle que forment deux cordes supplémentaires est évidemment une quantité variable, sans quoi l'arc d'ellipse sous-tendu par le diamètre correspondant serait un arc de circonférence; d'ailleurs, s'il en était ainsi, en appelant θ cet angle constant, on aurait $\alpha'-\alpha=\theta$, et cette équation jointe à [2] déterminerait les angles α et α', tandis que ce sont des quantités variables. *Pour savoir si cet angle* θ *peut prendre toutes les valeurs possibles*, nous supposerons que les deux cordes supplémentaires partent des sommets du

Fig. 88. grand axe, ce qui n'altérera pas la généralité des résultats, d'après ce qui précède (**245**), et en appelant (x, y) les coordonnées de leur point de concours, nous aurons $\tang \alpha = \frac{y}{x-a}$, $\tang \alpha' = \frac{y}{x+a}$, et par conséquent

$$\tang \theta = \tang(\alpha - \alpha') = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - a^2}} = \frac{2ay}{y^2 + x^2 - a^2}.$$

Or, le point (x, y) appartenant à l'ellipse, on a

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \text{d'où} \quad x^2 - a^2 = -\frac{a^2y^2}{b^2};$$

et, par suite,

$$\tang \theta = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)y}.$$

y étant positif et $a > b$, on voit que $\tang \theta < 0$; mais il semble que si y était négatif, $\tang \theta$ serait positif, ce qui ne peut évidemment pas avoir lieu; or, l'angle AM'A' est égal à $(\alpha_1' - \alpha_1)$, de sorte que le second membre de l'équation précédente déterminant $\tang(\alpha - \alpha')$, il faut changer son signe pour avoir la valeur de $\tang(\alpha'_1 - \alpha_1)$. L'angle θ est donc obtus *, à moins que y ne soit nul, auquel cas on a $\tang \theta = \infty$, et partant $\theta = 90°$. Ainsi, au sommet A ou A' l'angle des cordes supplémentaires est droit, et, en effet, le point M descendant vers A, la corde interceptée par l'ellipse sur la sécante AM diminue, èt devient nulle quand ce point arrive en A; donc alors cette sécante est tangente à l'ellipse en ce point, et est, par conséquent, perpendiculaire à l'axe AA' (**189**, 2°). Le point M s'élevant, au contraire, sur la courbe, son ordonnée y augmente, et ainsi la valeur absolue de $\tang \theta$ diminue; donc cette valeur absolue de $\tang \theta$ sera *minimum* quand y atteindra son *maximum*, c'est-à-dire quand y sera égale à b; mais un angle obtus est d'autant plus grand que la valeur absolue de sa tangente est plus petite; donc le *maximum* de l'angle formé par deux cordes supplémentaires est ABA', et, par conséquent, l'angle BAB' supplémentaire de

* L'ellipse étant enveloppée par la circonférence décrite sur son grand axe, comme diamètre, tout angle inscrit dans la demi-ellipse ABA' ou AB'A' est nécessairement obtus.

ABA' est la valeur *minimum* de cet angle. *Les angles du parallélogramme formé en joignant les quatre sommets de l'ellipse sont donc les limites de l'angle de deux cordes supplémentaires,* et ces angles sont donnés par la formule

$$\text{tang}\,\theta = \pm\frac{2ab}{a^2-b^2} \quad [3], \qquad \text{d'où} \qquad \sin\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2} \quad [4].$$

247. Remarquons que les cordes supplémentaires qui forment ces angles-limites sont parallèles aux diagonales du rectangle CDEF construit sur les deux axes.

248. Le système des équations

$$\text{tang}\,\theta = \frac{2ay}{y^2+x^2-a^2}, \quad \text{ou} \quad y^2+x^2-\frac{2a}{k}y-a^2=0 \quad [5],$$

$$\text{et} \qquad a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0 \qquad [1],$$

(k représente tang θ) donne le moyen de *trouver deux cordes supplémentaires qui fassent entre elles un angle donné* θ, puisqu'en les résolvant, on obtiendra les coordonnées du point de concours de ces cordes. Mais, si l'on veut résoudre ce problème géométriquement, il n'y aura qu'à tracer les lieux de ces équations, et leurs points d'intersection seront ceux où les cordes viennent se croiser. Or, la seconde est toute construite : c'est l'ellipse proposée; quant à la première, on reconnaît immédiatement qu'elle représente une circonférence, puisque le rectangle des variables n'entre pas dans son équation, et que les coefficients des carrés de ces mêmes variables sont égaux; on voit ensuite que l'axe des y est un diamètre; car, pour une même valeur de y, l'équation $y^2+x^2-\frac{2a}{k}y-a^2=0$ donne deux valeurs de x égales et de signes contraires. Ainsi, le centre est situé sur l'axe des y, et son ordonnée est la demi-somme des ordonnées des points où cet axe est coupé par cette circonférence, c'est-à-dire la demi-somme des racines de l'équation

$$y^2-\frac{2a}{k}y-a^2=0,$$

obtenue en faisant $x=0$ dans l'équation du cercle; donc cette ordonnée est $\frac{a}{k}$; donc elle est égale au côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'angle adjacent est θ, ou $180^\circ-\theta$, selon que l'angle donné θ est aigu ou obtus, et

Fig. 89. dont l'autre côté est a. Nous ferons donc au point A l'angle $A'AT=\theta$, nous élèverons sur AT la perpendiculaire AO', et O' sera le centre du cercle; car

$$OO'=a\,\text{tang}\,OAO'=a\cot TAX=\frac{-a}{\text{tang}(180^\circ-\theta)}=\frac{a}{k}.$$

Mais ce cercle doit, d'après son équation, passer par les points A et A'; ainsi on l'obtiendra en décrivant une circonférence du centre O' et avec O'A pour rayon. Joignant ensuite les points M et M' où il coupe l'ellipse avec les points A et A', on formera deux systèmes de cordes supplémentaires qui feront entre elles l'angle donné θ.

La partie de notre cercle qui est située au-dessus de l'axe AA' est le segment capable de l'angle θ, comme on aurait pu le prévoir par des considérations géométriques.

Il sera bien de discuter ce problème, en cherchant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations [1] et [5] aient quatre, trois ou deux solutions réelles.

§ III. Des diamètres conjugués.

Fig. 90. **249.** Soient AM et A'M deux cordes supplémentaires quelconques : si par le centre O on tire le diamètre CC' parallèle à A'M, il coupera les deux côtés A'A et MA du triangle A'AM en parties proportionnelles, et passera, par conséquent, par le milieu de MA; il a donc deux points communs avec le diamètre qui divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à AM; donc il est ce diamètre lui-même. Par la même raison le diamètre DD' parallèle à AM est aussi le lieu des milieux des cordes parallèles à A'M; donc CC' et DD' sont conjugués (**193**); donc

Deux diamètres parallèles à deux cordes supplémentaires sont conjugués.

La réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'*on peut toujours mener deux cordes supplémentaires qui soient parallèles à deux diamètres conjugués donnés.* Soient, en effet, CC' et DD' deux diamètres conjugués : tirons un diamètre quelconque AA', par une de ses extrémités la corde A'M parallèle à CC', et joignons MA; cette droite MA sera parallèle à DD'; car le diamètre DD', qui est le conjugué de CC', divise en deux parties égales la corde MA' parallèle à CC', donc il coupe les

côtés MA' et A'A du triangle AMA' en parties proportionnelles; donc il est parallèle au troisième côté MA de ce triangle.

Donc, *pour que deux diamètres soient conjugués, il faut et il suffit qu'ils soient parallèles à deux cordes supplémentaires*, ou, en d'autres termes, *que le produit des tangentes des angles qu'ils font avec le grand axe soit égal à* $-\frac{b^2}{a^2}$.

250. Cette condition analytique résulte de la formule [8] du n° **219**; car, si l'on veut appliquer cette formule à l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, il faudra y faire $A=a^2$, $B=0$, $C=b^2$, et alors elle deviendra

$$a^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + b^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

On arrive encore au même résultat par la théorie que nous avons exposée au n° **193**, puisque la formule [7] est identique avec la formule [8] du n° **219**.

On pourra se proposer pour exercice d'appliquer les méthodes des n^{os} **193** et **219** à l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

de l'ellipse rapportée à ses axes principaux.

251. De la condition $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$, on conclut qu'*il n'y a pas dans l'ellipse d'autre système de diamètres conjugués rectangulaires que celui de ses axes;* car il est clair que, si des deux quantités $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\alpha'$ l'une n'est pas *nulle* et l'autre *infinie*, il est impossible que la condition

$$a^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + b^2 = 0$$

soit vérifiée en même temps que la condition

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + 1 = 0$$

qui exprime que les deux diamètres conjugués sont rectangulaires; tandis que si $a=b$, ces deux conditions ont toujours lieu simultanément. Donc le cercle n'a que des diamètres conjugués rectangulaires.

252. PROBLÈME. *Une ellipse et un de ses diamètres* CC' *étant donnés, trouver le conjugué de ce diamètre.*

Fig. 90. Par le milieu O de CC′, tirez une droite quelconque AA′; par une des extrémités de ce nouveau diamètre, tracez une corde A′M parallèle à CC′; joignez MA et menez le diamètre DD′ parallèle à MA. DD′ sera le conjugué de CC′.

253. Problème. *Une ellipse étant tracée, trouver deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné* θ.

Solution. Puisque deux diamètres sont conjugués lorsqu'ils sont parallèles à deux cordes supplémentaires, la question revient à trouver deux cordes supplémentaires qui comprennent entre elles l'angle donné θ, et à mener ensuite deux diamètres parallèles à ces cordes.

En conséquence, on tirera deux cordes parallèles quelconques; on mènera une ligne droite par leurs milieux, ce qui donnera un diamètre AA′, sur lequel on décrira un segment de cercle capable de l'angle donné θ; puis on joindra le point M où l'arc de cercle coupe l'ellipse aux extrémités de ce diamètre, et en menant par le centre deux parallèles aux cordes AM et A′M, on aura une solution du problème.

Discussion. Les équations de l'ellipse et du cercle auquel appartient le segment, étant du deuxième degré, ne peuvent pas admettre plus de quatre couples de valeurs de x et de y, de sorte que le cercle ne saurait couper l'ellipse en plus de quatre points; et comme deux de ces points sont A et A′, il ne peut y avoir que deux intersections qui fournissent chacune un système de cordes supplémentaires faisant entre elles l'angle θ. Ces deux intersections auront lieu si l'angle θ est compris entre les deux limites L et l de l'angle des cordes supplémentaires; car la symétrie de l'ellipse par rapport à ses axes prouve que, dans ce cas, on peut mener par les extrémités du grand axe deux systèmes de cordes supplémentaires qui se croisent sous le même angle, et nous avons vu qu'il est toujours possible de tirer par l'une des extrémités d'un diamètre quelconque deux cordes supplémentaires qui soient parallèles à celles qui partent des extrémités de tout autre diamètre.

Il suit de là que, si l'angle θ est compris entre L et l, le problème aura, *en général,* deux solutions, lors même que les deux points d'intersection du cercle et de l'ellipse seraient de part et d'autre du diamètre AA′; car l'angle AM′A′ est à

la vérité supplémentaire de θ, mais les diamètres parallèles aux côtés de cet angle forment deux angles dont l'un est égal au supplément de AM′A′, c'est-à-dire à θ. Ces deux systèmes de diamètres conjugués seront situés symétriquement à l'égard des axes.

Si θ est égal à L ou à l, il ne peut plus y avoir qu'un seul système de cordes supplémentaires qui se croisent sous cet angle; et il faut, par conséquent, que les deux points M et M′ viennent se confondre, et qu'ainsi le cercle soit tangent à l'ellipse. Les cordes supplémentaires étant alors parallèles aux diagonales du rectangle construit sur les axes (**247**), c'est suivant ces diagonales que sont dirigés les diamètres demandés. *Ils sont donc égaux*, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit au n° **226**.

Si θ est $< l$ ou $> L$, il n'y a point de cordes supplémentaires qui forment l'angle θ, de sorte que le cercle ne rencontrera l'ellipse qu'aux points A et A′, et le problème sera impossible.

Nous venons de dire que si $\theta = L$ ou l, les points M et M′ se confondront, parce qu'il n'y a plus alors qu'un seul système de cordes supplémentaires qui se croisent sous l'angle θ : on pourrait croire qu'il n'y en aurait aussi qu'un seul, si l'un de ces points, M′, par exemple, venait à coïncider avec A. Ce serait une erreur; car alors la tangente menée en A au cercle est la corde supplémentaire de AA′, puisqu'elle est aussi tangente à l'ellipse, et qu'elle fait avec AA′ un angle égal à θ. Il y aurait donc alors deux systèmes de cordes supplémentaires se coupant sous l'angle θ.

Mais, si l'angle θ étant toujours égal à L ou à l, le diamètre AA′ était une des diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse, c'est-à-dire coupait ses cordes sous cet angle L ou l, les deux points M et M′ coïncideraient avec A ou A′, de sorte que le cercle couperait l'ellipse en trois points réunis en un seul. En effet, la tangente menée en ce point étant parallèle aux cordes conjuguées du diamètre AA′ (**189**, 2°), fait avec ce diamètre l'angle L; donc elle est la corde supplémentaire de AA′, et comme il ne peut y avoir qu'un seul système de cordes qui fassent un angle égal à L, il faut nécessairement que les points M et M′ soient confondus avec A. On dit alors que *la circonférence et l'el-*

lipse ont un contact du second ordre; elles sont à la fois sécantes et tangentes : sécantes, puisqu'elles se croisent, et tangentes, car elles sont touchées au point A par la même droite.

254. Nous avons dit que quand l'angle θ était compris entre les limites L et *l*, le problème admettait, *en général,* deux solutions : c'est que, si le quadrilatère MAA'M' était un parallélogramme, il n'y aurait qu'un seul système de diamètres conjugués faisant l'angle θ. Or, les angles M et M' étant alors égaux et supplémentaires seraient droits : il faut donc examiner si le quadrilatère MAM'A' peut être un rectangle, lorsque l'angle θ est droit. Dans ce cas, le cercle est concentrique à l'ellipse, de sorte qu'en prolongeant la droite MO d'une quantité égale à elle-même, son extrémité devra appartenir à la fois à l'ellipse et à la circonférence; donc M' est cette extrémité; donc le quadrilatère MAM'A' est un rectangle; donc *il ne peut y avoir qu'un seul système de diamètres conjugués rectangulaires, c'est celui des axes principaux* (**221** et **251**).

Pour trouver les axes principaux d'une ellipse, on décrira une demi-circonférence sur l'un quelconque de ses diamètres, on joindra le point où il coupe la courbe aux extrémités de ce diamètre, et il ne s'agira plus que de mener par le centre des parallèles à ces cordes.

255. Nous avons prouvé au n° **226** que l'ellipse avait des diamètres conjugués égaux, et la discussion du problème précédent nous l'a confirmé : toutefois on peut démontrer l'existence de ces diamètres, et les déterminer par une considération géométrique qui est trop simple pour la passer sous silence.

Concevons, en effet, que deux diamètres conjugués soient d'abord confondus avec les axes principaux : l'un deux sera alors égal à $2a$ et l'autre à $2b$. Cela posé, faisons-les tourner autour du centre de manière qu'ils soient toujours conjugués; le premier décroîtra d'une manière continue depuis $2a$ jusqu'à $2b$, tandis que l'autre croîtra en même temps et de la même manière depuis $2b$ jusqu'à $2a$. Donc il y aura eu un instant, et un seul, où nos deux diamètres conjugués se seront trouvés égaux; mais, à cause de la symétrie de l'ellipse par rapport à ses axes, ils étaient alors également inclinés sur ces axes, et, par conséquent, parallèles aux cordes supplé-

mentaires qui joignent les extrémités du petit axe avec celles du grand; donc il y a dans l'ellipse des diamètres conjugués égaux, lesquels sont dirigés suivant les diagonales du rectangle construit sur les axes (**247**).

256. Si nous convenons de désigner par $2a$ et par $2b$ les longueurs des axes d'une ellipse, et par $2a'$ et par $2b'$ celles de deux diamètres conjugués quelconques, nous aurons entre les longueurs de deux diamètres conjugués, leurs inclinaisons α et α' sur le grand axe de l'ellipse, l'angle θ qu'ils forment entre eux et les longueurs des axes (**227** et **249**), les quatre équations suivantes :

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2, \quad a'b'\sin\theta=ab,$$
$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}, \quad \alpha'-\alpha=\theta,$$

de sorte que l'on pourra résoudre, par leur moyen, tous les problèmes dans lesquels on se proposera de déterminer quatre des sept quantités a, b, a', b', α, α' et θ, lorsque l'on connaîtra trois d'entre elles, pourvu toutefois que les données ne soient pas les trois angles α, α' et θ. Ainsi, par exemple, si l'on voulait *trouver deux diamètres conjugués qui fissent entre eux un angle donné, connaissant les axes,* on tirerait facilement les valeurs de a' et de b' des deux premières équations, puis, en éliminant α' entre les deux dernières, on aurait une équation du second degré, qui ferait connaître par sa tangente l'angle que l'un de ces diamètres fait avec le grand axe, et, comme leur inclinaison mutuelle est donnée, leurs directions se trouveraient ainsi déterminées. Nous ne nous arrêterons pas à développer cette solution, non plus que celle des problèmes analogues, mais nous reviendrons plus loin (**295**) sur la plus importante de ces questions, celle où il s'agit de construire les axes d'une ellipse, lorsque l'on connaît deux diamètres conjugués en grandeur et en position.

§ IV. Des foyers.

257. EULER appelle *foyer* d'une courbe un point qui jouit de cette propriété, que sa distance à un point quelconque de cette courbe est une fonction rationnelle et entière de l'abscisse de ce point. Cette définition a été adoptée dans la plupart des traités de géométrie analytique, et cependant elle est

loin d'être satisfaisante. On conçoit, en effet, que, si l'on rapportait la courbe à d'autres axes, il pourrait très-bien se faire que la distance du foyer à un point quelconque de la courbe ne fût plus une fonction rationnelle de l'une seulement des deux coordonnées de ce point, de sorte que ce foyer n'en serait plus un. M. *Bret,* professeur à la Faculté des sciences de Grenoble, a modifié la définition d'*Euler* dans un article inséré dans le huitième volume des *Annales de mathématiques de* Gergonne; mais cette nouvelle définition, que M. *Francfort* a reproduite plus tard, était restée à peu près ignorée, lorsque M. *Auguste Comte* attira tout à fait l'attention sur la vraie notion des foyers, en adressant aux candidats de l'École polytechnique une foule de questions qu'il est souvent très-difficile de résoudre, en partant des idées d'Euler sur ces points remarquables, et qui ne sont plus, au contraire, qu'un jeu facile de calcul lorsque l'on adopte, ainsi que nous allons le faire, la définition suivante des foyers.

On appelle Foyer *d'une courbe un point tel que sa distance à un point quelconque de cette courbe est une fonction rationnelle, entière et du premier degré des coordonnées de ce point.*

258. Il suit de cette définition que, *si une courbe a un foyer, il existe sur son plan une droite telle que le rapport des distances de chacun des points de cette courbe au foyer et à cette droite est constant.* En effet, la distance du foyer à un point quelconque (x', y') de la courbe devant être une fonction rationnelle, entière et du premier degré des coordonnées de ce point, est donnée par une expression de la forme

$$my'+nx'+p;$$

mais la distance de ce même point (x', y') à la droite

$$my+nx+p=0$$

a pour expression (**129**)

$$\frac{my'+nx'+p}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

donc le rapport de ces deux distances est la quantité constante

$$\sqrt{m^2+n^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

259. Cette droite dont l'existence est intimement liée à celle du foyer se nomme *directrice*, et on voit par ce qui précède, que *son équation s'obtient en égalant à zéro l'expression de la distance du foyer à un point quelconque* (x, y) *de la courbe*, et que *le rapport des distances de ce point au foyer et à la directrice est égal à la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de* x *et de* y *dans l'équation de cette droite.*

260. La réciproque du théorème précédent (**258**) est vraie, c'est-à-dire que, *si une courbe jouit de cette propriété, que le rapport des distances de chacun de ses points à un point et à une droite fixes est constant, ce point sera un foyer, et la droite sera, par conséquent, la directrice correspondante.*

Soient, en effet,

$$my+nx+p=0$$

l'équation de la droite dont il s'agit, (x', y') les coordonnées d'un point quelconque de la courbe proposée; la distance de ce point à cette droite sera donnée par la formule

$$\frac{my'+nx'+p}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Mais, par hypothèse, le rapport des distances du point (x', y') au point fixe et à la droite fixe doit être une quantité constante k; donc la première de ces distances aura pour expression

$$\frac{k(my'+nx'+p)}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

donc elle est une fonction rationnelle, entière et du premier degré des coordonnées d'un point quelconque de la courbe; donc le point fixe est un foyer (**257**).

261. *Quelles sont les courbes qui ont un foyer?* La réponse à cette question est fournie par la solution du problème du n° **78**. Il en résulte qu'*il n'y a que les courbes du second ordre qui puissent avoir un foyer, et qu'elles en ont toutes.* En effet, l'équation

$$n^2y^2+(n^2-m^2)x^2-2mnpx=0 \qquad [6]$$

que nous avons trouvée représentera une ellipse, une hyper-

bole ou une parabole, suivant que le rapport $\frac{m}{n}$ sera plus petit que 1, plus grand que 1, ou égal à 1 *.

262. Problème. *Exprimer qu'une courbe du second ordre dont l'équation renferme un ou plusieurs coefficients indéterminés a 1° pour foyer un point donné; 2° pour directrice une droite donnée; 3° que le rapport des distances de chacun de ses points au foyer et à la directrice est une quantité donnée.*

1° Soient (α, β) les coordonnées du point qui doit être un foyer : l'expression de la distance de ce point à un point quelconque (x, y) de la courbe aura pour expression $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$; et, comme cette fonction doit être rationnelle, entière et du premier degré par rapport à x et à y, elle est équivalente à une expression de la forme $(my+nx+p)$; de sorte qu'on a

$$\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}=my+nx+p \quad [7].$$

Mais cette équation a lieu entre les coordonnées d'un point quelconque de la courbe que l'on considère; donc elle n'est autre chose que son équation. Cette équation est fréquemment employée dans les questions où l'on a à considérer le foyer, la directrice ou les axes, et on la nomme *l'équation* Focale *des courbes du second ordre.*

Cela posé, soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad [8]$$

l'équation de la courbe proposée, il faudra qu'en donnant des valeurs convenables aux indéterminées, on puisse rendre identiques les équations [7] et [8]; en conséquence, on développera l'équation [7], on divisera tous ses termes par le

---

* Pour que l'équation [6] représente un cercle, il faut que $\frac{m}{n}=0$, ce qui exige que p soit infini, sans quoi cette équation se réduirait alors à $x^2+y^2=0$, et en désignant par r la valeur vers laquelle tend le produit $\frac{mp}{n}$ lorsque $\frac{m}{n}$ tend vers zéro et p vers l'infini, l'équation se réduit à

$$y^2+x^2-2rx=0.$$

Ainsi *le cercle a son centre pour foyer; mais la directrice est située à l'infini*; car alors les valeurs de FO et de AO se réduisent respectivement à r et à l'infini.

Fig. 28.

dernier; on fera la même opération sur l'équation [8]; et, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x et de y dans les deux équations résultantes, on formera les cinq équations de condition

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1-m^2}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{A}{F}, \quad -\frac{2mn}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{B}{F}, \quad \frac{1-n^2}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{C}{F}, \\ -\frac{2(\beta+mp)}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{D}{F}, \quad -\frac{2(\alpha+np)}{\alpha^2+\beta^2-p^2}=\frac{E}{F}\end{array}\right\} [9].$$

On éliminera m, n, p entre ces cinq équations, et on obtiendra ainsi deux équations de condition entre les coefficients indéterminés de [8]; si donc le nombre de ces coefficients est plus grand que deux, il existe une infinité de courbes du second ordre qui auront pour foyer le point donné.

Remarquons que, *donner un foyer d'une courbe, c'est assujettir ses coefficients à deux conditions.*

2° Si c'est la directrice qui est donnée, les rapports $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{m}$ seront connus; et, en éliminant α, β et m des équations [9], on obtiendra encore deux équations de condition entre les coefficients indéterminés de l'équation [8].

La connaissance de la directrice, comme celle d'un foyer, *équivaut donc à celle de deux points ordinaires.*

Par conséquent, si l'on donne le foyer et la directrice, il ne devra plus y avoir dans l'équation [8] qu'un seul coefficient dont on puisse disposer arbitrairement.

3° Si le rapport des distances de chaque point de la courbe au foyer et à la directriee est une quantité donnée k, on posera

$$m^2+n^2=k^2,$$

et, en éliminant m, n, p, α et β entre cette équation et les cinq équations [9], on obtiendra une équation de condition entre les coefficients de [8].

On tire des trois premières des équations [9],

$$B^2-4AC=\frac{4F^2}{(\alpha^2+\beta^2-p^2)^2}\cdot(m^2+n^2-1),$$

de sorte que l'équation [7] représentera une ellipse, une

hyperbole ou une parabole, selon que l'on aura

$$m^2+n^2<1,\quad >1,\quad \text{ou}\quad =1.$$

Ceci s'accorde avec ce que nous avons vu aux n°s **261** et **78**.

263. Il convient de nous occuper actuellement de la détermination des foyers de chacune des courbes du second ordre; et, en raisonnant comme nous l'avons fait dans le problème précédent, nous serons conduits à tirer des équations [9] les valeurs des quantités β, α, m, n et p.

Nous n'entrerons pas dans le détail de ce calcul, que M. *Roguet* a présenté avec beaucoup d'élégance dans le premier volume des *Nouvelles annales de mathématiques*. Nous croyons plus important d'effectuer la recherche des foyers pour chacune des courbes du second ordre en particulier, et en considérant même la forme la plus simple de son équation. Ceci n'altérera d'ailleurs en rien la généralité des résultats auxquels nous parviendrons; car il suit du théorème du n° **258** et de sa réciproque, que, *si on a déterminé les foyers d'une courbe lorsqu'elle est rapportée à un certain système d'axes, ils sont déterminés en même temps pour tout autre système de coordonnées*. D'ailleurs, si on voulait passer du premier système d'axes au second, il suffirait de remplacer dans l'équation [7], où α, β, m, n, p sont des constantes, x et y par leurs valeurs données par les formules de la transformation des coordonnées; et, comme ces valeurs sont des fonctions linéaires des nouvelles coordonnées, le second membre de cette équation resterait toujours une fonction rationnelle, entière et du premier degré des coordonnées d'un point quelconque de la courbe; et le premier exprimerait encore la distance du point $(\alpha,\ \beta)$ à ce même point, de sorte que ce point $(\alpha,\ \beta)$ est encore un foyer.

264. Supposons donc l'ellipse rapportée à ses axes principaux, et convenons, comme de coutume, de compter les abscisses sur le grand axe : son équation sera

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0 \qquad [1].$$

Il faudra donc que l'équation [7] puisse s'identifier avec celle-ci, et que, par conséquent, elle ne renferme pas le rectangle des variables, ce qui exige que m ou n soit nul; donc alors *la distance du foyer à un point quelconque de*

l'ellipse sera une fonction rationnelle de l'une seulement des deux coordonnées de ce point. Cette remarque fournit, pour déterminer les foyers, une méthode plus simple que celle qui résulterait de l'identification des équations [1] et [7]. Désignons, en effet, par δ la distance du foyer (α, β) au point (x, y) de l'ellipse, nous aurons

$$\delta^2=(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 \qquad [10],$$

et il faudra que, quand nous aurons écrit dans cette équation que le point $(x; y)$ appartient à l'ellipse, son second membre soit un carré parfait en x ou en y seulement. *Supposons que δ doive être une fonction rationnelle de* x, nous remplacerons, dans son expression, y par sa valeur tirée de l'équation [1], ce qui donnera

$$\delta^2=\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\beta\right)^2+(x-\alpha)^2;$$

d'où l'on voit que, pour que cette valeur de δ^2 soit le carré d'une fonction rationnelle de x, il faut d'abord que le facteur $\sqrt{a^2-x^2}$ n'y entre pas, et, pour cela, que β soit nul. L'expression de δ^2 devient alors, en développant,

$$\delta^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2\alpha x+(\alpha^2+b^2) \qquad [11].$$

Or, pour que le second membre de cette équation soit un carré parfait, il faut et il suffit que

$$\alpha^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}(\alpha^2+b^2)=0,$$

d'où l'on tire facilement

$$\alpha=\pm\sqrt{a^2-b^2}.$$

On voit, par ces résultats, que l'ellipse a deux foyers situés sur le grand axe et à une distance du centre égale à $\sqrt{a^2-b^2}$: qu'ainsi, pour les construire, il suffira de décrire une circonférence du point B comme centre et avec un rayon égal à a. Les points F et F' où cette circonférence coupera le grand axe seront les deux foyers. Fig. 91.

La distance de chaque foyer au centre se nomme l'*excentricité*; nous la représenterons désormais par c, de sorte que $c=+\sqrt{a^2-b^2}$.

Supposons maintenant que δ doive être une fonction rationnelle de y. Nous observerons que, comme les équations [1] et [10] ne changent pas lorsqu'on y permute à la fois x et y, a et b, α et β, on a le droit de faire ces permutations dans les résultats que nous avons trouvés, ce qui donnera

$$\alpha=0, \quad \beta=\pm\sqrt{b^2-a^2}.$$

Comme cette valeur de β est imaginaire, puisque nous avons supposé $a>b$, on en conclut que l'ellipse n'a pas d'autres foyers que ceux que nous avons construits tout à l'heure.

265. Pour obtenir l'équation de la directrice correspondante à chaque foyer, il faut égaler à zéro l'expression de la distance de chacun d'eux à un point quelconque de l'ellipse (**259**) : en conséquence, nous allons remplacer α par $\pm c$ et (a^2-b^2) par c^2 dans l'équation [11], et nous trouverons

$$\delta=\pm\left(\frac{cx}{a}\mp a\right) \qquad [12],$$

le signe supérieur de la quantité comprise dans la parenthèse se rapportant au foyer positif, et le signe inférieur au foyer négatif. Les équations des directrices seront donc

$$x=\frac{a^2}{c} \quad \text{et} \quad x=-\frac{a^2}{c} \qquad [13].$$

Ainsi, pour construire la première directrice, on décrira du
Fig. 91. point O, comme centre et avec a pour rayon, une circonférence; au point N où elle coupe l'ordonnée correspondante au foyer, on lui mènera une tangente, et, par le point D où cette tangente rencontre le grand axe, on tirera une parallèle RS au petit. Il sera facile d'obtenir ensuite l'autre directrice.

266. La formule [12] donne les distances des deux foyers à un point quelconque de l'ellipse; mais ces distances sont essentiellement positives, et comme c et x sont deux quantités moindres que a, de sorte que $\frac{cx}{a}<a$, on voit qu'il faudra rejeter le signe supérieur ou le signe inférieur qui précède la parenthèse, selon que l'on prendra dans cette

parenthèse le signe supérieur ou le signe inférieur. En appelant donc δ et δ' les distances respectives du foyer positif et du foyer négatif à un même point de l'ellipse, on aura

$$\delta = -\frac{cx}{a} + a, \quad \delta' = +\frac{cx}{a} + a \qquad [14],$$

et, par conséquent, $\delta + \delta' = 2a$.

Nous voilà ainsi conduits à ce théorème remarquable : *La somme des distances de chaque point de l'ellipse aux deux foyers est constante et égale au grand axe.*

267. On tire des formules [13] et [14]

$$\frac{\text{MF}}{\text{MQ}} = \left(a \mp \frac{cx}{a}\right) : \left(\frac{a^2}{c} \mp x\right) = \frac{c}{a}.$$

Donc *le rapport des distances de chaque point de l'ellipse au foyer et à la directrice est égal à celui de l'excentricité au demi-grand axe.*

268. L'ellipse jouit exclusivement de la propriété que nous avons énoncée au n° **266** ; car, si l'on considère deux points quelconques K et K', l'un extérieur et l'autre intérieur à cette courbe, on a évidemment

$$\text{F'K} + \text{KF} > \text{F'M} + \text{MF} = 2a,$$
$$\text{F'K'} + \text{K'F} < \text{F'M} + \text{MF} = 2a.$$

Ainsi, *la somme des distances des deux foyers à un point situé hors de l'ellipse ou dans l'intérieur de cette courbe est plus grande ou plus petite que le grand axe.*

269. Il suit de là que l'*on peut définir l'ellipse une courbe telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes est une quantité constante.* Ces deux points sont les foyers de la courbe, et cette quantité constante est son grand axe.

Cette définition fournit la description la plus simple de l'ellipse, lorsque l'on connaît ses deux foyers et la longueur de son grand axe. En effet, si F et F' sont ces deux points, et que $2a$ soit son grand axe, on portera d'abord sur la droite F'F, à partir de son milieu O, deux distances OA et OA' égales à a, et les points A et A' seront les sommets du grand axe. Puis, des points F et F' comme centres et avec un rayon A'E plus grand que A'F' et plus petit que A'F, on décrira

quatre arcs de cercle de part et d'autre de AA′, et on les coupera ensuite par quatre autres arcs de cercle décrits des mêmes centres et avec le rayon EA égal à l'excès du grand axe sur le premier rayon. Les quatre points M, M′, M″, M‴ ainsi obtenus appartiendront à l'ellipse. En répétant cette construction, on obtiendra, comme on voit, autant de points qu'on voudra de cette courbe, de sorte qu'en unissant tous les points ainsi déterminés par un trait continu, on tracera très-approximativement l'ellipse demandée.

On peut encore *décrire l'ellipse d'un mouvement continu* de la manière suivante : On fixe aux foyers les extrémités d'un fil inextensible dont la longueur est précisément égale au grand axe; on tend ce fil par le moyen d'une pointe à tracer; puis on fait glisser cette pointe de manière que le fil soit toujours tendu, et l'ellipse se trouve tracée quand la pointe a fait une révolution tout entière.

270. Nous allons chercher l'équation de la courbe ainsi décrite. En raisonnant comme au n° **78**, on sera conduit à prendre la droite FF′ pour axe des abscisses et à placer l'origine des coordonnées rectangulaires au milieu O de cette droite. Cela posé, représentons la distance FF′ par $2c$, par $2a$ la somme des distances de chaque point de la courbe aux deux points fixes F et F′, et par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de cette courbe : alors, si l'on appelle δ et δ' les distances FM et F′M, on aura

$$\delta^2=y^2+(x-c)^2,\quad \delta'^2=y^2+(x+c)^2,\quad \delta+\delta'=2a.$$

δ et δ' sont deux quantités qui varient d'un point à un autre de la courbe : si donc on les élimine de ces trois équations, on obtiendra l'équation de cette courbe (**65**). Pour cela, je retranche les deux premières équations membre à membre, ce qui me donne

$$\delta'-\delta=\frac{2cx}{a},$$

partant $\qquad \delta'=a+\frac{cx}{a}$ et $\delta=a-\frac{cx}{a}.$

Il ne reste donc plus, pour obtenir l'équation demandée, qu'à substituer l'une ou l'autre de ces valeurs dans la seconde ou dans la première des équations du problème. On trouvera

facilement que le résultat de cette substitution est

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2-a^2(a^2-c^2)=0.$$

Or, pour que les arcs, qui par leur intersection doivent déterminer le point M, se coupent, il faut que la distance de leurs centres soit moindre que la somme de leurs rayons, c'est-à-dire que l'on ait $2c<\delta+\delta'=2a$ ou $c<a$. Le coefficient de x^2 est donc positif, et le terme indépendant des variables est négatif, de sorte que les conditions analytiques

$$B^2-4AC<0 \quad \text{et} \quad AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)>0,$$

par lesquelles nous avons défini l'ellipse au n° **204**, sont remplies. La définition du n° **269** équivaut donc à celle-ci.

Remarquons que l'équation du lieu montre que $x<a$, sans quoi le premier membre surpasserait le second; et, en effet, la condition $c<a$ n'est pas suffisante pour que les arcs qui déterminent le point M se coupent, il faut encore que l'on ait $2c>\delta'-\delta$, et cette condition revient à $x<a$.

271. Il n'est pas inutile de remarquer encore que, si $c<a$, l'une ou l'autre des deux équations

$$\delta'=a+\frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad \delta=a-\frac{cx}{a},$$

la seconde par exemple, représente tout aussi bien le lieu cherché que l'équation en x et en y, à laquelle nous sommes parvenus; car elle exprime une relation constante entre les cordonnées x et δ d'un point quelconque de ce lieu, x étant l'abscisse de ce point comptée à partir du milieu O de FF', et δ sa distance au foyer F. On fera bien de discuter cette équation $\delta=a-\frac{cx}{a}$, et on verra que l'arc décrit du point F comme centre avec un rayon égal à $\left(a-\frac{cx}{a}\right)$, ne coupera la perpendiculaire correspondante à l'abscisse que l'on considère que si la valeur absolue de x ne surpasse pas a.

272. Les foyers des courbes du second ordre jouissent, à l'égard des tangentes à ces courbes, d'une propriété géométrique de laquelle découle une propriété physique fort remarquable, à laquelle ils doivent leur nom. Voici quel est pour l'ellipse le théorème dont il s'agit :

Les rayons vecteurs tirés des foyers à un point quel

conque de l'ellipse sont également inclinés sur la tangente en ce point.

Fig. 92. Supposons l'ellipse rapportée à ses axes principaux, et désignons par (x', y') les coordonnées d'un point quelconque M de cette courbe. Menons la tangente MT, et tirons FM et F'M. L'angle FMT est évidemment la différence des deux angles T et F, de sorte que

$$\operatorname{tang} \text{FMT} = \frac{\operatorname{tang} \text{T} - \operatorname{tang} \text{F}}{1 + \operatorname{tang} \text{T} \operatorname{tang} \text{F}}.$$

Or, les coefficients angulaires de la tangente MT et de la droite FM qui passe par les deux points (x', y') et $(c, 0)$ sont respectivement (**143** et **117**)

$$\operatorname{tang} \text{T} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}, \quad \operatorname{tang} \text{F} = \frac{y'}{x' - c}:$$

je substitue ces valeurs dans l'équation précédente, et je trouve successivement, en ayant égard aux conditions $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, qui expriment que le point (x', y') appartient à l'ellipse, et que F est un foyer,

$$\operatorname{tang} \text{FMT} = \frac{\dfrac{b^2 x'}{a^2 y'} - \dfrac{y'}{x' - c}}{1 - \dfrac{b^2 x' y'}{a^2 y' (x' - c)}} = \frac{b^2 (cx' - a^2)}{cy' (cx' - a^2)} = \frac{b^2}{cy'}.$$

Maintenant, pour calculer tang F'MT, j'observe que l'angle F'MT est égal à T—F'; qu'ainsi il faudra faire de tang T et de tang F' la même combinaison que nous venons de faire de tang T et de tang F; mais la valeur $\frac{y'}{x' + c}$ de tang F' ne diffère de celle de tang F que par le signe de c; donc la valeur de tang F'MT ne devra non plus différer de celle trouvée pour tang FMT que par le signe de c; donc enfin $\operatorname{tang} \text{F'MT} = -\frac{b^2}{cy'}$. Il suit de là que les angles F'MT et FMT, dont les tangentes sont égales et de signes contraires, sont suppléments l'un de l'autre. Mais l'angle F'MT' est le supplément de F'MT; donc F'MT' = FMT; ce qu'il fallait démontrer.

273. Il suit de là, que *la normale à l'ellipse divise en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons*

vecteurs menés des foyers à un même point de la courbe, et qu'ainsi le PIED N *de la normale est l'harmonique conjugué du* PIED T *de la tangente par rapport aux foyers.*

274. On sait qu'un corps élastique qui vient frapper un plan se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence : donc, si un pareil corps est lancé d'un foyer d'une ellipse, il se réfléchira à l'autre foyer; car, en frappant la courbe, ce sera comme s'il frappait la tangente au point d'incidence. Donc les rayons lumineux, calorifiques ou sonores, qui émaneront de l'un des foyers d'une ellipse, iront tous se concentrer à l'autre foyer.

§ V. Des tangentes.

275. Nous allons nous proposer maintenant de mener une tangente à l'ellipse, et ce problème se présentera sous deux points de vue différents, selon que la courbe sera tracée ou qu'elle sera déterminée par *ses éléments,* c'est-à-dire *par son grand axe et ses foyers.* Chacun de ces deux cas pourra se subdiviser en trois autres; car la tangente demandée sera assujettie à passer par un point donné sur l'ellipse ou hors de l'ellipse, ou à être parallèle à une droite donnée.

1er Cas. *L'ellipse est tracée.*

276. *La tangente doit passer par un point* M *donné sur l'ellipse.* On sait que la tangente menée à l'extrémité Fig. 93.
d'un diamètre est parallèle à ses cordes conjuguées (**189**, 2°); en conséquence, on tracera deux cordes parallèles quelconques, on joindra leurs milieux, et on aura un diamètre AA'; par l'une de ses extrémités on tirera une parallèle A'C au diamètre OM, qui va du milieu de AA' au point donné M, et la supplémentaire CA de A'C sera l'une des cordes que le diamètre OM divise en deux parties égales; de sorte qu'en menant une parallèle à AC par le point M, le problème sera résolu.

Si l'on veut résoudre ce problème par le calcul, on mènera par le milieu O du diamètre A'A une parallèle à la corde MM', ce qui déterminera son conjugué, de sorte qu'en désignant par $2a$ et par $2b$ les longueurs respectives de ces deux dia-

mètres, les équations de l'ellipse et de la tangente au point $M(x', y')$ seront

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

et

$$a^2y'y + b^2x'x - a^2b^2 = 0.$$

Pour déterminer cette droite, il n'y aura qu'à chercher le point où elle coupe l'un des axes des coordonnées, celui des x, par exemple. En conséquence, je fais $y = 0$ dans cette équation, et il en résulte

$$x = \frac{a^2}{x'}.$$

Ainsi la distance du centre au point d'intersection de la tangente avec l'axe des x est une troisième proportionnelle à l'abscisse du point de contact et au demi-diamètre sur lequel on compte les abscisses, de sorte qu'il sera facile de construire ce point. Pour cela, on décrira une demi-circonférence sur A'A comme diamètre, on élèvera au point P une perpendiculaire PD à A'A, et en menant au point D une tangente à la circonférence, on déterminera le pied T de la tangente demandée, de sorte qu'en tirant TM, le problème sera résolu.

277. Si l'on trace la droite M'T, on aura la tangente au point M'. Donc *la droite qui joint le centre de l'ellipse avec le point de concours de deux tangentes passe par le milieu de la corde de contact.*

278. *On appelle* SOUS-TANGENTE *la partie d'un diamètre comprise entre la tangente et l'ordonnée menée par le point*
Fig. 93. *de contact parallèlement à son conjugué* : ainsi PT est la soustangente. Pour en obtenir la valeur, il suffira de retrancher $OP = x'$ de $OT = \frac{a^2}{x'}$, et il viendra

$$PT = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Cette valeur de PT étant indépendante de b et de y', on en conclut que si on décrit une demi-circonférence sur AA' comme diamètre, et qu'au point D de cette circonférence qui se projette orthogonalement en P, on lui mène une tangente, cette droite ira concourir sur le diamètre A'A avec la tangente demandée : on joindra donc le point T où elle coupe

l'axe des x avec le point M, et on obtiendra ainsi la tangente à l'ellipse.

Cette construction n'est pas autre que la précédente (**276**).

279. *La tangente doit passer par un point donné sur le plan de l'ellipse.* Tirons deux cordes parallèles quelconques dont l'une passe par le point donné C; joignons leurs milieux et prenons pour axes des abscisses et des ordonnées le diamètre AA′ ainsi déterminé et son conjugué BB′. Soient (α, β) les coordonnées du point C, (x', y') les coordonnées inconnues du point de contact, $2a$ et $2b$ les longueurs respectives des diamètres conjugués AA′ et BB′ : l'équation de la tangente au point (x', y') sera Fig. 94.

$$a^2y'y + b^2x'x - a^2b^2 = 0 \qquad [15],$$

avec la condition

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 = 0 \qquad [16].$$

Mais la tangente devant passer par le point C, son équation doit être vérifiée par les coordonnées de ce point; donc

$$a^2\beta y' + b^2\alpha x' - a^2b^2 = 0 \qquad [17].$$

Les équations [16] et [17] ne renferment d'inconnues que les coordonnées x' et y' du point de contact; ainsi il suffira, pour avoir l'équation de la tangente, de les résoudre et de substituer les valeurs de x' et de y' que l'on aura trouvées dans l'équation [15]. En éliminant y' entre [16] et [17], on trouvera

$$(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)x'^2 - 2a^2b^2\alpha x' - a^4(\beta^2 - b^2) = 0,$$

d'où

$$x' = \frac{a^2\left(b^2\alpha \pm \beta\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}\right)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Pour obtenir la valeur de y', il suffira de permuter a et b, α et β, dans cette formule, ce qui donnera

$$y' = \frac{b^2\left(a^2\beta \pm \alpha\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}\right)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2};$$

mais, comme ces valeurs de x' et de y' doivent satisfaire à l'équation [16], il faudra que le radical ait des signes con-

traires dans ces valeurs : l'équation de la tangente menée du point (α, β) sera donc

$$\begin{aligned}&[a^2\beta \pm \alpha\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}]y\\ &+[b^2\alpha \mp \beta\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}]x = a^2\beta^2+b^2\alpha^2,\end{aligned}$$

les signes se correspondant dans les coefficients de x et de y.

Or, si le point C est situé sur l'ellipse, on a entre ses coordonnées α et β la relation $a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2=0$; mais s'il se trouve hors de cette courbe, l'une au moins de ces coordonnées est plus grande que la coordonnée correspondante de l'ellipse, donc

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2>0;$$

c'est le contraire si le point C est intérieur à l'ellipse. Ainsi donc si

(α, β) est extérieur à l'ellipse, $a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2>0$;
sur l'ellipse, $a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2=0$;
intérieur à l'ellipse, $a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2<0$.

Par conséquent, dans le premier cas, le problème admettra deux solutions, une seulement dans le second, et il sera impossible dans le troisième*.

L'équation que nous avons trouvée pour la tangente demandée est évidemment trop compliquée pour servir au tracé de cette droite : en conséquence, nous regarderons x' et y' comme des coordonnées courantes, et alors les équations [16] et [17] représenteront deux lignes passant par les points de contact, et qui les détermineront par leur intersection. Or,

---

* M *Terquem*, observant que les points intérieurs à une courbe du second ordre sont les seuls desquels on ne puisse pas lui mener de tangente, en a conclu la méthode suivante pour exprimer qu'un point (α,β) est intérieur à une courbe du second ordre représentée par l'équation $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$: éliminez y entre cette équation et $y-\beta=m(x-\alpha)$, et écrivez que l'équation finale a ses deux racines égales; vous formerez ainsi l'équation qui déterminera le coefficient angulaire m de la tangente issue du point (α,β); donc en exprimant que cette équation en m a ses racines réelles et inégales, réelles et égales ou imaginaires, vous formerez la condition nécessaire et suffisante pour que le point (α, β) soit hors de la courbe, sur cette courbe ou dans son intérieur.

l'équation [16] est toute construite : son lieu est l'ellipse proposée ; quant à l'équation [17], qui revient à

$$a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 = 0 \qquad [18],$$

en supprimant les accents qui sont maintenant inutiles, on voit qu'elle représente une ligne droite : *c'est* donc *l'équation de la* CORDE DE CONTACT *de l'angle circonscrit à l'ellipse qui a pour sommet* (α, β). Pour la construire, nous chercherons les points où elle coupe les axes, en y faisant successivement $y=0$ et $x=0$, et il viendra

$$x = \frac{a^2}{\alpha}, \quad y = \frac{b^2}{\beta}.$$

Ainsi, on obtiendra les points dont il s'agit en cherchant une troisième proportionnelle OD à OP et à OA, et une troisième proportionnelle OE à OG = CP et à OB′; on tirera ensuite DE, et, en joignant le point C avec les points où cette droite rencontrera l'ellipse, on aura les deux tangentes demandées.

Si l'on remarque que la valeur de x est indépendante du conjugué du diamètre $2a$ et de l'ordonnée β du point C, on en conclura que si sur A′A comme diamètre on décrit une circonférence, et que d'un point quelconque N de la perpendiculaire élevée par le point P sur ce diamètre, on lui mène deux tangentes, la corde de contact correspondante ira couper la direction de AA′ au même point que la droite [18]; donc, en menant une tangente à ce cercle par le point où il est coupé par cette perpendiculaire, on déterminera le point D. C'est là la construction même de la troisième proportionnelle à α et à a.

Un raisonnement semblable prouvera qu'on obtiendra le point E, en tirant par G deux tangentes au cercle décrit sur BB′ comme diamètre, et en unissant les points de contact par une ligne droite.

Nous reviendrons plus tard sur les considérations qui nous ont conduits à ces élégantes constructions.

280. La comparaison des équations [15] et [18] montre que *l'équation de la droite qui joint les points de contact de deux tangentes issues d'un point donné s'obtient en cherchant l'équation de la tangente en ce point, comme s'il était sur l'ellipse.*

281. *La tangente doit être parallèle à une droite don-*

Fig. 93. *née*. Tirez deux cordes parallèles à la droite donnée RS, et une seule si cette droite est une sécante : joignez les milieux des deux cordes par une droite indéfinie MQ, et par les points où elle rencontrera l'ellipse menez des parallèles MT, QT' à la droite donnée, et le problème sera résolu (**189**, 2°).

On pourrait résoudre le même problème par le calcul, en traçant préalablement deux diamètres conjugués et en suivant la marche générale que nous avons indiquée au n° **148**. (On s'appuiera sur ce principe évident que, si l'ellipse est rapportée à deux diamètres conjugués $2a$ et $2b$, le produit des coefficients angulaires de deux autres diamètres conjugués est égal à $-\frac{b^2}{a^2}$).

2ᵉ Cas. *L'ellipse est déterminée par son grand axe et ses foyers.*

282. *La tangente doit passer par un point donné sur le plan de l'ellipse.* Supposons le problème résolu, et que,
Fig. 92. C étant le point donné, CT soit la tangente demandée et M le point de contact. Joignons MF et MF' : les angles CMF' et FMT seront égaux (**272**), et la somme des rayons vecteurs F'M et FM sera égale au grand axe $2a$ (**266**). Si donc on prolonge F'M d'une quantité MK=MF, et que l'on joigne FK, la tangente CT sera perpendiculaire sur le milieu de FK, et par conséquent le point C sera équidistant de F et de K; mais ce point K est à une distance de F' égale à $2a$: donc il doit se trouver à l'intersection de deux circonférences décrites des points C et F' comme centres, avec les rayons respectifs CF et $2a$. Si donc ces deux circonférences se coupent, on joindra un de leurs points d'intersection K avec le foyer F, et en abaissant du point donné C une perpendiculaire CT sur cette droite, on aura la tangente demandée. Si de plus on tire F'K, cette droite coupera CT au point de contact.

En effet, il suit de cette construction que MF=MK, qu'ainsi F'M+MF=$2a$; donc le point M appartient à l'ellipse. On verra ensuite que l'angle CMF'=FMT, et que par conséquent CT est une tangente (**272**).

Le problème aura donc autant de solutions que les circonférences que nous avons décrites auront de points communs. Je dis qu'il y aura deux, une ou aucune intersection, selon

que le point C sera situé hors de l'ellipse, sur cette courbe ou dans son intérieur.

Supposons, en effet, que le point C soit extérieur : il faut prouver que la distance F'C des centres est plus petite que la somme des rayons $2a$ et FC, et plus grande que leur différence; mais comme on ignore laquelle des deux droites $2a$ et FC est la plus grande, on devra, pour vérifier cette seconde condition, montrer que chaque rayon est plus petit que la somme faite de la distance des centres et de l'autre rayon. Or, puisque le point C est extérieur à l'ellipse, on a (**268**)

$$F'C + CF > 2a;$$

donc le rayon $2a$ est moindre que la somme du second rayon CF et de la distance des centres. Ensuite on a dans le triangle CF'F,

$$CF < CF' + FF' < CF' + 2a;$$

le rayon CF est donc aussi moindre que la somme de l'autre rayon $2a$ et de la distance des centres. Enfin, ce même triangle CF'F donne

$$CF' < F'F + CF < 2a + CF;$$

donc, la distance des centres est moindre que la somme des rayons; donc, enfin, les deux cercles se coupent en deux points; donc il y a deux solutions.

Si le point C est sur l'ellipse, on a Fig. 95.

$$CF' + CF = 2a, \quad \text{d'où} \quad CF' = 2a - CF;$$

la distance des centres est donc égale à la différence des rayons, de sorte que les deux cercles sont tangents et que le problème n'a plus qu'une solution. Voici donc une seconde manière de résoudre le problème du n° **276**.

Si le point C est intérieur à l'ellipse, on a (**268**)

$$CF' + CF < 2a, \quad \text{d'où} \quad CF' < 2a - CF:$$

la distance des centres est ainsi moindre que la différence des rayons, par conséquent l'une des circonférences enveloppe l'autre, et le problème est impossible.

283. Le cercle est une ellipse dont les foyers coïncident avec le centre (**264**); et comme la construction précédente est indépendante de la valeur de l'excentricité, on pourra,

comme nous l'avons fait dans nos *Leçons de Géométrie* (**139**), l'employer pour mener à un cercle déterminé par son centre et par son rayon une tangente par un point donné sur son plan.

284. Si, dans la figure 92, on joint le centre O au point I où la tangente coupe la droite FK, la droite OI ainsi tracée sera la moitié de F'K, c'est-à-dire de $2a$; mais I est la projection de F sur CT; donc *le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur toutes ses tangentes est la circonférence décrite sur son grand axe comme diamètre.*

285. *La tangente doit être parallèle à une donnée.* En
Fig. 96. raisonnant comme nous l'avons fait au n° **282**, on verra que le point K se trouvera à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de l'un des foyers F sur la droite donnée RS, et de la circonférence décrite de l'autre foyer F' comme centre avec un rayon égal au grand axe, de sorte qu'en élevant une perpendiculaire sur le milieu de FK, on aura la tangente, et en tirant F'K on déterminera le point M de contact. Comme la circonférence coupe la perpendiculaire FG en deux points, il y aura toujours deux solutions.

On prouvera facilement qu'en faisant pour le foyer F' ce qu'on vient de faire pour le foyer F, on n'aurait pas de nouvelles solutions.

286. On peut mettre l'équation de la tangente aux courbes du second ordre sous une forme qui, dispensant de l'accompagner d'une équation de condition, est souvent plus commode dans la résolution des problèmes que l'équation ordinaire de la tangente. Soient

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$$

l'équation de l'ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués, et

$$y=mx+n$$

l'équation d'une droite quelconque : cette droite deviendra tangente à l'ellipse proposée, si nous exprimons que les abscisses des points où elle coupe la courbe sont égales. Eliminons donc y entre leurs équations, et écrivons que l'équation résultante a ses racines égales : nous trouverons

$$a^4m^2n^2-a^2(n^2-b^2)(a^2m^2+b^2)=0, \text{ d'où } n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

Par conséquent

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad [19]$$

est l'équation des deux tangentes dont le coefficient angulaire est m. Ainsi, cette équation détermine la tangente à l'ellipse en fonction de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, et non par les coordonnées du point de contact.

Pour donner un exemple de l'usage de l'équation [19], nous allons *chercher l'équation du lieu des projections des foyers d'une ellipse sur toutes ses tangentes*. Soit

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

l'équation d'une de ces tangentes, rapportée aux axes principaux de la courbe. L'équation de la perpendiculaire abaissée d'un foyer sur cette tangente sera

$$y = -\frac{1}{m}(x - c), \quad \text{avec la condition} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Si donc on élimine m entre ces équations, on aura résolu la question (**65**). Or, on peut les écrire de la manière suivante :

$$(y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2, \quad \text{et} \quad (my + x)^2 = c^2 = a^2 - b^2.$$

En ajoutant ces deux dernières, puis supprimant le facteur commun $(1 + m^2)$, il viendra

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

équation qui démontre le théorème du n° **284**.

§ VI. Des normales.

1er Cas. *L'ellipse est tracée.*

287. *La normale doit passer par un point donné de l'ellipse.* Menez en ce point une tangente MT à l'ellipse, puis par ce même point une perpendiculaire MN à cette tangente. Fig. 92.

288. *La normale doit passer par un point* C *donné sur le plan de l'ellipse.* On cherchera les axes de l'ellipse (**254**) et on les prendra pour axes des coordonnées; puis en désignant par x' et par y' les coordonnées du point M, origine de la normale, et par (α, β) celles du point donné C, on Fig. 97.

verra, en raisonnant comme au n° **279**, que les équations du problème sont

$$c^2xy - a^2\alpha y + b^2\beta x = 0, \quad \text{et} \quad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

On construira donc l'hyperbole équilatère (**209** et **228**, 2°) représentée par la première de ces équations, et, en joignant les points où elle coupera l'ellipse au point C, on aura toutes les solutions du problème. Comme l'hyperbole passe par le centre de l'ellipse, le problème aura toujours deux solutions : il en aura quatre ou trois, selon que l'autre branche coupera cette ellipse ou lui sera tangente.

289. *La normale doit être parallèle à une droite donnée.* Menez une tangente qui soit perpendiculaire à cette droite (**281**), et tirez par le point de contact une perpendiculaire à la tangente ainsi tracée.

2ᵉ Cas. *L'ellipse est déterminée par son grand axe et par ses foyers.*

290. *La normale doit passer par un point donné sur le plan de l'ellipse.* Il n'y aura qu'à résoudre les deux équations du n° **288**, et à joindre le point C avec les points déterminés par les couples de valeurs de x et de y que l'on aura ainsi obtenus, et le problème sera résolu.

Fig. 92. Si le point donné est situé en N sur le grand axe, on fera, dans la première des équations du n° **288**, $\beta = 0$, et on en tirera

$$x = \frac{a^2\alpha}{c^2},$$

valeur qu'il sera facile de construire.

On pourra encore chercher, dans ce cas, l'harmonique conjugué T de N par rapport aux deux foyers F et F', et on aura ainsi le pied de la tangente correspondante à la normale cherchée (**273**).

291. *La normale doit être parallèle à une droite donnée.* On mènera une tangente qui soit perpendiculaire à cette droite, et il sera facile d'achever la solution du problème.

292. Il est évident que la normale coupe le grand axe entre les deux foyers, puisqu'elle partage en deux parties égales l'angle formé par les droites qui joignent son origine avec ces deux points : mais son pied peut-il parcourir tout

l'intervalle compris entre les deux foyers? Pour le savoir, nous allons d'abord calculer la distance de ce pied au centre de l'ellipse, en supposant que l'on ait pris les axes de cette courbe pour ceux des coordonnées : faisons donc $y=0$ dans l'équation

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$$

de la normale au point (x', y'), ce qui donnera

$$\text{ON}=\frac{c^2x'}{a^2}.$$ Fig. 92.

Puis en supposant que l'origine de la normale, située d'abord à l'extrémité du petit axe, décrive un quadran de l'ellipse, on examinera, au moyen de cette formule, comment varie le point N.

Si l'on suppose $x'=0$, on trouve $\text{ON}=0$, et, en effet, la normale devant toujours diviser FF' dans le rapport de MF' à MF, doit passer par le milieu O de FF', quand le point (x', y') est au sommet du petit axe.

x' augmentant, ON augmente; et, en effet, le rayon vecteur F'M augmente, tandis que FM diminue : ainsi le pied de la normale s'approche de F, mais il ne pourra jamais l'atteindre; car la valeur de ON revient à $\frac{c^2}{a}\cdot\frac{x'}{a}$, et on voit ainsi que ON, toujours moindre que $\frac{c^2}{a}$, tend vers cette quantité à mesure que x' tend vers a. Si donc on prend sur le grand axe une distance $\text{OL}=\frac{c^2}{a}$, le point L sera une *limite*, dont le pied de la normale, toujours compris entre O et L, s'approchera indéfiniment à mesure que l'origine (x', y') de cette normale s'approchera elle-même indéfiniment du sommet A.

293. *On appelle* SOUS-NORMALE *la partie d'un diamètre comprise entre la normale et la parallèle menée par l'origine de cette droite au conjugué de ce diamètre.*

Il est facile de voir que, si l'on compte la sous-normale sur l'axe des y, elle est égale à la valeur absolue que prend la quantité $y'-y$, lorsque dans l'équation de la normale on fait $x=0$; ainsi, on tirera facilement les valeurs de la sous-normale de l'équation Fig. 93.

$$y-y'=\frac{b^2x'\cos\theta-a^2y'}{a^2y'\cos\theta-b^2x'}(x-x') \qquad [20]$$

qui représente la normale au point (x', y') par rapport à un système de diamètres conjugués (**149**).

Si l'ellipse est rapportée à ses axes principaux, $\cos\theta = 0$, et ces valeurs se réduisent à

Fig. 92.
$$QR = \frac{a^2 y'}{b^2}, \qquad PN = \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

294. Théorème. *Si, par un point d'une ellipse, on lui mène une normale, le produit des segments faits sur cette droite par le diamètre qui lui est perpendiculaire et par l'un des axes, est égal au carré de la moitié de l'autre axe.*

Soit OI′ le diamètre perpendiculaire à la normale MNR : je dis que l'on aura

$$MI'.MR = a^2.$$

En effet, l'équation du diamètre OI′, parallèle à la tangente au point $M(x', y')$, est

$$a^2 y' y + b^2 x' x = 0,$$

et, par conséquent, puisque les coordonnées sont rectangulaires, l'expression de la perpendiculaire MI′ abaissée du point M sur ce diamètre, est

$$MI' = \frac{a^2 y'^2 + b^2 x'^2}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}.$$

La considération du triangle rectangle RMQ nous donne ensuite (**293**)

$$MR = \sqrt{x'^2 + \frac{a^4 y'^2}{b^4}} = \frac{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}{b^2} :$$

donc
$$MI'.MR = a^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

295. Problème. *Étant donnés deux diamètres conjugués de grandeur et de position, construire les axes.*

Fig. 98. Soient $M'M = 2a'$ et $SS' = 2b'$ les diamètres conjugués donnés, θ leur angle MOS′, $2a$ et $2b$ les longueurs des axes cherchés, et A′A, B′B leurs directions : nous aurons, d'après les théorèmes d'*Apollonius*,

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 \quad \text{et} \quad ab = a'b' \sin\theta.$$

En combinant le double de cette seconde équation successi-

vement par addition et par soustraction avec la première, on trouvera

$$a+b=\sqrt{a'^2+b'^2+2a'b'\sin\theta}$$

et

$$a-b=\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\sin\theta};$$

ou, en observant que $\sin\theta=-\cos(90^\circ+\theta)$ et que $\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$,

$$a+b=\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\cos(90^\circ+\theta)}$$

et

$$a-b=\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\cos(90^\circ-\theta)}.$$

Ainsi $(a+b)$ est le troisième côté d'un triangle dont a' et b' sont les deux autres côtés, et $(90^\circ+\theta)$ l'angle qu'ils comprennent. De même $(a-b)$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés a' et b' comprennent l'angle $(90^\circ-\theta)$.

En conséquence, on abaissera du point M une perpendiculaire indéfinie sur SS'; l'angle OMF' extérieur au triangle OMI sera égal à $(90^\circ+\theta)$, et l'angle OMI vaudra $(90^\circ-\theta)$; si donc on prend les deux distances MF et MF' égales à b', et qu'on joigne OF' et OF, la première de ces droites sera égale à $(a+b)$ et la seconde à $(a-b)$, de sorte que leur somme F'G sera égale au grand axe, et leur différence F'K sera égale au petit.

Maintenant, si l'on décrit une ellipse qui passe par le centre O de l'ellipse proposée, et qui ait pour foyers les deux points F et F', il est clair que son grand axe sera égal à $2a$, c'est-à-dire à celui de l'ellipse que l'on considère. Or, je dis qu'elle sera tangente au petit axe de cette ellipse. En effet, en vertu du théorème du n° **294**, on a $\text{MI}\,.\,\text{MR}=a^2$, d'où $\text{MR}=\frac{a^2}{\text{MI}}$; mais MI est l'abscisse du point O de la seconde ellipse, comptée sur son grand axe et à partir de son centre M; donc R est le pied de la tangente au point O (**276**); donc BB' est cette tangente *; donc OA est une normale à la seconde ellipse; donc elle divise l'angle F'OF en deux par-

---

* De là cet élégant théorème de M. *Chasles*, à qui l'on doit la construction que nous allons indiquer : *Si en un point quelconque d'une ellipse, on mène une normale, et qu'après avoir pris sur cette droite deux segments égaux à la moitié du conjugué du diamètre qui va au point dont*

ties égales. Ainsi, pour déterminer la direction du grand axe de l'ellipse cherchée, il suffira de tirer la bissectrice de l'angle F'OF.

Donc, *pour déterminer les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués de grandeur et de position, par l'extrémité* M *d'un des diamètres donnés on mènera une perpendiculaire à l'autre ; on portera sur*
Fig. 99. *cette droite, à partir du point* M, *deux longueurs égales à la moitié de ce second diamètre ; on joindra les extrémités de ces deux segments au centre de la courbe : la somme de ces deux droites sera égale au grand axe, et leur différence donnera le petit axe. Enfin, on divisera en deux parties égales l'angle formé par ces deux mêmes droites, ainsi que son supplément, et les bissectrices ainsi obtenues seront les directions respectives du grand et du petit axe.*

§ VII. De l'aire de l'ellipse.

Fig. 100 **296.** Proposons-nous d'abord d'*évaluer l'aire d'un segment elliptique compris entre un diamètre et deux ordonnées* BC *et* GI *parallèles à son conjugué.* Pour y parvenir, je suppose que l'on ait partagé la base BI de ce segment en un certain nombre de parties égales, que l'on ait mené les ordonnées correspondantes MD, LE, KF, ... et tiré les cordes CD, DE, EF, ... On aura ainsi formé un polygone BCDEF....GI dont l'aire différera d'autant moins de celle du segment elliptique que le nombre des divisions de BI sera plus grand ; de sorte que la limite vers laquelle tend l'aire du segment polygonal BCDE....GI, lorsque le nombre des parties dans lesquelles on a divisé BI croît indéfiniment, est l'aire même du segment elliptique BCEGI *.

---

il s'agit, on décrive une ellipse qui passe par le centre de la première et ait pour foyers les deux points qu'on a marqués sur la normale, cette ellipse aura le même grand axe que la première et sera tangente à son petit axe.

Fig. 101 * Soit AB un arc de courbe rapporté à deux axes faisant entre eux un angle quelconque θ, et supposons que les ordonnées de ses différents points aillent en croissant depuis AC jusqu'à BD. Je partage CD en un nombre n de parties égales ou inégales, mais qui tendront toutes vers zéro lorsque n croîtra au delà de toute limite, je mène les ordonnées C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3,.... $C_{n-1}A_{n-1}$, et je tire par les points A, A_1, A_2,...A_{n-1}

Je décris un demi-cercle sur AA', comme diamètre, puis je mène par les points I, K, L, M, B des perpendiculaires à AA', et je joins chacun des points C', D', E', F', G' avec le suivant. Maintenant, j'abaisse du point B la perpendiculaire BQ sur MD; on aura évidemment $BQ = BM \sin\theta$, en appelant θ l'angle que le diamètre A'A fait avec son conjugué; donc

$$\left.\begin{array}{l} BD = \frac{BC + MD}{2} \cdot BM \sin\theta; \\ BD' = \frac{BC' + MD'}{2} \cdot BM; \end{array}\right\} \text{ donc } \frac{BD}{BD'} = \frac{BC + MD}{BC' + MD'} \cdot \sin\theta.$$

Mais, en vertu du théorème du n° **241**, on a

$$BC : BC' :: MD : MD' :: b' : a',$$

en désignant par $2a'$ et par $2b'$ le diamètre A'A et son conjugué; on tire de là

$$\frac{BC + MD}{BC' + MD'} = \frac{b'}{a'}, \quad \text{partant} \quad \frac{BD}{BD'} = \frac{b'}{a'} \sin\theta.$$

---

des parallèles à OX terminées chacune aux deux ordonnées qui précèdent et qui suivent. Je formerai ainsi deux séries de parallélogrammes C_1A, C_2A_1, C_3A_2,.... DA_{n-1} et CA_1, C_1A_2, C_2A_3,.... $C_{n-1}B$, les uns intérieurs et les autres extérieurs au segment curviligne CABD. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$, les intervalles CC_1, C_1C_2, C_2C_3,... $C_{n-1}D$, et $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ et b les ordonnées des points A, A_1, A_2,....A_{n-1}, B. La différence des deux parallélogrammes CA_1 et AC_1 sera $\varepsilon_1(a_1 - a)\sin\theta$, de sorte que l'excès de la somme des parallélogrammes extérieurs sur celle des parallélogrammes intérieurs aura pour expression

$$\{\varepsilon_1(a_1 - a) + \varepsilon_2(a_2 - a_1) + \varepsilon_3(a_3 - a_2) + \ldots + \varepsilon_n(b - a_{n-1})\} \sin\theta;$$

mais, si l'on désigne par E la plus grande des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$, cette différence sera évidemment moindre que

$$E(a_1 - a + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \ldots + b - a_{n-1}) \sin\theta = E(b - a)\sin\theta,$$

quantité qui tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment; donc la limite commune de la somme des aires des parallélogrammes intérieurs et de la somme des aires des parallélogrammes extérieurs est l'aire curviligne CABD. Donc aussi cette aire est la limite de celle du segment polygonal CAA_1A_2....BD.

Si l'on considère maintenant le segment curviligne LMNBAC, on mènera par ceux de ses points N, B.... qui sont les plus près et les plus loin de OX des parallèles NP, BD,... à l'axe des y, et le théorème que nous venons d'établir sera vrai pour chacun des segments curvilignes CABD, PNBD, LMNP, et par conséquent pour le segment total LMNBAC.

Ainsi, le rapport de l'un quelconque des trapèzes intérieurs à l'ellipse au trapèze correspondant du cercle est constant : on a donc cette suite de rapports égaux

$$BD : BD' :: ME : ME' :: LF : LF' :: KG : KG' :: b' \sin\theta : a';$$

et par suite
$$\frac{BCDEFGI}{BC'D'E'F'G'I} = \frac{b'}{a'} \sin\theta,$$

d'où
$$BCDEFGI = \frac{b' \sin\theta}{a'} . BC'D'E'F'G'I.$$

Or, cette équation est vraie, quel que soit le nombre des parties dans lesquelles on a divisé BI ; donc les limites de ses deux membres sont égales : mais ces limites sont les aires S et S' des segments elliptique et circulaire BCGI et BC'G'I ; donc on aura

$$S = \frac{b'}{a'} S' \sin\theta,$$

formule qui fait dépendre la quadrature du segment elliptique de celle du segment circulaire, laquelle est donnée par la Géométrie élémentaire.

Si l'on suppose que la base du segment elliptique soit le diamètre A'A, l'aire de ce segment sera la moitié de celle E de l'ellipse, et S' sera alors égale à $\frac{1}{2}\pi a'^2$; donc on aura

$$E = \pi a' b' \sin\theta;$$

ce qui nous apprend que *l'aire de l'ellipse est égale au produit du rapport de la circonférence au diamètre multiplié par l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués quelconques, ou par le rectangle des demi-axes.*

On peut dire aussi que *l'aire de l'ellipse est égale à celle d'un cercle dont le diamètre serait une moyenne proportionnelle entre les axes de cette ellipse.*

297. PROBLÈME. *Évaluer l'aire d'un secteur elliptique.*

Fig. 102 Soit AOB le secteur dont on demande l'aire ; je mène par le point B une ordonnée BC parallèle au conjugué du diamètre A'A, puis par le pied C de cette ordonnée j'élève la perpendiculaire CB' au diamètre AA' jusqu'à la rencontre de la circonférence décrite sur AA', et je joins OB'. On aura

$$ADBC : AD'B'C :: b' \sin\theta : a';$$

mais la comparaison des triangles OBC, OB'C donne pareillement (241)

$$OBC : OB'C :: BC \sin\theta : B'C :: b' \sin\theta : a';$$

donc
$$AOB : AOB' :: b' \sin\theta : a',$$

d'où
$$AOB = AOB' \cdot \frac{b'}{a'} \sin\theta;$$

mais
$$AOB' = \frac{1}{2} \text{arc}\, AB' \cdot a';$$

donc
$$AOB = \frac{1}{2} \text{arc}\, AB' \cdot b' \sin\theta.$$

Or, si l'on désigne par α l'abscisse OC du point B, on a $\alpha = a' \cos AOB'$, et, par conséquent, la longueur de l'arc AB' a pour expression $a' \cdot \text{arc}\cos = \frac{\alpha}{a'}$; donc enfin

$$AOB = \frac{1}{2} a'b' \sin\theta . \text{arc}\cos = \frac{\alpha}{a'}.$$

§ VIII. Applications.

298. Problème. *Décrire une ellipse dont on connaît un foyer et trois points.*

Soient F le foyer et M, M', M'' les trois points donnés : l'inconnue de la question est évidemment la directrice. Supposons que RS soit cette droite. Si des points M et M' on abaisse sur cette directrice les perpendiculaires MQ et M'Q', que l'on joigne MF et qu'on tire M'F' parallèle à MF et égale à M'F, il suit d'un théorème connu de Géométrie *, que les trois droites QQ', FF' et MM' iront concourir; donc le point d'intersection N'' des droites MM' et FF' déterminera un point de la directrice. En faisant usage du troisième point M'', on obtiendra un second point N' de cette droite, et on pourra par conséquent la tracer. Alors, si l'on abaisse de F une perpendiculaire sur RS, on aura la direction du grand axe de l'ellipse, et on obtiendra les sommets en cherchant sur sa direction deux points Fig. 103

---

* *Si deux angles ont leurs côtés proportionnels, parallèles et dirigés dans le même sens ou dans des sens contraires, les droites qui joignent les extrémités des côtés homologues vont concourir sur la droite qui joint leurs sommets.* (Leçons de Géométrie.)

dont les distances à F et à D soient proportionnelles aux distances du point M à F et à RS. Pour cela, on abaissera MQ perpendiculairement sur RS, on prendra MI=MI'=MF, on joindra le point M avec les points S et R où IF et I'F couperont la directrice, ce qui déterminera les deux sommets A et A'. Il sera alors facile d'avoir le centre et l'autre foyer. Le problème n'a qu'une seule solution; car, en combinant les points M'' et M', on trouverait un troisième point N qui serait en ligne droite avec N' et N'' *.

299. Si l'*on demande l'équation de la courbe dont* F *est le foyer, et qui passe par les trois points* M, M', M'', on prendra ce foyer pour origine des coordonnées rectangulaires, et alors l'équation de cette courbe pourra être mise sous la forme (**262**).

$$x^2+y^2=(my+nx+p)^2 \qquad [21].$$

Appelons ρ', ρ'', ρ''' les distances du foyer F aux trois points donnés, et (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les coordonnées respectives de ces trois points, nous aurons donc, pour exprimer que l'ellipse passe par M, M' et M'', les trois équations de condition

$$\left.\begin{aligned} \pm\rho' &= my' + nx' + p,\\ \pm\rho'' &= my'' + nx'' + p,\\ \pm\rho''' &= my''' + nx''' + p, \end{aligned}\right\} \qquad [22],$$

dans lesquelles les signes se correspondent. En effet, la quantité $(my'+nx'+p)$ est positive ou négative, suivant que le

* En effet, la similitude des triangles N''MF et N''M'F' donne la proportion

$$\text{MF} : \text{M'F'} :: \text{N''M} : \text{N''M'}.$$

De la comparaison des triangles N'MF et N'M''F'', et NM'F et NM''F₁, on tire pareillement

$$\text{M''F''} : \text{MF} :: \text{N'M''} : \text{N'M},$$
$$\text{M'F} : \text{M''F}_1 :: \text{NM'} : \text{NM''};$$

en multipliant ces trois proportions par ordre, il viendra

$$\text{N''M} . \text{N'M''} . \text{NM'} = \text{N''M'} . \text{N'M} . \text{NM''},$$

équation qui, d'après un théorème connu de la théorie des transversales, prouve que les trois points N, N', N'' sont en ligne droite. (Leçons de Géométrie, **288**.)

point (x', y') est au-dessus ou au-dessous de la directrice par rapport à l'axe des x (**128**). Or, les trois points M, M', M'' sont d'un même côté de cette droite, donc les seconds membres de nos trois équations sont positifs ou négatifs en même temps; donc il faudra prendre à la fois dans le premier membre de chacune le signe supérieur ou le signe inférieur. Mais, quand on aura résolu le système des trois équations [22] en supposant que leurs premiers membres aient le signe $+$, il suffira, pour avoir les valeurs de m, n et p relatives à l'autre signe, de remplacer, dans les formules trouvées, ρ', ρ'' et ρ''' par $-\rho'$, $-\rho''$ et $-\rho'''$, et on aura des valeurs qui ne différeront des premières que par les signes (cela résulte de la règle de *Cramer* donnée dans l'*Algèbre* (**140**) pour construire les formules qui servent à résoudre un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues), de sorte qu'en substituant ces doubles valeurs dans [21], on ne trouvera qu'une seule équation.

300. PROBLÈME. *Décrire une ellipse dont on connaît la directrice et trois points.*

Abaissons des trois points donnés M, M', M'' des perpendiculaires MQ, M'Q', M''Q'' sur la directrice RS, et on obtiendra le foyer en cherchant un point dont les distances aux trois sommets du triangle MM'M'' soient proportionnelles aux trois droites MQ, M'Q', M''Q'', problème dont nous avons donné la solution dans nos *Leçons de Géométrie* (**222**). Pour le résoudre, on prendra $MQ_1 = MQ$, on joindra le point Q_1 avec les points Q' et Q'', et on prolongera MM' et MM'' jusqu'à leur rencontre avec la directrice; enfin, on décrira deux circonférences sur H''K'' et sur H'K' comme diamètres, et leurs points d'intersection seront chacun un foyer. Si donc ces points sont d'un même côté de la directrice, il y aura deux solutions; une seule, si ces points sont situés de part et d'autre de la directrice, ou si les deux circonférences sont tangentes, et aucune si elles ne se rencontrent pas. Fig. 104

La recherche de l'équation de la courbe ne saurait présenter d'autre difficulté que celle de la longueur du calcul.

301. PROBLÈMES. I. *Décrire une ellipse dont on connaît le foyer, un sommet et un point.* — L'inconnue est la directrice. — *Trouver l'équation de cette ellipse.*

II. *Décrire une ellipse qui ait pour foyer un point donne, touche une droite donnée en un point déterminé, et passe en*

outre par un autre point donné. — L'inconnue est la directrice, et on se fonde sur ce principe, savoir : que *la tangente en un point donné d'une ellipse et la perpendiculaire élevée par le foyer sur le rayon vecteur mené de ce foyer au point de contact, concourent sur la directrice.*

III. *Démontrer par des considérations purement géométriques que les diagonales de tout parallélogramme circonscrit à une ellipse forment un système de diamètres conjugués.*

IV. *Inscrire dans une ellipse un rectangle équivalent à un carré donné. — Discussion. — Dans quel cas le rectangle inscrit sera-t-il maximum?*

V. Démontrer que *le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est égal au carré du petit axe.*

VI. *Démontrer que le produit des parties d'une tangente comprises entre le point de contact et les axes est égal au carré de la moitié du conjugué du diamètre qui passe par ce point de contact. — Le même théorème est vrai pour la normale.*

CHAPITRE XII.

THÉORIE DE L'HYPERBOLE.

§ I. Construction de l'hyperbole.

302. Nous avons vu que l'équation générale des hyperboles pouvait toujours être ramenée à

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0 \qquad [1],$$

dans laquelle $2a$ et $2b$ représentent les longueurs des diamètres conjugués, sur les directions desquels on compte respectivement les abscisses et les ordonnées. Le premier rencontre la courbe, mais le second ne la rencontre pas.

L'équation [1] fournit, pour construire l'hyperbole, une méthode analogue à celle que nous avons donnée au n° **238**, lorsque l'on connaît deux diamètres conjugués de grandeur et de position. En effet, si on résout cette équation par rapport à x (la construction serait un peu moins simple en résolvant l'équation [1] par rapport à y), il viendra

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}, \quad \text{d'où} \quad b : a :: \sqrt{y^2+b^2} : x;$$

ainsi l'abscisse d'un point quelconque est une quatrième proportionnelle à b, a et $\sqrt{y^2+b^2}$. Supposons donc que $A'A = 2a$ soit le diamètre transverse et $B'B = 2b$ son conjugué non transverse. J'élève au point O sur BB' une perpendiculaire OB_1 égale à b, et si je joins un point quelconque Q de BB' avec B_1, la distance QB_1 sera égale à $\sqrt{y^2+b^2}$. Je prends ensuite $OB_1A_1 = OA$, et par le point A_1 je mène à BB' une parallèle qui coupe la droite QB_1 au point m, et Qm est la quatrième proportionnelle demandée aux droites b, a et $\sqrt{y^2+b^2}$, de sorte qu'en reportant cette distance Qm de Q en M et en M' sur une parallèle menée par le point Q à A'A, les points M et M' ainsi déterminés seront les points de l'hyperbole qui ont OQ pour ordonnée. Fig. 105

Si les diamètres conjugués sont rectangulaires, la construction se simplifie, parce que le point B_1 se trouve alors sur A'A. Fig. 106

Fig. 105 et 106. Si l'on reporte la distance QB_1 de Q en N et en N' sur la parallèle menée par Q à A'A, le lieu des points ainsi déterminés aura pour équation

$$x = \sqrt{y^2 + b^2}, \quad \text{ou} \quad y^2 - x^2 = -b^2.$$

C'est donc une hyperbole équilatère dont deux diamètres conjugués sont égaux à b (**228**, 3°), et forment un angle égal à BOA (fig. 105), ou dont les axes sont égaux à b (fig. 106). Ainsi, *pour construire une hyperbole équilatère dont les axes principaux sont donnés, on mènera par tous les points de l'axe imaginaire des parallèles au premier, et en rapportant sur chacune la distance du point par lequel elle est menée aux sommets, on aura un point de chaque branche.*

303. Si l'on veut construire les asymptotes de l'hyperbole représentée par l'équation [1], on se rappellera qu'on a trouvé (**165**) qu'elles avaient pour équation

$$y = \pm \frac{b}{a} x;$$

de sorte que pour les tracer il suffira de mener par l'extrémité A du diamètre A'A une parallèle à son conjugué, de prendre sur cette parallèle les deux distances AG et AG' égales à la moitié de ce conjugué, et de tirer par le centre O les droites indéfinies OG et OG'.

Les asymptotes sont donc les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques. On voit encore que la droite GG' étant une tangente au point A (**189**, 2°), *la portion de la tangente comprise entre les asymptotes est égale au conjugué du diamètre qui va au point de contact, et qu'elle est divisée par ce point en deux parties égales.*

304. La comparaison des deux hyperboles de la fig. 105 donne la proportion

$$QN : QM :: b : a;$$

d'un autre côté, on tire facilement des équations de ces hyperboles

$$y_1 = \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

la proportion $\qquad y_1 : y :: a : b$:

donc *si l'on décrit une hyperbole équilatère qui ait un*

même diamètre transverse ou non transverse qu'une hyperbole ordinaire, les ordonnées de ces deux hyperboles comptées parallèlement au conjugué de leur diamètre commun, seront proportionnelles à ce diamètre commun et à son conjugué.

305. Remarquons que *l'axe transverse d'une hyperbole est le plus petit de tous les diamètres réels;* car, si sur cet axe on décrit une circonférence, elle sera tangente à l'hyperbole en ses deux sommets (**189**, 2°).

306. Nous allons maintenant étudier les propriétés de l'hyperbole; mais nous simplifierons considérablement cette étude par la remarque suivante : c'est que l'on passe de l'équation de l'ellipse rapportée à un système quelconque de diamètres conjugués, à celle de l'hyperbole rapportée à un pareil système d'axes, en y remplaçant $+b^2$ par $-b^2$, ou b par $b\sqrt{-1}$. Ainsi les propriétés de l'ellipse, dans l'expression algébrique desquelles il n'entre que les carrés des diamètres conjugués, s'appliquent à l'hyperbole comme à l'ellipse; mais celles des propriétés de cette courbe où les longueurs des diamètres conjugués ne sont employées qu'au premier degré pourront ne pas avoir de correspondantes dans l'hyperbole. En conséquence nous allons suivre, pour la théorie de l'hyperbole, le même ordre que nous avons suivi pour l'ellipse, en nous bornant à énoncer les propositions qui se déduisent des propriétés correspondantes de l'ellipse, par le seul changement dans leur énoncé de b^2 en $-b^2$.

§ II. Des cordes supplémentaires.

307. *Le produit des tangentes des angles que deux cordes supplémentaires quelconques* font avec l'axe transverse de l'hyperbole est égal au carré du rapport de l'axe non transverse à l'axe transverse, et réciproquement* (**244**).

308. Si l'hyperbole est équilatère $a=b$, et on a

$$\text{tang}\,\alpha\;\text{tang}\,\alpha'=1,$$

en appelant α et α' les inclinaisons des deux cordes supplé-

* On ne considère que des cordes supplémentaires issues des extrémités d'un diamètre transverse.

mentaires que l'on considère sur l'axe transverse; donc les angles α et α' sont complémentaires. C'est la propriété dont jouissent deux cordes supplémentaires du cercle, mais avec cette différence que dans le cercle ces angles ont deux côtés dirigés en sens contraires, et que dans l'hyperbole équilatère ces côtés sont dirigés dans le même sens : aussi dans la première de ces courbes, les cordes supplémentaires forment un angle constant qui est droit, tandis que dans la seconde elles forment un angle variable qui est aigu.

L'hyperbole équilatère est, dans la série des hyperboles ordinaires, ce qu'est le cercle dans la série des ellipses, et ces deux courbes ont ainsi la plus grande analogie. La comparaison des deux théorèmes que nous avons établis aux n^{os} **241** et **304** en fournit un exemple.

309. *On peut toujours mener par les extrémités d'un diamètre transverse quelconque, deux cordes supplémentaires parallèles à celles qui correspondent à tout autre diamètre transverse* (**245**).

310. En changeant b^2 en $-b^2$ dans les calculs du n° **246**, on trouvera

$$\tang\theta = \frac{2ab^2}{(a^2+b^2)y},$$

formule qui nous montre que *l'angle aigu formé par deux cordes supplémentaires dans l'hyperbole peut passer par tous les états de grandeur compris entre* 0° *et* 90°, *de sorte que cet angle n'a pas de limites.* C'est ce que l'on reconnaît synthétiquement en décrivant un cercle sur l'axe transverse, comme diamètre, et en examinant ensuite quelle est la mesure de l'angle formé par deux cordes supplémentaires, issues

Fig. 106 des extrémités de cet axe. Ainsi l'angle A'HA est aigu.

§ III. Des diamètres conjugués.

311. *Pour que deux diamètres soient conjugués, il faut et il suffit qu'ils soient parallèles à deux cordes supplémentaires, ou, en d'autres termes, que le produit des tangentes des angles qu'ils font avec l'axe transverse soit égal à* $\frac{b^2}{a^2}$ (**249** et **250**).

Il n'y a pas, dans l'hyperbole, d'autre système de diamètres conjugués rectangulaires que celui de ses axes (**251**).

312. PROBLÈME. *Une hyperbole et un de ses diamètres CC' étant donnés, trouver son conjugué.* Fig. 107

Tirez deux cordes parallèles quelconques, et en joignant leurs milieux vous déterminerez un diamètre AA'. Menez par A' une corde A'M parallèle à C'C, joignez MA et tirez par le centre une parallèle à MA : ce sera la direction du diamètre demandé DD'. Cette construction vérifie ce que nous avons déjà reconnu (**224**), que *de deux diamètres conjugués d'une hyperbole, l'un ne rencontre pas la courbe, tandis que l'autre la coupe* *. Il reste à trouver la longueur de ce diamètre DD'. Pour cela, je mène une tangente à l'hyperbole au point A, ce qui se fait en tirant par ce point une parallèle aux cordes conjuguées du diamètre A'A; puis je suppose que l'on prenne les deux diamètres CC' et DD' pour les axes des x et des y, et que l'on représente leurs longueurs par $2a$ et $2b$: l'équation de l'hyperbole sera

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0,$$

et, par conséquent, on aura pour l'équation de la tangente AT au point $A(x', y')$

$$a^2y'y-b^2x'x+a^2b^2=0.$$

Cherchons l'ordonnée à l'origine de cette tangente : nous trouverons qu'elle est donnée par l'équation

$$yy'=-b^2;$$

or, $y=\text{OT}$, $y'=\text{AI}=-\text{OK}$; donc $b^2=\text{OT}.\text{OK}$; de sorte qu'on obtiendra b en prenant une moyenne proportionnelle entre OT et OK.

313. PROBLÈME. *Une hyperbole étant donnée, trouver deux diamètres conjugués qui fassent un angle donné* θ.

---

* Cela résulte encore du principe du n° **311**; car, puisqu'on a $\tang\alpha \tang\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$, on voit que des deux quantités $\tang\alpha$ et $\tang\alpha'$ l'une sera plus grande que $\frac{b}{a}$, et l'autre plus petite que $\frac{b}{a}$; donc l'un des diamètres est tracé dans les *angles asymptotiques* GOG' et IOI', et son conjugué est hors de ces angles. Fig. 105

Solution du n° **253**. Observez seulement que le problème est toujours possible et admet deux solutions, si l'angle donné n'est pas droit, parce que l'angle formé par deux cordes supplémentaires, n'ayant pas d'autres limites que zéro et 180°, on pourra toujours tirer par les extrémités de l'axe transverse, et, par conséquent, par celles de tout autre diamètre transverse, deux systèmes de cordes supplémentaires qui fassent entre elles l'angle θ.

314. *Pour trouver les directions des axes d'une hyperbole, on décrira une demi-circonférence sur l'un quelconque* CC'
Fig. 108 *de ses diamètres transverses, on joindra le point* M *où il coupe la courbe aux extrémités de ce diamètre, et il ne s'agira plus que de tirer par le centre des parallèles à ces cordes* (**254**). *On déterminera ensuite la longueur de l'axe imaginaire par la méthode du n°* **312**.

315. On a entre les longueurs $2a'$ et $2b'$ de deux diamètres conjugués, leurs inclinaisons α et α' sur l'axe transverse de l'hyperbole, l'angle θ qu'ils forment entre eux et les longueurs $2a$ et $2b$ des axes, les quatre équations suivantes (**227** et **311**):

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2,\quad a'b'\sin\theta=ab,\quad \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha'=\frac{b^2}{a^2},\quad \alpha'-\alpha=\theta,$$

dont on pourra faire l'usage indiqué au n° **256**.

§ IV. Des foyers.

316. Dans les calculs du n° **264**, changez b^2 en $-b^2$, et vous trouverez, lorsque $m=0$, que

$$\beta=0,\quad \alpha=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

Il suit de ces résultats que l'hyperbole a deux foyers situés
Fig. 109 sur l'axe transverse, à une distance du centre égale à $\sqrt{a^2+b^2}$; qu'ainsi, pour les construire, on élèvera à l'une des extrémités de l'axe transverse une perpendiculaire AG égale à la moitié de l'autre axe; puis du point O comme centre et avec OG pour rayon, on décrira une circonférence de cercle qui coupera A'A en deux points F et F'. Ce seront les foyers. Nous représenterons désormais l'excentricité par c, de sorte que $c=+\sqrt{a^2+b^2}$.

Il n'y a pas d'autres foyers que ces deux points; car

l'hypothèse de $n=0$ conduit à des valeurs imaginaires pour β(**264**).

317. On trouvera, comme au n° **265**, que les distances des foyers à un point quelconque de la courbe sont données par la formule

$$\delta=\pm\left(\frac{cx}{a}\mp a\right),$$

de sorte que les équations des directrices sont respectivement

$$x=\frac{a^2}{c} \quad \text{et} \quad x=-\frac{a^2}{c}.$$

Pour construire la première, nous abaisserons du foyer F la perpendiculaire FR sur l'asympote OG, et en abaissant du point R une perpendiculaire sur A'A, on aura cette première directrice. En effet, le triangle ORF est égal à OAG, comme ayant l'hypoténuse égale et un angle commun; donc $OR=OA=a$, et, par conséquent OD est une troisième proportionnelle à c et à a.

On prendra ensuite $OD'=OD$, on élèvera par le point D' une perpendiculaire à l'axe transverse, et on aura la directrice correspondante au foyer négatif.

318. La formule $\delta=\pm\left(\frac{cx}{a}\mp a\right)$ donne les distances des deux foyers à un point quelconque de la courbe : ces distances sont essentiellement positives; mais c et x sont tous deux plus grands que a, de façon que $\frac{cx}{a}$ est numériquement plus grand que a; donc, si l'on considère un point de la branche positive de l'hyperbole, on devra, dans cette formule, rejeter le signe inférieur qui précède la parenthèse, et ainsi, en appelant δ et δ' les distances des foyers F et F' à un même point de la branche positive, on aura

$$\delta=\frac{cx}{a}-a, \quad \delta'=\frac{cx}{a}+a; \quad \text{d'où} \quad \delta'-\delta=2a.$$

Mais, si l'on considère un point de la branche négative, il faudra, au contraire, rejeter le signe supérieur, et on aura en conséquence

$$\delta=-\frac{cx}{a}+a, \quad \delta'=-\frac{cx}{a}-a, \quad \text{d'où} \quad \delta-\delta'=2a$$

(c est une grandeur absolue). Donc

La différence des distances de chaque point d'une hyperbole aux deux foyers est constante et égale à l'axe transverse.

319. *Le rapport des distances de chaque point de l'hyperbole au foyer et à la directrice est égal à celui de l'excentricité au demi-axe transverse* (**267**), et par conséquent plus grand que l'unité.

320. L'hyperbole jouit exclusivement de la propriété que nous avons énoncée au n° **318**. En effet, considérons deux points L et L', l'un extérieur et l'autre intérieur à l'hyperbole ; joignons chacun de ces points au foyer *dont il est le plus près*, et tirons une ligne droite par le point où cette droite coupe la courbe et par l'autre foyer. Nous aurons évidemment

$$F'L < F'M + ML \quad \text{et} \quad F'L' > F'M - ML';$$

retranchant $FL = FM + ML$ des deux membres de la première de ces inégalités, et FL' des deux membres de la seconde, il viendra

$$F'L - FL < F'M - MF = 2a \quad \text{et} \quad F'L' - FL' > F'M - MF = 2a.$$

Ainsi, *la différence des distances des deux foyers à un point situé hors de l'hyperbole ou dans l'intérieur de cette courbe, est plus petite ou plus grande que l'axe transverse.*

321. Il suit de là, que *l'on peut définir l'hyperbole une courbe telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes est une quantité constante.*

Cette définition fournit la description la plus simple de l'hyperbole, lorsque l'on connaît ses deux foyers et la lon-
Fig. 109 gueur de son axe transverse. En effet, si F et F' sont ces deux points et $2a$ son axe transverse, on portera d'abord sur la droite FF', à partir de son milieu O, deux distances OA et OA' égales à a, et les points A et A' seront les sommets de la courbe. Puis des points F et F', comme centres, avec un rayon quelconque A'E plus grand que A'F', on décrira quatre arcs de cercle de part et d'autre de AA', et on les coupera ensuite par quatre autres arcs de cercle décrits des mêmes centres et avec un rayon AE égal à la somme faite de l'axe transverse AA' et du premier rayon. Les quatre points M, M', M'', M''' ainsi obtenus appartiendront à l'hyperbole. En

répétant cette construction, on obtiendra, comme on voit, autant de points que l'on voudra de cette courbe, de sorte qu'en unissant tous les points ainsi déterminés par un trait continu, on tracera très-approximativement l'hyperbole demandée.

On peut encore *décrire l'hyperbole d'un mouvement continu* de la manière suivante : pour cela, on dispose une règle FL de manière qu'elle puisse tourner autour d'un pivot fixé à l'un des foyers F, par exemple. A l'extrémité L de cette règle et à l'autre foyer F' on attache un fil dont la longueur surpasse celle FL de la règle du premier axe $2a$; on tend ce fil par le moyen d'une pointe à tracer; et enfin on fait glisser cette pointe le long de la règle et de manière que le fil soit toujours tendu; la règle tournera alors autour du foyer F, et la pointe décrira un arc d'hyperbole. En effet, soit M une position de la pointe à tracer; on a par hypothèse $LMF' = FL + 2a$, d'où en retranchant LM de part et d'autre $MF' = FM + 2a$, et par conséquent $F'M - FM = 2a$.

322. En raisonnant comme au n° **270**, on trouvera que l'équation de la courbe décrite par les méthodes que nous venons de donner est

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Or, pour que les arcs qui, par leur intersection, doivent déterminer le point $M(x, y)$ se coupent, il faut que la distance $2c$ de leurs centres soit plus grande que la différence $2a$ de leurs rayons, c'est-à-dire que c soit plus grand que a. Le coefficient de x^2 est donc négatif, et le terme indépendant est positif, de sorte que les conditions analytiques

$$B^2 - 4AC > 0 \quad \text{et} \quad AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC) \gtrless 0,$$

par lesquelles nous avons défini l'hyperbole au n° **208** sont remplies. La définition du n° **321** équivaut donc à celle-ci.

323. En effectuant le calcul qui conduit à l'équation précédente, on trouve pour expression des distances des foyers F et F' à un même point de l'hyperbole

$$\delta = \frac{cx}{a} - a \quad \text{et} \quad \delta' = \frac{cx}{a} + a \qquad [2];$$

mais il n'en est pas ici comme dans l'ellipse (**271**), où les

deux formules correspondantes représentaient également bien la courbe tout entière; les équations ci-dessus ne construisent que la branche positive de l'hyperbole. Cela tient à ce que, si x est négatif, δ l'est aussi, et à ce que le cercle décrit du point F' comme centre avec la valeur de δ' ne coupe plus l'ordonnée correspondante à cette valeur négative de x. Il faudra donc employer, pour déterminer l'hyperbole, l'une des équations [2] et l'une des formules

$$\delta_1 = \frac{cx}{a} + a \quad \text{et} \quad \delta_1 = \frac{cx}{a} - a$$

obtenues en considérant un point de la branche négative; et dans ces dernières les abscisses positives devront être comptées de O vers F'.

324. *La tangente en un point quelconque de l'hyperbole partage en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs tirés des foyers au point de contact;* de sorte que *la normale est l'harmonique conjuguée de la tangente par rapport à ces rayons vecteurs.*

Il n'y a de différence entre cette démonstration et celle du n° 272 qu'en ce que b^2 sera remplacé par $-b^2$, et qu'au lieu d'avoir

Fig. 92 $$\text{FMT} = \text{T} - \text{F} \quad \text{et} \quad \text{F'MT} = \text{T} - \text{F'},$$

Fig. 109 on aura $$\text{FMT} = \text{F} - \text{T} \quad \text{et} \quad \text{F'MT} = \text{T} - \text{F'}.$$

On trouvera donc

$$\text{tang FMT} = \frac{b^2}{cy'} \quad \text{et} \quad \text{tang F'MT} = \frac{b^2}{cy'},$$

ce qui démontre le théorème.

325. Il suit de là que, si l'on place une lumière au foyer F de la surface engendrée en faisant tourner un arc d'hyperbole autour de son axe transverse, tous les rayons lumineux issus de F se réfléchiront à la rencontre de l'*hyperboloïde*, suivant des droites dont les prolongements iront concourir à l'autre foyer F'; les rayons réfléchis seront donc d'autant moins divergents que les foyers F et F' seront plus éloignés. Par conséquent, en construisant un miroir hyperbolique dont les foyers soient situés à une distance assez considérable l'un de l'autre, on pourra éclairer une étendue déterminée à telle distance que l'on voudra.

§ V. Des tangentes.

1er Cas. *L'hyperbole est tracée.*

326. *La tangente doit passer par un point donné de l'hyperbole* (**276**). Fig. 110

327. *La droite qui joint le centre de l'hyperbole au point de concours de deux tangentes passe par le milieu de la corde de contact* (**277**).

328. La formule $x=\frac{a^2}{x'}$ qui détermine la distance du centre de l'hyperbole au point d'intersection de la tangente avec l'axe des x, prouve que ce point, toujours situé hors de la concavité de la courbe, est d'autant plus près du centre que le point de contact est plus éloigné, et, en effet, les asymptotes qui se croisent au centre sont les limites des tangentes.

329. L'expression de la sous-tangente est (**278**)

$$PT=\frac{x'^2-a^2}{x'}.$$

330. *La tangente doit passer par un point donné sur le plan de l'hyperbole.* Solution donnée au n° **279**, en se rappelant la méthode indiquée au n° **312**, pour déterminer la longueur du conjugué d'un diamètre non transverse, et en observant que la construction donnée des quantités Fig. 111

$$x=\frac{a^2}{\alpha} \quad \text{et} \quad y=-\frac{b^2}{\beta}$$

n'étant pas applicable ici, il faudra construire ces valeurs en cherchant directement une troisième proportionnelle aux droites α et a, et une autre aux droites β et b. La fig. **111** représente ces constructions. C est le point donné, AA′ le diamètre qui divise en deux parties égales une corde quelconque menée par C, et OY le conjugué de AA′. On a mené une tangente ND en N, et OG, moyenne proportionnelle entre OD et OE=NP, est la moitié de ce conjugué. $OI=\frac{\overline{OA}^2}{OP}$ et $OK=\frac{\overline{OG}^2}{CP}$, de sorte que IK est la direction de la corde de contact.

331. *La tangente doit être parallèle à une droite donnée.* Faites la même construction qu'au n° **281**. Toute- Fig. 112

fois, il faut observer qu'ici le problème ne sera pas possible, si le diamètre qui joint les milieux des deux cordes parallèles à la droite donnée ne rencontre pas l'hyperbole; mais alors son conjugué, qui est parallèle à cette droite, ira couper la courbe; donc, pour que le problème puisse être résolu, il faut que le diamètre mené parallèlement à la droite donnée ne rencontre pas l'hyperbole, et qu'en conséquence il soit tracé hors des *angles asymptotiques*. Quand il en sera ainsi, le problème aura deux solutions, à moins que la droite donnée ne soit parallèle à une des asymptotes, laquelle sera alors la seule solution du problème.

2ᵉ Cas. *L'hyperbole est déterminée par son axe transverse et ses foyers.*

Fig. 118 **332.** *La tangente doit passer par un point donné sur le plan de l'hyperbole.* En raisonnant comme on l'a fait au nº **282**, on sera conduit à la construction suivante : du point donné C comme centre et avec CF pour rayon décrivez une circonférence que vous couperez par une seconde circonférence décrite du point F′ comme centre et avec un rayon égal à $2a$. Joignez l'un des points d'intersection K avec le foyer F, et la perpendiculaire abaissée de C sur KF sera tangente à la courbe. On déterminera le point M de contact en tirant F′K, et en prolongeant cette droite jusqu'à la rencontre de la tangente. Le problème aura autant de solutions que les deux circonférences auront de points communs.

Si le point C est extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est plus petite que l'axe transverse; ainsi, en le supposant plus près de F que de F′, ce qui est le cas de la figure, on aura

$$CF'-CF<2a\ (320),\quad \text{d'où}\quad CF'<2a+CF.$$

La distance CF′ des centres est donc moindre que la somme des rayons, et, comme nous venons de supposer que le rayon CF est moindre que la distance CF′ des centres, et, à plus forte raison, est moindre que cette distance augmentée de l'autre rayon $2a$, il sera prouvé que les deux circonférences se coupent, si nous démontrons que

$$2a<CF'+CF.$$

Or, le triangle CF'F nous donne

$$F'F < CF' + CF\text{; donc, on a } a\ fortiori\ 2a < CF' + CF\text{;}$$

donc les deux circonférences se coupent, et le problème a deux solutions.

Si le point C est sur l'hyperbole, on a

$$CF' - CF = 2a, \quad \text{d'où} \quad CF' = 2a + CF:$$

la distance des centres se trouve ainsi égale à la somme des rayons, de sorte que les deux circonférences sont tangentes extérieurement. Le problème n'a plus alors qu'une solution. Mais il est impossible, si le point C est intérieur à l'hyperbole; car alors

$$CF' - CF > 2a, \quad \text{d'où} \quad CF' > 2a + CF.$$

La distance des centres est donc plus grande que la somme des rayons, et, par conséquent, les deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre.

333. *Le lieu des projections des foyers d'une hyperbole sur toutes ses tangentes est une circonférence de cercle décrite sur son axe transverse comme diamètre* (**284**).

334. *La tangente doit être parallèle à une droite donnée* (voy. le n° **285**). Fig. 114

Pour que le problème soit possible, il faudra que la circonférence et la droite FC se rencontrent, ce qui exige que la perpendiculaire F'E abaissée de F' sur cette droite FC ne soit pas plus grande que $2a$, ou, ce qui revient au même, que OG ne soit pas plus grand que a, OG étant une parallèle à la droite donnée. Mais, si l'on appelle α l'angle que RS fait avec A'A, et θ le demi-*angle asymptotique,* on a

$$OG = c\cos\alpha \quad \text{et} \quad a = c\cos\theta \ (\mathbf{316});$$

donc, pour que OG ne surpasse pas a, il faut que α ne soit pas moindre que θ, c'est-à-dire que le diamètre parallèle à la droite donnée soit tracé hors de l'angle asymptotique. S'il coïncidait avec une des asymptotes, la droite FC serait tangente à la circonférence au point E, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de FE passant par le centre O se confondrait avec une des asymptotes.

335. L'équation de la tangente à l'hyperbole exprimée

en fonction de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x est (286)

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

§ VI. Des normales.

Répétez ici tout ce qui a été dit aux n^{os} **287**, **288**..., **291**.

336. En raisonnant comme on l'a fait au n° **292**, on verra que, si l'on prend sur l'axe transverse une distance
Fig. 115 $OL = \frac{c^2}{a}$, le point L sera une *limite* dont le pied de la normale, toujours situé à droite de ce point, approchera indéfiniment, à mesure que l'origine (x', y') de cette normale s'approchera elle-même indéfiniment du sommet A, et dont ce pied s'éloignera au contraire au delà de toute distance assignable, lorsque le point (x', y') décrira la branche positive, à partir de A.

§ VII. Propriétés relatives aux asymptotes.

337. Théorème. *Les portions d'une sécante quelconque comprises entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales entre elles.*

Fig. 116 En effet, soient NN' une sécante quelconque terminée aux asymptotes et MM' la corde qu'elle laisse dans l'hyperbole: si nous prenons pour axe des x le diamètre qui divise cette corde en deux parties égales, et son conjugué pour axe des y, les équations de l'hyperbole et de ses asymptotes seront respectivement

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0 \quad \text{et} \quad y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Donc, les ordonnées NP et N'P des asymptotes correspondantes à l'abscisse OP seront égales, et, comme MP=M'P par construction, il s'ensuit que MN=M'N', ce qu'il fallait démontrer.

338. Le théorème précédent offre une méthode très-simple pour *décrire l'hyperbole par points, quand on con-*
Fig. 117 *naît les asymptotes et un point de la courbe.* Soient, en effet, Xx et Yy les deux asymptotes et M le point donné: tirez par ce point une sécante quelconque NMN' terminée à ces droites; prenez N'M' égale à NM, et le point M' appar-

tiendra à la courbe. En répétant cette construction, on trouvera autant de points que l'on voudra.

Il sera bon de ne pas faire passer toutes les sécantes par le point donné M, et de faire servir à cet usage quelques-uns de ceux que l'on aura déterminés. On évitera ainsi la confusion qui résulterait d'un grand nombre de lignes passant par le même point, et les erreurs qu'entraîneraient des sécantes trop obliques sur les asymptotes.

Cherchons l'équation de la courbe ainsi engendrée. Désignons par α et β les coordonnées du point donné M, par rapport aux asymptotes prises pour axes des x et des y, et par x' et y' celles du point M'. Il est clair que, si nous exprimons que P'N' est égal à QM, nous aurons écrit que les triangles N'M'P' et NMQ sont égaux, et qu'ainsi M'N' = MN. Or, l'équation de la sécante NN' est

$$y - y' = \frac{\beta - y'}{\alpha - x'}(x - x'):$$

donc, en y faisant $y = 0$, nous aurons

$$P'N' = x - x' = -\frac{y'(\alpha - x')}{\beta - y'};$$

mais $MQ = \alpha$, donc

$$-\frac{y'(\alpha - x')}{\beta - y'} = \alpha, \quad \text{d'où} \quad x'y' = \alpha\beta,$$

équation qui représente effectivement une hyperbole rapportée à ses asymptotes (**173** et **230**), et qui passe par le point $M(\alpha, \beta)$, comme on devait le prévoir; car on peut toujours mener par le point M une sécante qui soit divisée en ce point en deux parties égales.

339. Soient A le sommet de l'hyperbole et CAC' la tangente en ce point, de sorte que OC est égale à l'excentricité. Si l'on tire par le point A la parallèle AD à l'asymptote Yy, il est clair qu'on aura $OD = DA = \frac{1}{2}OC$; ce qui prouve que *les coordonnées asymptotiques d'un sommet sont égales entre elles et à la moitié de l'excentricité.* Mais, d'un autre côté, la forme même de l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes,

$$xy = m^2,$$

montre que ces coordonnées sont égales à m, de sorte qu'en

prenant une moyenne proportionnelle entre les coordonnées asymptotiques d'un point quelconque, on obtiendra celles d'un sommet de l'hyperbole, et par suite l'excentricité.

340. Ces principes fournissent une solution élégante du problème suivant.

Fig. 118 PROBLÈME. *Deux diamètres conjugués* AA' *et* BB' *d'une hyperbole étant donnés de grandeur et de position, construire les axes.*

Il résulte du n° **303** que les axes d'une hyperbole divisent en deux parties égales les angles que font les asymptotes : en conséquence, sur OA et OB on construira un parallélogramme OBCA ; on prolongera CA d'une quantité C'A égale à CA ; on joindra le centre O aux points C et C' par des droites indéfinies qui seront les asymptotes, et en tirant les bissectrices Xx et Yy des angles formés par ces droites, on aura les directions des deux axes. Si le diamètre A'A est celui qui rencontre la courbe, Xx sera la direction de l'axe réel, et Yy celle de l'axe imaginaire.

Maintenant, pour déterminer les longueurs des axes, je joins AB', de sorte que OD et DA sont les coordonnées asymptotiques du point A de l'hyperbole, puisque AB' est parallèle à OC ; mais DE=OD ; car l'angle DEO, égal à EOK, l'est par conséquent à DOE : si donc je décris une circonférence sur AE comme diamètre, et que je mène par le point D une corde GI perpendiculaire à AE, cette corde sera l'excentricité, parce que sa moitié GD est moyenne proportionnelle entre les coordonnées asymptotiques de A. Il ne reste plus qu'à décrire une circonférence du point O comme centre avec GI pour rayon, ce qui déterminera les foyers F et F', et en joignant les points où elle coupera les directions des asymptotes, on aura les longueurs P'P et Q'Q de ses axes.

341. Nous allons nous proposer de mener une tangente à l'hyperbole, en supposant que cette courbe soit tracée, ainsi que ses asymptotes.

La tangente doit passer par un point donné M *de l'hy-*
Fig. 117 *perbole.* Prenez PT=OP et tirez MT (**303**).

342. *Tangente par un point donné sur le plan de l'hyperbole.* En raisonnant comme au n° **279**, on trouvera

$$\alpha y+\beta x-2m^2=0,$$

pour l'équation de la corde de contact, et on la déterminera en construisant les points

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=\dfrac{2m^2}{\beta} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\dfrac{2m^2}{\alpha} \end{array}\right\},$$

où elle coupe les asymptotes, ce qui est facile, car la détermination de m, qui est l'abscisse d'un sommet (339), est très-simple.

343. Ces valeurs de x et de y manifestent une propriété remarquable, savoir, que les deux tangentes issues du point (α, β) sont menées à une seule branche ou à toutes deux, suivant que ce point est ou n'est pas situé dans l'angle asymptotique; car, dans le premier cas, α et β sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, et il en est de même de x et de y. C'est le contraire dans le second cas.

344. *La tangente doit être parallèle à une droite donnée*. Soient Fig. 119

$$y=kx+n$$

l'équation de la droite donnée RS, et (x', y') les coordonnées inconnues du point de contact; le coefficient angulaire de la tangente en ce point étant $-\dfrac{y'}{x'}$, les équations du problème seront

$$-\frac{y'}{x'}=k \quad \text{et} \quad x'y'=m^2,$$

de sorte que le point de contact sera à l'intersection de l'hyperbole avec la droite

$$y=-kx.$$

Pour construire cette corde de contact, on mènera par le centre une parallèle OP à la droite donnée RS, puis, d'un point quelconque A de OP, on tirera une parallèle AB à l'axe des abscisses, on prolongera cette parallèle d'une quantité BA′=BA, et en joignant le centre au point A′, on aura la direction de la droite

$$y=-kx;$$

car les points A et A′ ont la même ordonnée OB, mais leurs abscisses AB et BA′ sont égales et de signes contraires. Le

problème serait donc impossible si la parallèle OA à la droite RS était tracée dans l'angle asymptotique (**331** et **334**).

Il est facile de voir que cette droite OA' est le conjugué de OA. Traçons, en effet, une parallèle quelconque NN' à OA, puis par le point N où elle coupe l'asymptote Yy tirons une parallèle PP' à Xx que nous terminerons aux deux diamètres OA et OA', et joignons P'N'. Nous aurons ON'=PN=NP'; donc le quadrilatère ONP'N' est un parallélogramme; donc le point G intersection de ses diagonales est le milieu de NN', et par conséquent de MM' (**337**). Notre construction revient donc à celle donnée au n° **331**.

Il suit de là que la condition nécessaire et suffisante pour que deux diamètres soient conjugués, c'est que leurs coefficients angulaires soient égaux et de signes contraires, quand l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes. Telle est donc aussi (**311**) la relation qui existe entre les coefficients angulaires de deux cordes supplémentaires*.

345. Il résulte du principe établi au n° **172**, que pour que la courbe représentée par l'équation générale du second degré entre deux indéterminées x et y, ait pour asymptotes les axes des coordonnées, il faut qu'elle renferme seulement le rectangle des variables et un terme constant; sans quoi x ni y ne tendrait pas vers zéro, lorsque y ou x croîtrait au delà de toute limite assignable. Il est donc inutile que nous nous arrêtions à passer de l'équation d'une hyperbole rapportée à des axes rectangulaires quelconques à celle de cette hyperbole relative à ses asymptotes; car nous avons traité très-généralement au n° **230** la question de ramener l'équation générale du second degré à la forme

---

* En raisonnant comme au n° **244**, on verra qu'en appelant (x', y') les coordonnées asymtotiques de C, (x, y) celles de M, k et k' les coefficients angulaires des cordes CM et C'M, on a les quatre équations

$$k=\frac{y-y'}{x-x'},\quad k'=\frac{y+y'}{x+x'},\quad xy=m^2,\quad x'y'=m^2,$$

entre lesquelles il s'agit d'éliminer x, y et y'. On tire des deux dernières

$$xy=x'y';\quad \text{d'où}\quad \frac{x}{x'}=\frac{y'}{y};\quad \text{de là}\quad \frac{y-y'}{x'-x}=\frac{y+y'}{x+x'},$$

et par conséquent $$k=-k'.$$

$xy=m^2$. Nous observerons toutefois que, si l'on prenait pour point de départ l'équation aux axes principaux

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0,$$

on pourrait abréger le calcul en observant que le triangle COA donne Fig. 117

$$\cos\alpha'=\frac{a}{c},\quad \sin\alpha'=\frac{b}{c},$$

de sorte que

$$\cos\alpha=\frac{a}{c},\quad \sin\alpha=-\frac{b}{c},$$

puisque l'angle $\alpha=360°-\alpha'$. Les formules de transformation seraient ainsi

$$x=\frac{a}{c}(y'+x'),\quad y=\frac{b}{c}(y'-x').$$

346. Nous terminerons cette exposition des propriétés asymptotiques de l'hyperbole en prouvant que *l'aire du parallélogramme construit sur les coordonnées asymptotiques d'un point quelconque de cette courbe, est constante et égale au huitième de celle du rectangle construit sur les axes.* En effet, de l'équation de l'hyperbole $xy=m^2$, on tire $xy\sin\theta=m^2\sin\theta$; donc l'aire du parallélogramme OPMQ Fig. 117
est égale à celle de la losange construite sur les coordonnées du sommet, θ désignant l'angle des asymptotes. Mais cette losange est la moitié du triangle COC', lequel est le quart du rectangle construit sur les axes. Donc, etc.

§ VIII. De l'aire de l'hyperbole.

***347.** Nous allons nous proposer d'*évaluer l'aire com-* Fig. 120
prise entre un arc AB *d'hyperbole, l'asymptote* Xx *et les ordonnées* AC *et* BD *des deux extrémités de cet arc;* car il est clair qu'il sera facile d'en déduire l'aire de tout autre espace hyperbolique.

Je divise CD en un nombre quelconque n de parties CC_1, C_1C_2, C_2C_3, ... $C_{n-1}D$; je mène les ordonnées C_1a_1, C_2a_2, C_3a_3, ... $C_{n-1}a_{n-1}$, et je tire par chacun des points A, a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1}, B des parallèles à l'axe des x. Il est clair que nous formerons ainsi deux séries de parallélogrammes, les uns intérieurs, les autres extérieurs au segment hyperbolique

CABD, de sorte que si nous prouvons que le rapport de la somme des parallélogrammes extérieurs à celle des parallélogrammes intérieurs converge vers l'unité, lorsque n tend vers l'infini, il sera démontré qu'en prenant la limite de l'une de ces sommes, on aura l'aire hyperbolique demandée.

Soient
$$xy=m^2$$
l'équation de l'hyperbole, $a, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, b$ les abscisses des points A, $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, B; les ordonnées correspondantes auront pour expression $\frac{m^2}{a}, \frac{m^2}{x_1}, \frac{m^2}{x_2}, \ldots \frac{m^2}{x_{n-1}}, \frac{m^2}{b}$, de sorte que, si l'on désigne d'ailleurs par θ l'angle des asymptotes, on aura

$$\text{Aire } CA_1=(x_1-a).\frac{m^2}{a}\sin\theta=\left(\frac{x_1}{a}-1\right)m^2\sin\theta,$$
$$\text{Aire } C_1A_2=\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)m^2\sin\theta,$$
$$\text{Aire } C_2A_3=\left(\frac{x_3}{x_2}-1\right)m^2\sin\theta,$$
$$\vdots$$
$$\text{Aire } C_{n-1}A_n=\left(\frac{b}{x_{n-1}}-1\right)m^2\sin\theta.$$

Comme l'espacement des points $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$, est tout à fait arbitraire, nous pouvons supposer que l'on ait divisé l'intervalle CD de telle manière que les rapports $\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots \frac{b}{x_{n-1}}$ soient égaux, c'est-à-dire que les abscisses $a, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, b$ forment une progression géométrique; alors les aires de tous nos parallélogrammes extérieurs seront égales, et leur somme S aura ainsi pour expression

$$S=n\left(\frac{x_1}{a}-1\right)m^2\sin\theta.$$

Or, il est facile de voir que l'aire du parallélogramme Ca_1 est égale à $\left(1-\frac{a}{x_1}\right)m^2\sin\theta$, de sorte que la somme s de tous les parallélogrammes intérieurs sera donnée par la formule

$$s=n\left(1-\frac{a}{x_1}\right)m^2\sin\theta.$$

Donc
$$\frac{S}{s}=\frac{\frac{x_1}{a}-1}{1-\frac{a}{x_1}}=\frac{x_1}{a}.$$

Mais $\frac{x_1}{a}$, raison d'une progression par quotient composée de $(n+1)$ termes dont les deux extrêmes sont a et b, est égale à $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, quantité qui a pour limite l'unité, lorsqu'on suppose que n croît au delà de toute grandeur assignable (*Arithmétique*, **305**); donc la limite du rapport $\frac{S}{s}$ est l'unité et, par conséquent, l'aire H de notre segment hyperbolique est la limite commune de S et de s. Il s'agit donc de calculer cette limite, c'est-à-dire celle du produit $n\left(\frac{x_1}{a}-1\right)=n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)$.

Or, si l'on considère le système des *logarithmes népériens* (*Algèbre*, note du n° **382**).

$$\begin{array}{l} \div\!\div \ldots (1+\alpha)^{-3} : (1+\alpha)^{-2} : (1+\alpha)^{-1} : 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots \\ \div \ldots -3\alpha \;.\; -2\alpha \;.\; -\alpha \;.\; 0 \;.\; \alpha \;.\; 2\alpha \;.\; 3\alpha \ldots \end{array}$$

On pourra toujours regarder les nombres a et b comme faisant partie de la progression géométrique, puisqu'elle présente toutes les nuances de la grandeur, à partir de l'unité. Supposons donc

$$a=(1+\alpha)^m \quad \text{et} \quad b=(1+\alpha)^{m+n}$$

de sorte que les logarithmes de a et de b sont

$$m\alpha \quad \text{et} \quad (m+n)\alpha.$$

Comme il y a $(n-1)$ termes entre a et b, on a (*Arithmétique*, **245**)

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}}=1+\alpha,$$

et par conséquent

$$n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)=n\alpha=\mathrm{L}b-\mathrm{L}a=\mathrm{L}\frac{b}{a},$$

en désignant par la lettre L les logarithmes pris dans le système que *Néper* a considéré *. Donc on aura

$$\mathrm{H}=m^2\sin\theta\,\mathrm{L}\frac{b}{a} \qquad [3].$$

* Cette méthode, pour trouver la limite de $n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)$ est due à M. *Courtois*, professeur distingué au collége de Grenoble.

Si l'hyperbole est équilatère, que son excentricité soit égale à 2 et que $a=1$, cette équation se réduira à

$$\mathrm{H}=\mathrm{L}b.$$

D'où l'on voit que *le logarithme népérien d'un nombre exprime l'aire d'un segment d'hyperbole équilatère, cette aire étant comptée depuis l'abscisse 1 jusqu'à l'abscisse égale à ce nombre*. Voilà pourquoi on appelait autrefois ces logarithmes des *logarithmes hyperboliques*.

Si l'on suppose seulement que $a=1$, l'équation [3] devient

$$\mathrm{H}=m^2\sin\theta\,.\,\mathrm{L}b \qquad [4],$$

et si l'on prend les logarithmes dans le système dont le module est $m^2\sin\theta$, on aura simplement

$$\mathrm{H}=\log b\,;$$

ainsi *les aires hyperboliques sont les logarithmes des abscisses correspondantes*, élégant théorème que *Grégoire de Saint-Vincent* a découvert en cherchant la quadrature du cercle.

Si l'abscisse b est infinie, $\log b$ l'est aussi, de sorte que l'aire comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes peut dépasser toute grandeur assignable.

Si b est moindre que l'unité, $\log b$ est une quantité négative, et cela doit être; car, puisque nous avons supposé $a=1$, l'aire H est située à gauche de l'ordonnée CA, et, par conséquent, son expression analytique doit changer de signe.

Si b est négative, $\log b$ est imaginaire, ce qui nous indique que la formule [3] n'est pas applicable au cas de $b<0$; et, en effet, lorsque b passe du positif au négatif, H passe par l'infini, et par conséquent cette aire varie d'une manière discontinue, de sorte qu'il n'y a plus de liaison entre les parties de l'aire demandée.

Pour exprimer la formule [3] dans le système des logarithmes vulgaires ou de *Briggs*, il faut multiplier le logarithme népérien de $\frac{b}{a}$ par le module (*Algèbre*, **393**), c'est-à-dire par le logarithme vulgaire de la base e du système népé-

rien ; de sorte que

$$L\frac{b}{a}=\frac{1}{\log e}.\log\frac{b}{a};\quad \text{donc}\quad H=m^2\sin\theta.\frac{1}{\log e}.\log\frac{b}{a}.$$

La valeur de $\frac{1}{\log e}$ est 2,30258 50930.

***348.** Le secteur hyperbolique OAB est équivalent au segment ABDC ; car on a évidemment Fig. 121

$$OAB=OAC+ABCD-OBD;$$

et les triangles OAC et OBD sont équivalents, car ils sont les moitiés des parallélogrammes construits sur les coordonnées asymptotiques des points A et B (**346**).

***349.** Théorème. *Deux secteurs hyperboliques sont équivalents lorsque les arcs qui leur servent de bases sont compris entre deux parallèles.*

Soient OAB et OA'B' ces deux secteurs, il suffira évidemment de démontrer que le rapport $\frac{OD'}{OC'}$ est égal à $\frac{OD}{OC}$ (**347**). Fig. 121
Or ceci est facile; car, si l'on tire l'abscisse B'D' du point B', on aura RD'=BD, et par conséquent OD'=OR—BD; mais si l'on désigne par β_1 et par α_1, les ordonnées des points B et A dont nous représenterons d'ailleurs les abscisses respectivement par β et par α, l'équation de SR sera $y-\beta_1=m(x-\beta)$; d'où l'on tire $OD'=-m\beta$; donc aussi $OC'=-m\alpha$ et par suite $\frac{OD'}{OC'}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{OD}{OC}$.

On tirera facilement de ce théorème le moyen de *partager un secteur hyperbolique en deux parties équivalentes.*

§ IX. Applications.

350. Problème. *Décrire une hyperbole dont on connaît un foyer* F *et trois points* M, M', M''. Fig. 122

On traitera ce problème comme celui du n° **298**, mais en observant toutefois que la directrice pouvant passer entre deux des points donnés, il n'y aura pas de raison pour diriger les parallèles menées par M' et par M'' à MF dans le même sens que cette droite plutôt que dans le sens contraire, et qu'ainsi il y aura quatre solutions, parmi lesquelles pourront se trouver des ellipses, et même des paraboles, si la perpen-

diculaire abaissée de l'un des points donnés M, sur la directrice, est plus grande que MF ou égale à MF (**262**).

Quant à la solution analytique du même problème, il n'y aura rien à changer dans celle que nous avons donnée au n° **299**, sinon, que les signes placés devant les quantités connues ρ', ρ'', ρ''' ne se correspondront plus. Il en résultera donc huit systèmes de trois équations; mais il est facile de prouver que quatre de ces systèmes donneront pour les inconnues m, n et p des valeurs qui ne différeront de celles tirées des quatre autres que par les signes, de sorte qu'en substituant ces valeurs dans l'équation $x^2+y^2=(my+nx+p)^2$, on n'obtiendra pas de nouvelles équations, et le problème n'aura ainsi que quatre solutions.

351. I. *Démontrer que si, par un point quelconque d'une hyperbole, on mène à une asymptote une parallèle terminée à une directrice, cette parallèle sera égale à la distance du foyer correspondant au point dont il s'agit.*

II. *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, un foyer et un point* (**351**, I). — *Si le point n'est pas donné, il y a une infinité d'hyperboles qui satisfont à la question; construire par points le lieu des sommets de toutes ces hyperboles* (on se donnera la direction de l'axe transverse), *et déduire de ce tracé l'équation de la courbe.* — *Discuter l'équation.* — *Pouvait-on prévoir que le lieu passerait par le foyer, par sa projection sur l'asymptote?* — *Peut-on reconnaître quels sommets sont situés sur le nœud?* — *Quel est le lieu des seconds foyers?*

III. *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, une directrice et un point* (**351**, I). — *Indiquer la marche à suivre pour trouver l'équation de la courbe ainsi déterminée.*

IV. *Déterminer* a *et* b *de manière que les deux courbes*

$$y=x^2+1 \quad et \quad xy=ax+by$$

soient tangentes. — *Lieu des centres de toutes les hyperboles comprises dans la seconde équation, et qui sont tangentes à la courbe représentée par la première* (**183**).

V. *Si par deux points d'une hyperbole, on mène des parallèles aux asymptotes, elles se croiseront sur le diamètre qui passe par le milieu de cette corde.*

VI. *Construire une hyperbole, connaissant trois de ses points et deux parallèles à ses asymptotes* (V).

VII. *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, une directrice et une tangente.* — L'inconnue est le foyer. Le n° **317** donne un lieu de ce point, et on parvient à en trouver un second en supposant connu le point de contact et en s'appuyant sur les principes I du n° **351** et II de **301**.

VIII. *Étant donnée l'équation*

$$y^2+axy+bx^2+cx=0 \qquad [5],$$

trouver la relation qui doit exister entre les coefficients indéterminés a, b, c, *pour que les hyperboles représentées par cette équation aient la droite* $y=x+1$ *pour asymptote commune.*

On écrira que l'équation résultant de l'élimination de y entre les deux équations proposées, a ses racines égales et infinies, et alors l'équation [5] deviendra

$$y^2+axy-(1+a)x^2-(2+a)x=0.$$

— *Trouver le lieu des sommets de toutes les hyperboles représentées par cette dernière.* Nous exprimerons que le point (x, y) est un sommet, en écrivant qu'il appartient à la courbe, et que la tangente en ce point est perpendiculaire à la droite qui le joint au centre.

IX. *Déterminer* a *et* b *de manière que les deux courbes*

$$xy=ax+by,$$

et

$$y^2-2axy+x^2=b^2$$

aient un sommet commun.

CHAPITRE XIII.

THÉORIE DE LA PARABOLE.

§ I. Construction de la parabole par points.

352. L'équation générale de la parabole peut toujours se ramener à la forme

$$y^2 = 2px,$$

et alors l'axe des x est un diamètre, et l'axe des y, parallèle menée aux cordes conjuguées de ce diamètre par le point où il rencontre la courbe, est tangent à cette courbe (**189**, 2°). La constante $2p$ se nomme le *paramètre* du diamètre dont il s'agit. C'est, comme on voit, *une troisième proportionnelle à l'abscisse d'un point quelconque de la parabole et à son ordonnée*. Si l'on observe que pour $x=y$, l'équation $y^2=2px$ donne $x=y=2p$, on en conclut que pour trouver le paramètre d'un diamètre de la parabole, il n'y a qu'à chercher sur cette courbe un point dont les coordonnées relatives à ce diamètre et à la tangente à son extrémité soient égales, ce qui est facile, et les coordonnées de ce point seront égales au paramètre cherché.

Fig. 123 et 124 **353.** Il est facile de *construire une parabole par points, lorsqu'on connaît un diamètre* OX, *son paramètre* 2p *et la tangente* Yy *à l'extrémité de ce diamètre*. En effet, l'équation de cette courbe étant $y^2 = 2px$, on voit que l'ordonnée d'un point quelconque est une moyenne proportionnelle entre son abscisse et $2p$. Si donc OP est une abscisse quelconque, on prendra sur le prolongement du diamètre une longueur $OA = 2p$, on décrira une demi-circonférence sur AP comme diamètre, et la portion OB déterminée par cette circonférence sur la perpendiculaire élevée en O sur OX sera égale à l'ordonnée du point P. Donc si les coordonnées sont rectangulaires, on n'aura qu'à mener par le point B une parallèle à OX, et le point où elle coupera la perpendiculaire élevée par le point P sur cet axe, sera le point de la parabole dont l'abscisse est OP.

Si les coordonnées sont obliques, on rabattra OB de O en C Fig. 124
sur Yy, et en construisant un parallélogramme sur les deux droites OC et OP, son sommet M sera le point cherché.

354. Nous avons vu que lorsque l'équation générale du second degré représente une courbe, cette courbe a un centre déterminé par l'intersection des droites (183)

$$2Ay+Bx+D=0 \quad \text{et} \quad By+2Cx+E=0,$$

si B^2-4AC est différent de zéro; mais que ces droites deviennent parallèles, c'est-à-dire que le centre s'éloigne indéfiniment lorsque B^2-4AC devient nul : en même temps l'une des quantités A' et C' s'évanouit (232), et par conséquent l'un des axes de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole devient infini (223 et 224); d'où il suit que *l'on peut regarder la parabole comme une ellipse ou une hyperbole dont le grand axe ou l'axe transverse s'est allongé indéfiniment.* Nous allons démontrer directement cette proposition qui est fort importante; car elle donne le moyen de déduire de la théorie de l'ellipse et de l'hyperbole un grand nombre de propriétés de la parabole.

Je considère une ellipse rapportée à ses axes principaux, et Fig. 125
je transporte l'origine à l'un des sommets, au sommet négatif par exemple, en posant $x=-a+x'$; ce qui donne

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2).$$

Soit F le foyer le plus près de la nouvelle origine, j'appelle $\frac{p}{2}$ la distance de ces deux points; nous aurons

$$\frac{p}{2}=a-c=a-\sqrt{a^2-b^2},$$

équation d'où l'on tire

$$b^2=ap-\frac{p^2}{4},$$

et par conséquent

$$y^2=\left(p-\frac{p^2}{4a}\right)\left(2x-\frac{x^2}{a}\right).$$

Cela posé, si, en supposant que les points A et F restent fixes, on fait augmenter l'axe $2a$, on trouvera une série d'el-

lipses, dont les ordonnées tendront vers celles de la parabole SAS′ représentée par l'équation

$$y^2=2px,$$

puisque les termes $\frac{p^2}{4a}$ et $\frac{x^2}{a}$ convergeront alors vers zéro; donc *la parabole* SAS′ *est la limite des ellipses qui ont le même sommet* A *et le même foyer* F.

Si l'on construit de même une série d'hyperboles telles que HH′ H_1H_1' ayant A pour sommet et F pour foyer, et dont les centres situés du côté des abscisses négatives s'éloignent de plus en plus de l'origine, on trouvera encore que ces hyperboles ont pour limite la parabole SAS′; on dira en conséquence que *la parabole est une ellipse ou une hyperbole dont le grand axe ou l'axe transverse est infini;* mais elle n'est pas *en même temps* l'une et l'autre.

§ II. Du foyer.

355. Considérons l'ellipse AA′ dont A et F sont un sommet et un foyer, et supposons que, ces deux points restant fixes, son grand axe $2a$ croisse indéfiniment. Le point F ne cessera pas d'être un des foyers de cette ellipse, quel que soit le système d'axes auxquels nous la rapportions, et quelle que soit la grandeur de son axe $2a$ (**263**); il le sera donc encore à la limite, c'est-à-dire, quand l'ellipse sera devenue une parabole. Or, l'équation de cette parabole est $y^2=2px$, et la distance invariable AF est égale à $\frac{p}{2}$; donc *la parabole a un foyer situé sur son axe à une distance du sommet égale au quart du paramètre de l'axe.*

356. Si dans l'équation $y^2=2px$, on suppose $x=\frac{p}{2}$, on en tire $y=p$; ainsi *l'ordonnée du point de la parabole qui se projette au foyer est double de son abscisse et est égale à la moitié du paramètre.*

Fig. 123 On déduit de là un moyen très-simple de trouver le foyer d'une parabole qui n'est que tracée. On mènera deux cordes parallèles quelconques, on joindra leurs milieux par une droite indéfinie BS, et on obtiendra ainsi un diamètre; puis, en tirant une corde perpendiculaire à ce diamètre et la coupant

en deux parties égales par une perpendiculaire, on aura l'axe. Il ne restera plus qu'à prendre une abscisse quelconque OP sur cet axe, tracer une ordonnée PK qui en soit le double et à joindre l'extrémité K de cette ordonnée avec le sommet. La projection sur l'axe du point où la droite de jonction coupe la parabole sera le foyer F.

357. La directrice qui correspond au foyer F de l'ellipse est située à gauche du sommet A et à une distance du centre égale à $\frac{a^2}{c}$; donc sa distance à ce sommet est $\frac{a^2}{c}-a=\frac{a(a-c)}{c}$, de sorte que son équation par rapport aux axes AX et AY est Fig. 125

$$x=-\frac{a(a-c)}{c}.$$

Or, $a-c=\frac{p}{2}$, d'où $c=a-\frac{p}{2}$;

donc
$$x=-\frac{a.\frac{p}{2}}{a-\frac{p}{2}}=-\frac{p}{2-\frac{p}{a}};$$

en passant à la limite, on trouvera

$$x=-\frac{p}{2}.$$

La directrice de la parabole est donc perpendiculaire à son axe, et le sommet partage en deux parties égales l'intervalle compris entre le foyer et la directrice; ainsi F étant le foyer de la parabole SAS', si l'on prend sur son axe AX une distance AE = AF, et qu'on élève au point E une perpendiculaire DD' sur cet axe, on aura la directrice.

358. Il suit immédiatement de là, que *chaque point de la parabole est également distant du foyer et de la directrice**, ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu au n° **262**.

---

* Il sera facile, en suivant la même marche qu'aux n^{os} **264** et **265**, d'obtenir tous ces résultats par le calcul; seulement il faudra observer que, si l'on voulait que la distance du foyer à un point (x, y) de la parabole fût une fonction rationnelle de y, l'expression de cette distance étant $\delta=\pm\frac{1}{2p}(y^2+p^2)$, l'équation de la directrice serait alors $y^2+p^2=0$, c'est-à-dire qu'il n'y aurait pas de directrice; et, en effet, δ n'étant pas une fonction du premier degré de y, la définition du foyer (**257**) ne se

Fig. 29 Or si du point quelconque $M(x, y)$ de la parabole, on abaisse une perpendiculaire MD sur la directrice, cette droite sera évidemment égale à $x+\frac{p}{2}$; donc aussi $MF=x+\frac{p}{2}$, résultat qu'il est important de retenir.

359. La parabole jouit exclusivement de cette dernière propriété; car, si l'on considère deux points quelconques K et K', l'un extérieur et l'autre intérieur à la parabole, et que de chacun d'eux on abaisse une perpendiculaire sur la directrice, on aura évidemment,

$$KF > MF - MK = KD \quad \text{et} \quad K'F < MF + MK' = K'D.$$

Donc *tout point extérieur à la parabole est plus près de la directrice que du foyer, et tout point intérieur à cette courbe est au contraire plus éloigné de la directrice que du foyer.*

360. On pourra donc *définir la parabole une courbe dont chaque point est également distant d'un point et d'une droite fixes.* De là résulte un moyen très-simple de décrire une parabole par points. Nous l'avons indiqué au n° **79**.

On peut aussi, d'après la même propriété, décrire une parabole par un mouvement continu, lorsque l'on connaît son
Fig. 29 foyer et sa directrice. Pour cela, on placera une équerre BCD le long de cette droite; puis ayant attaché aux points F et C un fil dont la longueur soit exactement égale à DC, on tendra ce fil par le moyen d'une pointe à tracer que l'on appliquera contre le côté DC de l'équerre; en faisant mouvoir cet instrument le long de la directrice, la pointe glissera le long de DC et décrira la parabole. En effet, on aura toujours $FM+MC=DC$, et par conséquent $MF=MD$.

Nous avons donné, au n° **78**, l'équation de la courbe que nous venons de décrire.

361. Théorème. *Le rayon vecteur et le diamètre menés au point de contact sont également inclinés sur la tangente.*

Fig. 125 Si l'on se reporte, en effet, à la fig. 125, on verra qu'à mesure que le grand axe AA' augmentera, l'angle MF'A diminuera, mais que les angles FMT et F'MT', formés par la

---

trouve plus satisfaite; on ne peut donc plus dire que le point $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ est un foyer, et aussi les raisonnements du n° **258** ne sont plus applicables ici.

tangente avec les rayons vecteurs tirés au point de contact, seront toujours égaux entre eux : ils le seront encore à la limite, c'est-à-dire quand l'ellipse AMA' sera devenue la parabole SAS'; mais alors le rayon vecteur MF' sera devenu parallèle à l'axe, c'est-à-dire qu'il sera un diamètre de la parabole. Ainsi notre théorème est démontré.

Si l'on veut le démontrer directement, il n'y aura qu'à appliquer à l'équation $y^2=2px$, le calcul que nous avons fait au n° **272** sur l'équation $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$, et on trouvera tang FMT $=\frac{p}{y'}$; mais le coefficient angulaire de la tangente au point M(x', y') est aussi $\frac{p}{y'}$; donc, etc.

362. Il sera encore plus simple de dire : si dans l'équation

$$yy'=p(x+x')$$

de la tangente au point M(x', y') de la parabole (**145**), on fait $y=0$, il viendra

$$x+x'=0, \quad \text{d'où} \quad x=-x';$$

donc *le sommet* O *est équidistant du pied* T *de la tangente et du pied de l'ordonnée du point de contact;* par conséquent, TF $=x'+\frac{p}{2}$; mais MF est aussi égal à $x'+\frac{p}{2}$(**358**) : donc TF = MF; donc l'angle TMF est égal à MTF, et par conséquent à son correspondant T'MC. Fig. 29

363. Nous venons de reconnaître que le sommet de la parabole était équidistant du pied de la tangente menée en un point quelconque et du pied de l'ordonnée de ce point : on déduit de là une démonstration fort simple de ce théorème important : *Le paramètre d'un diamètre quelconque est quadruple de la distance du foyer à l'origine de ce diamètre.*

Soient, en effet, (x, y) les coordonnées d'un point quelconque M d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente à son sommet; MT la tangente en M; si par le point O on tire la parallèle ON à cette tangente, il est clair que le paramètre $2p'$ du diamètre MS sera (**352**) égal à $\frac{\overline{ON}^2}{MN}$; or, MN est égal à OT, qui elle-même est égale à l'abscisse x du point M; d'un autre côté, $\overline{ON}^2=\overline{MT}^2=y^2+4x^2=4x\left(x+\frac{p}{2}\right)$, Fig. 123

puisque le point M appartient à la parabole ; donc $2p' = 4\left(x + \frac{p}{2}\right)$; mais $x + \frac{p}{2}$ exprime la distance du point M au foyer (358) ; donc, etc.

Fig. 126 **364.** Problème. *Étant donnés un diamètre* AX *d'une parabole, la tangente* Yy *à l'extrémité de ce diamètre, et un point* M *de la courbe, trouver* ses éléments, *c'est-à-dire son foyer et sa directrice.*

J'élève au point A sur le diamètre donné une perpendiculaire sur laquelle je prends une longueur AB égale à l'ordonnée MP du point donné ; je joins BP, et je mène BC perpendiculairement à BP ; AC sera le paramètre du diamètre AX. Par conséquent, si on le partage en quatre parties égales, son quart AD sera la distance du point A au foyer (363) et à la directrice (358) ; donc si l'on élève au point D une perpendiculaire à AX, on aura la directrice ; et si on décrit une circonférence du centre A et avec le rayon AD, elle passera par le foyer. Il n'y aura donc plus qu'à faire au point A un angle FAy égal à YAX, et le foyer sera déterminé (361).

365. Il suit de là que, si un rayon lumineux, calorifique ou sonore, issu du foyer du *paraboloïde* engendré en faisant faire à une parabole une demi-révolution autour de son axe, vient tomber sur la surface de ce corps, il se réfléchira parallèlement à cet axe, et réciproquement tous les rayons lumineux, calorifiques ou sonores, qui viendront tomber sur la surface concave de ce paraboloïde, dans une direction parallèle à son axe, se réfléchiront à son foyer.

Fig. 127 Si donc on dispose deux miroirs paraboliques de manière que leurs axes coïncident et qu'ils se présentent leur concavité, les rayons de chaleur émanés d'un corps placé à l'un des foyers iront se réfléchir à l'autre. Deux corps placés aux deux foyers d'un semblable appareil tendront donc à se mettre en équilibre de température.

§ III. Des tangentes.

1er Cas. *La parabole est tracée.*

Fig. 128 **366.** *La tangente doit passer par un point donné de la parabole.* Tracez deux cordes parallèles quelconques, dont l'une passe par le point donné M, et joignez leurs milieux :

vous aurez un diamètre, et si, par le point O où il coupe la parabole, vous menez une parallèle à la corde MM′, elle sera tangente à cette courbe. Cela posé, si vous prenez ce diamètre et cette tangente pour axes des x et des y, l'équation de la parabole sera $y^2 = 2px$, et par conséquent vous aurez pour celle de la tangente au point $M(x', y')$

$$yy' = p(x + x');$$

si donc vous y faites $y=0$, vous trouverez

$$x + x' = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -x'.$$

Ainsi, prenez sur le prolongement du diamètre OX une distance OT = OP, et en tirant MT, vous obtiendrez la tangente demandée.

367. Si l'on joint M′T, on aura la tangente au point M′; donc *le diamètre mené par le point de concours de deux tangentes passe par le milieu de la corde de contact.*

368. PT est évidemment le double de OP; donc *la soustangente relative à un diamètre quelconque est double de l'abscisse du point de contact.*

369. *La tangente doit passer par un point donné sur le plan de la parabole.* Tirons deux cordes parallèles quelconques; joignons leurs milieux, et prenons pour axes des x et des y le diamètre ainsi déterminé et la parallèle menée à ces cordes par son extrémité O. Soient (α, β) les coordonnées du point donné C, et $2p$ le paramètre du diamètre OX : on trouvera facilement (**279**) que l'équation de la corde de contact est Fig. 129

$$\beta y = p(x + \alpha).$$

Pour la construire, nous chercherons les points où elle coupe les axes, ce qui nous donnera

$$x = -\alpha \quad \text{et} \quad y = p \cdot \frac{\alpha}{\beta}.$$

Nous prendrons donc OP′ = OP, et P′ sera le point où la corde de contact coupe l'axe des x. Quant à la valeur de y, j'observe que si, dans l'équation de la tangente au point (x', y'), je fais $x = 0$, j'en tirerai $y = p \cdot \frac{x'}{y'}$; d'où l'on voit que, si le rapport $\frac{x'}{y'}$ était égal au rapport $\frac{\alpha}{\beta}$, la tangente au point (x', y')

couperait l'axe des y au même point que notre corde de contact. En conséquence, je tire la droite OC qui coupe la parabole au point N, je mène NQ parallèle à l'axe des y, et j'ai évidemment $\frac{OQ}{NQ}=\frac{OP}{PC}$, c'est-à-dire $\frac{\alpha}{\beta}$. Je prends donc $OQ'=OQ$, je joins Q'N et $OG=p.\frac{x'}{y'}=p.\frac{\alpha}{\beta}$. Il n'y a donc plus qu'à mener une droite indéfinie par les points P' et G, et à joindre les points où elle coupera la parabole avec le point C, et le problème sera résolu.

370. *La tangente doit être parallèle à une droite donnée.* (Voy. le n° **281**.) Pour que le problème soit possible, il faut que la droite donnée ne soit pas un diamètre.

2ᵉ Cas. *La parabole est déterminée par son foyer et par sa directrice.*

Fig. 29 **371.** *La tangente doit passer par un point* G *donné sur le plan de la parabole.* Supposons le problème résolu, que MT soit la tangente demandée et M le point de contact. Joignons MF et abaissons la perpendiculaire MD sur la directrice. La tangente partagera l'angle FMD en deux parties égales (**361**) ; et comme MF=MD, il en résulte qu'elle est perpendiculaire sur le milieu de FD, de sorte que le point G est équidistant des points F et D. Donc, pour résoudre le problème, il suffira de décrire une circonférence du point G comme centre et avec le rayon GF, de joindre le foyer F au point D où cette circonférence coupera la directrice, et d'abaisser du point G une perpendiculaire sur FD. En élevant ensuite par le point D une perpendiculaire à la directrice, on déterminera le point M de contact.

Le problème aura autant de solutions que la circonférence que nous avons décrite coupera de fois la directrice. Si le point G est extérieur à la parabole, il sera plus près de la directrice que du foyer (**359**); donc la circonférence rencontrera cette droite en deux points, et le problème aura deux solutions.

Si le point G est sur la courbe, il est équidistant de F et de DD', de sorte que la circonférence sera tangente à la directrice, et il n'y aura qu'une solution *.

* On pourrait encore abaisser de F une perpendiculaire indéfinie sur

Si le point G est situé dans l'intérieur de la parabole, il est plus près du foyer que de la directrice (359), et par conséquent cette droite n'étant pas rencontrée par la circonférence, le problème est impossible.

Il serait facile de déduire la construction précédente de celle que nous avons donnée pour mener une tangente à l'ellipse (282), en observant que la circonférence décrite du foyer F' comme centre avec $2a$ pour rayon coupe la direction du Fig. 125
grand axe, à une distance AE du point A égale à la constante AF, et que, quand $2a$ devient infini, cette circonférence devient ainsi la directrice DD'.

372. Comme la tangente GM est perpendiculaire sur le Fig. 29
milieu de DF, ce milieu est la projection du foyer sur cette tangente; mais ce milieu se trouve aussi sur la tangente Yy au sommet O, puisque OA=OF : donc *la tangente au sommet d'une parabole est le lieu des projections du foyer de cette courbe sur toutes ses tangentes.*

373. Si le point donné est situé en I sur la directrice, les deux tangentes issues de ce point, étant les bissectrices des angles supplémentaires DIF et D'IF, se couperont à angles droits; de plus, l'égalité des triangles DIM et FIM, D'IM'' et M''IF, qui ont un angle égal compris entre côtés égaux, prouve que les angles IFM et IFM'' sont droits, et que par conséquent MFM'' est une ligne droite. On voit encore que I étant le milieu de DD', un diamètre mené par le point I coupera la corde MM'' en deux parties égales.

Donc, *si l'on fait mouvoir une équerre de manière que les côtés de l'angle droit restent constamment tangents à la parabole, son sommet décrira la directrice*, la corde de contact tournera autour du foyer, en restant perpendicu-*

---

la directrice, prendre le milieu O de FA, puis OT égale à l'abscisse OP du point de contact M et joindre MT.

* Supposons, en effet, que l'équerre puisse avoir la position MGM''': on pourrait du point I où le côté MG rencontre la directrice mener une seconde tangente IM'' à la parabole, et cette tangente serait parallèle à GM'''; or, il est impossible que deux tangentes à la parabole soient parallèles; car il n'y a pas sur cette courbe deux points qui aient la même ordonnée, et le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y) est $\frac{p}{y}$.

laire à la droite qui joint ce point au sommet mobile, et sera coupée en son milieu par le diamètre tiré par le sommet de l'équerre.

Fig. 130 **374.** *La tangente doit être parallèle à une droite donnée.* En raisonnant comme au nº **371**, on verra que, pour résoudre le problème, il faut abaisser du foyer une perpendiculaire sur la droite donnée RS, et élever une perpendiculaire sur le milieu de la partie de cette perpendiculaire, qui sera comprise entre le foyer et la directrice.

375. L'équation de la tangente à la parabole exprimée en fonction de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x est (**286**)

$$y=mx+\frac{p}{2m}.$$

§ IV. Des normales.

1er Cas. *La parabole est tracée.*

376. *La normale doit passer par un point donné sur la parabole.* Menez une tangente en ce point, et élevez-lui ensuite une perpendiculaire.

377. Si l'on rapporte la parabole à son axe et à la tangente au sommet (il est facile d'avoir l'axe et le foyer par la construction donnée au nº **356**), l'équation de la normale au point (x', y') sera

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x'),$$

avec la condition $y'^2=2px'$,

$2p$ désignant le paramètre de l'axe. Si donc on fait $y=0$ dans cette équation, on en tirera

$$x-x'=p,$$

la sous-normale est donc constante et égale à la moitié du paramètre. Ce qui fournit un second moyen de résoudre le problème proposé.

Fig. 131 **378.** La distance du sommet au pied de la normale étant égale à $x'+p$, on voit que ce pied peut s'éloigner indéfiniment du sommet, mais qu'il s'en approche à mesure que x' diminue; et comme la limite de la quantité $x'+p$ est p, on voit que, si on prend sur l'axe une distance FL=FO, le point

L sera une *limite* dont le pied de la normale, toujours situé à droite de L, s'approchera indéfiniment à mesure que l'origine (x', y') de cette normale s'approchera elle-même indéfiniment du sommet O.

379. *La normale doit passer par un point donné sur le plan de la parabole.* On commencera par déterminer l'axe et le paramètre de cette courbe (**356**), et on la rapportera à cet axe et à la tangente à son extrémité ; puis, en désignant par α et β les coordonnées du point donné C, et par x' et y' celles de l'origine M de la normale, on verra, en raisonnant comme au n° **279**, que ces coordonnées sont les solutions communes aux deux équations

$$\beta - y = -\frac{y}{p}(\alpha - x) \qquad [1],$$

$$y^2 = 2px \qquad [2],$$

de sorte qu'en construisant l'hyperbole équilatère représentée par la première de ces deux équations, et en joignant les points où elle coupera la parabole avec le point C, on aura toutes les solutions du problème.

Or, on peut substituer un cercle à cette hyperbole équilatère. En effet, si nous éliminons y^2 entre l'équation [2] et l'équation [1] multipliée par y, il viendra

$$x^2 + (p - \alpha)x - \frac{\beta}{2}y = 0,$$

et si nous ajoutons cette dernière à l'équation [2], nous trouverons

$$y^2 + x^2 - (p + \alpha)x - \frac{\beta}{2}y = 0 \qquad [3],$$

de sorte que l'on peut remplacer le système des équations [1] et [2] par celui des équations [2] et [3], et qu'en conséquence les points demandés seront ceux même où la circonférence représentée par l'équation [3] coupe la parabole. Il y aura, au moins, deux intersections, puisque la circonférence passe par l'origine ; mais cette origine est une *solution étrangère;* car elle a été introduite en multipliant l'équation [1] par y.

Les coordonnées du centre de ce cercle sont $\frac{p+\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{4}$, ainsi il sera facile de construire l'équation [3].

Comme une circonférence de cercle peut couper une parabole en deux, trois ou quatre points, on voit que par un point donné on peut toujours mener une, ou deux, ou trois normales à une parabole. Nous allons examiner *quelle position il convient d'assigner au point donné* C(α, β), *pour que le problème admette une, deux ou trois solutions.*

J'élimine x entre les équations [1] et [2], et je trouve

$$y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta=0 \qquad [4],$$

équation qui a pour racines les ordonnées des *points d'incidence* des normales.

Cette équation a toujours une racine réelle : ainsi le problème a au moins une solution, ce qui s'accorde avec la construction géométrique.

Pour qu'il n'y ait que deux solutions, il faut et il suffit que l'équation [4] ait deux racines égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$8(p-\alpha)^3+27p\beta^2=0 \qquad [5];$$

et comme les coordonnées du point C ne sont assujetties qu'à cette seule condition, on en conclut qu'il y a une infinité de points desquels on peut mener deux normales seulement à la parabole, et que l'équation [5] est le lieu de tous ces points. Cette courbe ZLZ', que l'on appelle *la seconde parabole cubique,* rencontre l'axe des x, au point L situé à la distance p de l'origine, ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu au n° **378**; elle est symétrique par rapport à l'axe des x, et s'éloigne indéfiniment des deux axes des coordonnées. De plus, si l'on cherche le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe au point (α, β), on trouvera qu'il est égal à

$$\frac{4(\alpha-p)^2}{9p\beta}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3(\alpha-p)}{2p}},$$

quantité qui se réduit à *zéro* pour $\alpha=p$ et à ∞ pour $\alpha=\infty$. Ainsi la courbe ZLZ' est tangente au point L à l'axe des x, auquel elle est, en conséquence convexe aux environs de ce point; et la direction de ses derniers éléments étant perpendiculaire à cet axe, elle finit par lui présenter encore sa convexité. Elle est donc constamment convexe vers xX, puisqu'elle ne peut pas être coupée en plus de trois points par une ligne droite (**63**).

Pour que l'on puisse mener du point C trois normales à la parabole, il faut que les trois racines de l'équation [4] soient réelles, et que l'on ait en conséquence

$$8(p-\alpha)^3+27p\beta^2<0:$$

or, cette condition exprime que le point C est intérieur à la courbe ZLZ', c'est-à-dire qu'il est situé dans la partie du plan limitée par la convexité de cette courbe; donc ZLZ' partage le plan en deux régions telles que, de tous les points de celle qui est limitée par la concavité de la seconde parabole cubique, on ne peut mener qu'une seule normale à la parabole, tandis que de tous les points de l'autre on peut en mener trois.

De simples considérations géométriques mettent ce résultat en évidence. En effet, il suit d'abord de la génération de la courbe ZLZ' que, comme elle est le lieu des points d'intersection de chaque normale à la parabole avec la suivante *, chacune de ces normales lui est tangente, puisqu'elle a un élément commun avec cette courbe, et que réciproquement toute tangente à ZLZ' est une normale à la parabole. Il est facile de voir ensuite que de tous les points de la région ZLZ'X on peut mener trois tangentes à la courbe ZLZ', tandis que de la région ZxZ'L on ne peut en tirer qu'une seule, et que par chaque point de cette courbe on peut lui mener deux tangentes. Pour le faire voir, concevons qu'une tangente indéfinie TMS glisse sur cette courbe. Si le point de contact M est en L, cette tangente coïncidera avec l'axe des x; mais si ce point s'élève sur la branche LZ, la portion MS de la tangente, qui est située à droite du point de contact, parcourra tout l'espace ZLX, et viendra ainsi passer par un point quelconque C de cet espace; mais cette tangente coupant successivement l'axe des x en tous ses points, sa partie MT décrira tout l'espace xZ'XZL; car l'inclinaison de cette tangente sur l'axe des x croît depuis 0^0 jusqu'à 90^0; elle viendra donc aussi passer par le point C; donc on peut tirer par ce point deux tangentes à la branche LZ, tandis que de tout point situé

* N'oubliez pas que l'équation [5] exprimant que deux racines de l'équation [4] sont égales, deux des trois normales sont venues se confondre.

au-dessous de l'axe des x on ne peut lui en mener qu'une seule, puisque TS ne rencontrera ce point qu'une seule fois. C'est l'inverse pour la branche LZ', de sorte que par le point C on ne peut tracer qu'une seule tangente à cette branche. Donc, enfin, de tout point de l'espace LZ'XZL, on tirera trois tangentes à la courbe ZLZ'; des points mêmes de cette courbe on peut lui en mener deux, et il n'y en a plus qu'une seule qui puisse passer par chacun des autres points du plan.

La courbe ZLZ' se nomme aussi la *développée* de la parabole, et celle-ci est dite, au contraire, la *développante* de ZLZ'.

380. Problème. *Trouver l'équation de la courbe décrite par le sommet d'un angle droit dont les côtés sont constamment normaux à la parabole.*

La solution de ce problème résulte très-simplement de l'équation [4]. En effet, $-\frac{y}{p}$ étant le coefficient angulaire de la normale au point dont l'ordonnée est y, le produit des deux valeurs qu'on obtient en remplaçant y par deux racines de l'équation [4] dans la fonction $-\frac{y}{p}$ devra être égal à -1, puisque les deux côtés de notre équerre se coupent à angles droits; il faut donc que le produit de ces deux racines soit $-p^2$; mais le produit des racines de l'équation [4] est $2p^2\beta$; donc $\frac{2p^2\beta}{-p^2}=-2\beta$ est la troisième racine de cette équation; ainsi, cette équation devra être vérifiée par la substitution de -2β à la place de y, substitution qui donne

$$\beta\left[\beta^2-\frac{p}{4}(2\alpha-3p)\right]=0.$$

Cette équation se décompose dans les deux suivantes :

$$\beta=0, \quad \text{et} \quad \beta^2=\frac{p}{2}\left(\alpha-\frac{3p}{2}\right).$$

La première de ces équations est une solution étrangère; quant à la seconde, elle représente une parabole de même axe que la proposée, qui a un paramètre quatre fois moindre que celui de cette courbe, et dont le sommet est à une distance de la directrice égale aux trois quarts du paramètre $2p$.

381. On peut résoudre ce problème directement de la

manière suivante, qui est remarquable par la symétrie des calculs auxquels elle donne lieu.

Soient (x', y') et (x'', y'') les coordonnées des points où les deux côtés de l'angle droit coupent la parabole : on trouvera facilement que les équations du problème sont

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x') \\ y'^2=2px' \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y-y''=-\frac{y''}{p}(x-x'') \\ y''^2=2px'' \end{array}\right\},$$
$$y'y''+p^2=0,$$

de sorte qu'il ne s'agira ensuite que d'éliminer x', y', x'' et y'' entre ces cinq équations. Pour cela, on éliminera x' entre les équations du premier système, ce qui donnera

$$y'^3-2p(x-p)y'-2p^2y=0 \qquad [6].$$

Mais, si l'on éliminait x'' entre les équations du second système, on obtiendrait évidemment une équation qui ne différerait de celle-ci que parce que y' y serait remplacé par y'' : donc y' et y'' sont racines de l'équation [6]; car y' n'est pas égal à y''; de sorte qu'en vertu de l'équation $y'y''+p^2=0$, le produit de deux des trois racines de cette équation est $-p^2$; donc la troisième de ces racines est $\frac{2p^2y}{-p^2}=-2y$; donc l'équation [6] doit être vérifiée en y remplaçant y' par $-2y$; donc, etc.

382. *La normale doit être parallèle à une droite donnée* (**289**).

2ᵉ Cas. *La parabole est déterminée par son foyer et par sa directrice.*

383. *La normale doit passer par un point donné sur le plan de la parabole.* On suivra la méthode que nous avons indiquée au nº **290**, à moins que l'on ne préfère décrire d'abord la parabole, et exécuter ensuite la construction donnée au nº **379**.

384. *La normale doit être parallèle à une droite donnée* (**291**).

§ V. De l'aire de la parabole.

Fig. 132 **385.** Nous allons chercher à *évaluer l'aire d'un segment* OAB, *compris entre un arc* OB *de parabole, le diamètre* OX *et l'ordonnée de l'extrémité de cet arc, cette ordonnée étant comptée parallèlement aux cordes conjuguées du diamètre* OX. Si l'on observe que la somme de cette aire et de celle du segment OCB est égale à l'aire du parallélogramme OABCO, on en conclura que si l'on pouvait déterminer le rapport des deux aires OAB $=$ S et OCB $= s$, il serait facile d'en déduire les valeurs de chacune d'elles.

Je divise OA en un nombre quelconque n de parties OA_1, A_1A_2,.. $A_{n-1}A$; je mène les ordonnées A_1M_1, A_2M_2,.. $A_{n-1}M_{n-1}$, et je tire par chacun des points M_1, M_2,... M_{n-1}, des parallèles au diamètre OX. Nous formerons ainsi deux séries de parallélogrammes P_1, P_2,.... P_{n-1}, et p_1, p_2,... p_{n-1} intérieurs, les uns au segment OAB, et les autres au segment OCB : S et s sont les limites respectives vers lesquelles tendront la somme des premiers et la somme des seconds, lorsque n deviendra plus grand que toute quantité assignable (note du n° **296**).

Désignons les coordonnées des points M_1, M_2,... M_{n-1}, respectivement par (x_1, y_1), (x_2, y_2),... (x_{n-1}, y_{n-1}), celles du point B par (a, b), et l'angle des axes par θ : nous aurons évidemment

$$P_1 = y_1(x_2 - x_1)\sin\theta, \quad p_1 = x_1(y_2 - y_1)\sin\theta;$$

donc

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{x_1(y_2 - y_1)}.$$

Mais

$$y_1^2 = 2px_1, \; y_2^2 = 2px_2, \text{ partant } \frac{P_1}{p_1} = \frac{y_2 + y_1}{y_1} = 1 + \frac{y_2}{y_1};$$

par conséquent aussi

$$\frac{P_2}{p_2} = 1 + \frac{y_3}{y_2}, \; \frac{P_3}{p_3} = 1 + \frac{y_4}{y_3}, \ldots\ldots \frac{P_{n-1}}{p_{n-1}} = 1 + \frac{b}{y_{n-1}}.$$

Comme l'espacement des points A_1, A_2,... A_{n-1} est tout à fait arbitraire, on peut supposer que l'on ait divisé l'intervalle OA de telle manière que les rapports $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2}, \ldots \frac{b}{y_{n-1}}$ soient égaux, c'est-à-dire que les ordonnées des points de division for-

ment une progression par quotient; alors tous les rapports $\frac{P_1}{p_1}, \frac{P_2}{p_2}, \ldots \frac{P_{n-1}}{p_{n-1}}$ seront égaux, et on aura par conséquent

$$\frac{P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}}=\frac{P_{n-1}}{p_{n-1}}=1+\frac{b}{y_{n-1}}.$$

Or, on peut prendre n assez grand pour que l'ordonnée y_{n-1} diffère de b d'aussi peu qu'on voudra; donc le second membre de cette équation tendra vers le nombre 2, à mesure que n augmentera; mais en même temps le premier convergera vers le rapport $\frac{S}{s}$; donc, en vertu du principe des limites (*Arithmétique*, **210**), on aura

$$\frac{S}{s}=2, \quad \text{d'où} \quad \frac{S+s}{S}=\frac{3}{2},$$

et comme $S+s=ab\sin\theta$, on aura enfin

$$S=\frac{2}{3}ab\sin\theta \quad \text{et} \quad s=\frac{1}{3}ab\sin\theta.$$

Ainsi, *l'aire du segment parabolique compris entre la courbe, un diamètre et une ordonnée à ce diamètre, est les deux tiers du parallélogramme déterminé par cette ordonnée et la partie correspondante de ce diamètre.*

On trouvera facilement que l'aire du segment OBO, compris entre un arc de parabole et sa corde, a pour expression

$$\frac{1}{6}ab\sin\theta.$$

§ VI. Applications.

386. PROBLÈMES. I. *Decrire une parabole dont on connaît le foyer et deux points. — Trouver l'équation de cette courbe.*

II. *Construire une parabole qui ait pour sommet un point donné* A, *et qui touche une droite donnée* MT *en un point donné* M.

Joignez AM et décrivez sur cette droite une circonférence; Fig. 133
puis prolongez MA d'une quantité AM' = MA, tirez par le point M' une parallèle à MT, et, en joignant le point A avec un des points où cette parallèle rencontre la circonférence,

vous aurez la direction de l'axe et le pied de l'ordonnée du point M, etc. (366 et 372).

Résoudre le même problème par le calcul. Prenez MT pour axe des x et la perpendiculaire menée à cette tangente par le point M pour axe des y. L'équation de la parabole demandée sera de la forme

$$y^2+2axy+a^2x^2+by=0,$$

et si (α, β) désignent les coordonnées du sommet A, on aura

$$\beta^2+2a\alpha\beta+a^2\alpha^2+b\beta=0 \qquad [7].$$

Le coefficient angulaire d'un diamètre quelconque étant (190) $-a$, on obtiendra l'équation de l'axe en faisant $m=\frac{1}{a}$ dans la formule [5] du nº 188, appliquée à l'équation proposée, et en écrivant ensuite que cet axe passe par le point A, on trouvera

$$2\alpha a^3+2\beta a^2+2\alpha a+2\beta+b=0 \qquad [8].$$

Il ne s'agira plus que de tirer des équations [7] et [8] les valeurs de a et de b, et de les substituer dans l'équation de la courbe.

Si le point de contact n'est pas donné, il y aura une infinité de paraboles qui, ayant le point A *pour sommet commun, pourront être tangentes à la droite* MT : *trouver le lieu des foyers de toutes ces paraboles.*

Prenez le point A pour origine, une perpendiculaire et une parallèle menées par ce point à la tangente MT pour axes des y et des x, et faites usage de l'équation aux foyers; vous aurez immédiatement les deux équations de condition

$$n^2+m^2=1, \quad \alpha^2+\beta^2=p^2.$$

Vous exprimerez que l'origine est un sommet, en écrivant que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice passe par le foyer, ce qui vous donnera

$$\beta=\frac{m}{n}\alpha;$$

enfin si $y=a$ est l'équation de la droite MT, il faudra que les abscisses des points où elle coupe la parabole soient égales.

Il ne s'agira plus alors que d'éliminer m, n et p entre l'équation qui exprimera cette condition et les trois précédentes, et vous trouverez

$$x^2+ay=0$$

pour l'équation du lieu.

Décrire la courbe par points, et déduire ensuite son équation de ce tracé. Je mène par A une droite quelconque AV que je suppose être l'axe de l'une des paraboles ; puis j'élève au point A une perpendiculaire sur cette droite, et par le point I où elle coupe MT, je tire une perpendiculaire à cette tangente. Le point F où elle rencontrera AV sera le foyer, etc.

III. *Quelle est la courbe décrite par le sommet d'une équerre dont les deux côtés restent constamment tangents à une ellipse donnée ?*

L'équation d'une tangente quelconque est

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}:$$

or, si on regarde x et y comme les coordonnées d'un point donné, cette équation déterminera, en fonction de ces coordonnées, les inclinaisons sur l'axe des x des deux tangentes issues de ce point, de sorte qu'en exprimant que ses racines sont réciproques et de signes contraires, on aura l'équation du lieu. C'est $x^2+y^2=a^2+b^2$.

Si l'on savait a priori *que ce lieu est une courbe du second ordre, pourrait-on en trouver les éléments ? — Si l'équerre glissait sur une hyperbole au lieu de se mouvoir sur une ellipse, quelle serait l'équation du lieu ? — Qu'arrivera-t-il si* $b > a$? — *Expliquer ce résultat.*

Quel serait le lieu, si la courbe directrice était une parabole ?

IV. *Décrire une courbe du second ordre qui touche trois droites données, et ait pour foyer un point donné.*

Abaissez du foyer donné F des perpendiculaires sur les trois tangentes, et par les pieds de ces perpendiculaires faites passer une circonférence de cercle ; son centre sera celui de l'ellipse ou de l'hyperbole demandée, et en tirant par ce centre et par le point F un diamètre du cercle, vous aurez en grandeur et en position le grand axe ou l'axe transverse de cette courbe. Elle sera une ellipse ou une hyperbole suivant que le

point F sera intérieur ou extérieur à la circonférence, et si cette circonférence n'avait pas pu être tracée, c'est-à-dire, si les pieds des trois perpendiculaires étaient en ligne droite, la courbe demandée serait une parabole qui serait touchée par cette droite en son sommet.

Si l'*on demande l'équation de la courbe trouvée*, il n'y aura qu'à partir de l'équation aux foyers, en prenant le point F pour origine des coordonnées rectangulaires.

V. *Décrire une courbe du second ordre connaissant son foyer, sa directrice et une de ses tangentes.*

Chercher l'équation de cette courbe.

VI. *Étant donné un arc d'une courbe du second ordre, déterminer la nature de cette courbe et ses éléments géométriques.*

Fig. 134 Tracez dans cet arc deux cordes parallèles quelconques, joignez leurs milieux, et vous aurez ainsi un diamètre. Tirez de même un second diamètre, et alors ces deux diamètres se couperont ou ils seront parallèles. Dans ce dernier cas, la courbe est une parabole, et dans le premier, c'est une ellipse ou une hyperbole, selon que le point d'intersection des deux diamètres est situé dans la concavité de l'arc ou qu'il ne s'y trouve pas.

1° *L'arc donné est elliptique*. Je mène par le centre O une parallèle OB à MN, et si cette droite rencontre l'arc, j'ai deux diamètres conjugués en grandeur et en direction. Si la droite OB ne rencontre pas l'arc donné, je tire par le point C une parallèle à P'Q', et cette ligne sera une tangente; donc si l'on appelle (x', y') les coordonnées de C par rapport aux droites OA et OB, qui sont les directions de deux diamètres conjugués, son équation sera

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2,$$

$2b$ représentant la longueur du diamètre inconnu BB'; de sorte qu'en faisant $x=0$, cette équation donnera

$$yy'=b^2, \quad \text{c'est-à-dire}, \quad OK.OT=b^2;$$

ainsi on obtiendra b en cherchant une moyenne proportionnelle entre OK et OT. Connaissant ainsi deux diamètres conjugués de grandeur et de position, il sera facile d'obtenir les axes de l'ellipse (295).

2° *L'arc donné est hyperbolique*. Répétez la construction précédente, en ayant recours à la méthode du n° **312**, quand vous aurez obtenu les directions de deux diamètres conjugués.

Remarquons que si du point O comme centre, on peut décrire une circonférence qui coupe l'arc donné en deux points, et c'est ce qui arrivera le plus souvent, on obtiendra immédiatement les directions des axes et la longueur de l'un d'eux, en joignant un des points d'intersection avec les extrémités du diamètre tiré par l'autre, et menant par le centre des parallèles à ces deux cordes supplémentaires, et la construction précédente déterminera ensuite le second axe.

3° *L'arc donné est parabolique*. Les données résultant du tracé des deux diamètres sont un diamètre, son extrémité, la direction de ses cordes conjuguées et un point de la parabole; ainsi il est facile de déterminer les éléments de cette courbe (**364**).

VII. *Déterminer le lieu des sommets de toutes les paraboles comprises dans l'équation*

$$y^2-2axy+a^2x^2-x=0,$$

a *étant une quantité variable. — Discuter l'équation.*

VIII. *Décrire une parabole connaissant, 1° un foyer, une tangente et un point; 2° la directrice et deux tangentes; 3° la directrice, une tangente et un point. — Trouver l'équation de la courbe ainsi tracée.*

IX. *Construire une parabole connaissant son foyer, son paramètre et un de ses points. — Chercher l'équation de cette parabole. — Discussion.*

X. *Décrire une parabole connaissant son sommet, son paramètre et un de ses points. — Trouver l'équation de cette courbe.*

La distance d'un point de la parabole au sommet est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'axe et cette même projection augmentée du paramètre.

XI. *Trouver le lieu des sommets de toutes les paraboles qui ont le même foyer* F, *et passent par le même point* A. *— Construire le lieu par points. — Chercher l'équation de la courbe ainsi décrite.*

XII. *Trouver le lieu des projections du foyer d'une parabole sur toutes ses normales. — Discuter l'équation trouvée. — Si l'on savait* a priori *que le lieu est une courbe du second ordre, serait-il possible de déterminer ses éléments? — Pourrait-on résoudre le problème proposé par de pures considérations géométriques?*

XIII. *Trouver l'équation du lieu des foyers de toutes les hyperboles comprises dans l'équation* $xy = ax + by$, *en supposant que le sommet de chacune soit assujetti à rester sur la parabole* $ay = x^2$, a *et* b *étant deux variables.*

XIV. *Couper un hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.* — En prenant la hauteur du segment pour inconnue, on trouvera $x^3 - 3rx^2 + r^3 = 0$. — *Combien cette équation a-t-elle de racines réelles? — Vérifiez-le. — La nature de la question indique-t-elle entre quelles limites se trouvent les racines positives? — Vérifiez-le. — Construisez la valeur de* x. Posez $x^2 = ry$ (88 et 89).

CHAPITRE XIV.

ÉQUATIONS POLAIRES DES COURBES DU SECOND ORDRE.

387. Nous nous proposons ici de trouver les équations polaires des trois courbes du second ordre, en prenant pour axe polaire l'*axe focal* de chacune de ces courbes et en plaçant le pôle au foyer positif.

Supposons donc que xX étant l'axe focal, F le foyer et O l'origine des coordonnées rectangulaires, M soit un point de la courbe : si l'on désigne par x et y ses coordonnées rectilignes, par ρ et ω ses coordonnées polaires, et par c l'abscisse du foyer, on aura dans le triangle rectangle FMP Fig. 28

$$x=c+\rho\cos\omega \quad \text{et} \quad y=\rho\sin\omega \qquad [1],$$

et ces formules, qui serviront à rapporter la courbe au système des coordonnées polaires que nous avons choisi, sont générales, comme il est facile de s'en assurer. Cela posé, considérons successivement chacune des trois courbes du second ordre.

388. Ellipse. On pourrait obtenir l'équation polaire de cette courbe en remplaçant, dans l'équation aux axes

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0,$$

x et y par leurs valeurs données par les formules [1]; mais il sera plus simple d'observer que la distance du foyer positif à l'un quelconque des points de l'ellipse ayant pour expression (**266**)

$$\delta=a-\frac{cx}{a};$$

il suffira pour résoudre le problème de remplacer δ par ρ et x par sa valeur $c+\rho\cos\omega$. On trouvera ainsi

$$\rho=\frac{b^2}{a+c\cos\omega},$$

car $c^2=a^2-b^2$. Telle est l'équation polaire de l'ellipse.

389. Hyperbole. En supposant cette courbe rapportée à ses axes principaux, on a trouvé qu'en appelant δ la distance du foyer positif à un point quelconque de la branche positive ou de la branche négative, dont l'abscisse est x, on a trouvé (**318**), dis-je,

$$\delta = \frac{cx}{a} - a, \qquad \text{ou} \qquad \delta = -\frac{cx}{a} + a.$$

En remplaçant encore dans ces formules δ par ρ et x par la valeur donnée par la première des formules [1], il viendra

$$\rho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega}, \quad \text{ou} \quad \rho = -\frac{b^2}{a + c\cos\omega},$$

puisqu'ici $c^2 = a^2 + b^2$. Dans la discussion de ces formules, il faudra rejeter avec soin les valeurs négatives de ρ; car elles proviennent d'équations où δ, c'est-à-dire ρ, était une quantité essentiellement positive. Il résulte de cette restriction que la première représente uniquement la branche positive de l'hyperbole et que la branche négative est le lieu de la seconde. Mais, comme on arrive aux mêmes formules, en partant de l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes principaux* et qu'alors la restriction précédente n'est plus nécessaire, nous regarderons ρ comme pouvant admettre indifféremment des valeurs positives et négatives, en convenant que *les valeurs négatives du rayon vecteur devront être portées, de l'autre côté du pôle, sur le prolongement de ce rayon.* De cette manière, l'une ou l'autre des deux équations précédentes suffira pour représenter l'hyperbole tout entière, ce qui sera beaucoup plus commode et plus conforme à la généralité de l'algèbre. Supposons, en effet, que pour $\omega = \omega'$ la première équation donne pour ρ une valeur positive $\frac{b^2}{a - c\cos\omega'} > 0$; si

---

* En effectuant ce calcul, on trouvera

$$(a^2 \sin^2\omega - b^2 \cos^2\omega)\rho^2 - 2b^2 c\rho \cos\omega - b^4 = 0,$$

d'où l'on tirera facilement

$$\rho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega}, \quad \rho = -\frac{b^2}{a + c\cos\omega}.$$

l'on fait dans la seconde $\omega = 180^\circ + \omega'$, il viendra

$$\rho = -\frac{b^2}{a - c\cos\omega'};$$

donc pour construire le point

$$\left(\omega = 180^\circ + \omega', \rho = -\frac{b^2}{a - c\cos\omega'}\right)$$

il faudra tirer par le pôle une droite OE' qui fera avec l'axe polaire un angle $\omega = 180^\circ + \omega'$, et porter la quantité $\frac{b^2}{a - c\cos\omega'}$ sur son prolongement OM, ce qui donnera le point Fig. 63

$$M\left(\omega = \omega', \rho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega'}\right)$$

déjà donné par la première équation. Les valeurs négatives de ρ, données par la seconde formule, construisent donc les points déterminés par les valeurs positives de ρ fournies par la première, et réciproquement. Donc une seule équation suffit pour représenter l'hyperbole.

390. Nous allons discuter la première équation

$$\rho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega}.$$

Je remarque que si l'on fait $\omega = 360^\circ - \omega'$, on trouvera la même valeur de ρ que pour $\omega = \omega'$; si donc M est le point dont le rayon vecteur fait l'angle ω' avec l'axe polaire OX, on aura celui qui correspond au rayon vecteur dont l'inclinaison sur cet axe est $360^\circ - \omega'$, en abaissant de M la perpendiculaire MP sur xX, et la prolongeant d'une quantité M'P=MP. La courbe est donc symétrique de part et d'autre de l'axe polaire. D'un autre côté, en donnant à ω des valeurs plus grandes que 360°, on obtiendra les mêmes valeurs de ρ que pour $\omega < 360^\circ$, de sorte qu'on retrouvera les mêmes points de la courbe. Il suffira donc de faire croître ω d'une manière continue depuis 0° jusqu'à 180°, de tracer la portion de courbe correspondante, et, en abaissant de chacun des points ainsi trouvés des perpendiculaires sur l'axe polaire et en les prolongeant de quantités égales à elles-mêmes, on aura le lieu de l'équation proposée.

En faisant varier ω comme nous venons de l'indiquer, on formera le tableau suivant dans lequel α représente le plus

petit de tous les arcs positifs qui ont $\frac{a}{c}$ pour cosinus :

Fig. 63 $\omega=0$ . . . . . . $\rho=\frac{b^2}{a-c}=-(c+a)=CO+CA'=OA'$;
ω aug$^{te}<\alpha$ . . . . ρ aug^{te} négativement;
$\omega=\alpha$ . . . . . . $\rho=-\infty$.
ω aug$^{te}<\frac{\pi}{2}$. . . . ρ diminue;
$\omega=\frac{\pi}{2}$ . . . . . . $\rho=\frac{b^2}{a}$;
ω aug$^{te}<\pi$ . . . ρ diminue;
$\omega=\pi$ . . . . . . $\rho=\frac{b^2}{a+c}=c-a=CO-CA=OA$.

On conclut de là que la courbe pousse une branche qui, à partir du point A', s'éloigne indéfiniment du pôle O, en s'étendant au-dessous de l'axe polaire. Une seconde branche, située au-dessus de cet axe, vient de l'infini positif, s'approche de plus en plus du pôle, coupe la perpendiculaire OK à la distance $\frac{b^2}{a}$, et se termine sur l'axe polaire au point A. Il s'agit de savoir si la droite qui fait avec l'axe polaire l'angle α est une asymptote. C'est ce que nous avons examiné au n° **175**, et nous avons trouvé qu'il y avait deux asymptotes inclinées de ces angles α et $360^0-\alpha$ sur l'axe fixe, et qui sont distantes du pôle de la quantité b. Nous en avons donné la construction.

Il ne nous reste plus qu'à savoir comment est dirigée la tangente aux points A et A'. Or, nous avons trouvé (**175**)

$$OT=-\frac{b^2}{c\sin\omega},$$

pour expression de la sous-tangente polaire, et cette sous-tangente devient infinie pour $\omega=0^\circ$ et $\omega=\pi$, ce qui indique que les tangentes aux points A et A' sont perpendiculaires à l'axe polaire.

391. Parabole. Nous avons vu (**358**) qu'en rapportant la parabole à son axe et à la tangente au sommet, la longueur du rayon vecteur mené du foyer à un point quelconque de la courbe avait pour expression

$$\delta=x+\frac{p}{2};\qquad \text{or, ici } c=\frac{p}{2},\qquad \text{donc}\qquad \rho=\frac{p}{1-\cos\omega}.$$

Telle est l'équation polaire de la parabole.

392. Lorsqu'on veut déterminer la position d'un point quelconque au moyen de ses coordonnées polaires, il suffit de faire varier l'angle ω de $0°$ à $360°$, et le rayon vecteur ρ depuis zéro jusqu'à $+\infty$: il n'est, en effet, aucun point du plan qu'on ne puisse atteindre de cette manière. Mais ces limites ne sont plus assez étendues, lorsque les points que l'on veut fixer sur le plan, au lieu d'être isolés, sont liés entre eux par une loi exprimée algébriquement. Dans ce cas, *il faut*, pour donner aux formules toute la généralité possible, *faire varier les quantités* ρ *et* ω *depuis* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$. C'est ce que l'exemple suivant mettra hors de doute.

Considérons l'hyperbole équilatère BACB'A'C' Fig. 135

rapportée aux axes rectangulaires Xx et Yy, et dont l'équation est

$$y^2 - x^2 + a^2 = 0.$$

Prenons sur l'axe des y un point quelconque F, et supposons que l'on enroule l'axe des x sur la circonférence d'un cercle décrit de F comme centre avec le rayon $FO = r$, la partie OX de droite à gauche, et la partie Ox de gauche à droite, et qu'en même temps chaque point de cet axe emporte avec lui l'ordonnée correspondante; de cette manière, le point P étant venu se placer en P', la double ordonnée MPN se sera couchée sur FP'; et en prenant sur cette direction P'M' = PM, P'N' = PN, les points M' et N' seront les rabattements des points M et N. Nous aurons ainsi deux branches de courbe partant de A_1 (l'arc OA_1 est égal en longueur à la droite $OA = a$) et faisant une infinité de circonvolutions autour de F en allant de droite à gauche. La branche B'A'C' produira semblablement deux branches qui tourneront de gauche à droite, et qui seront symétriques des deux premières par rapport à l'axe des y.

Nous allons chercher l'équation polaire de la courbe ainsi engendrée, en prenant le point F pour pôle et FY pour axe polaire. Puisque l'arc OP' est égal à l'abscisse $OP = x$ du point M, l'arc ω qui mesure l'angle YFP' est égal à $\frac{x}{r}$; car les arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons, et celui de ω est l'unité; ainsi
$$\omega = \frac{x}{r}.$$

D'un autre côté, il est évident que

$$\rho=r+y,$$

et que par conséquent en éliminant x et y entre ces deux équations et l'équation

$$y^2-x^2+a^2=0$$

de la courbe proposée, on aura l'équation polaire de la nouvelle courbe. Cette équation est

$$(\rho-r)^2-r^2\omega^2+a^2=0 \qquad [2].$$

Pour la discuter, je la résous par rapport à ρ, ce qui donne

$$\rho=r\pm\sqrt{r^2\omega^2-a^2},$$

et je suppose que l'on fasse croître ω positivement et d'une manière continue à partir de zéro. Si l'on convient de représenter par ρ_1 et par ρ_2 les valeurs de ρ qui correspondent respectivement au signe supérieur et au signe inférieur, on formera le tableau suivant:

$\omega<\frac{a}{r}$ donne	ρ_1 imaginaire. . . .	ρ_2 imaginaire,
$\omega=\frac{a}{r}$.	$\rho_1=r$.	$\rho_2=r$,
ω aug^te^.	ρ_1 aug^te^.	ρ_2 diminue,
$\omega=\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{r}$. . . .	$\rho_1=2r$.	$\rho_2=0$.

Ainsi du point A_1 partent deux branches de courbe, dont l'une s'éloigne continuellement du pôle, tandis que l'autre s'en approche, au contraire, de plus en plus, et l'atteint quand l'angle ω est égal à $\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{r}$. Si ω continue d'augmenter, ρ_1 continue d'augmenter, mais ρ_2 devient négatif; si donc on ne voulait pas admettre de valeurs négatives pour le rayon vecteur, la seconde branche s'arrêterait brusquement au point F; et si l'on bornait à 360° les valeurs de l'angle ω, la première branche s'arrêterait aussi, au bout d'une révolution. Or, on voit que, quand l'ordonnée NP est égale à r, le point N vient se placer au centre F du cercle; et que, quand cette ordonnée surpasse r, le point N se rabat sur le rayon P'F prolongé, à

une distance de F égale à l'excès de l'ordonnée NP sur le rayon FP′, c'est-à-dire égale à la valeur absolue de ρ_2. Donc, pour reproduire la courbe proposée, *il faut nécessairement faire croître* ω *jusqu'à* $+\infty$, *et admettre les valeurs négatives du rayon vecteur, mais en les comptant sur le prolongement du rayon qui fait l'angle correspondant* ω *avec l'axe polaire*. On trouvera de cette manière toutes les circonvolutions que forment les deux branches issues de A_1; mais l'équation [2] ne représentera rien de plus, si l'on ne veut pas admettre de valeurs négatives pour ω, de sorte qu'en la construisant, on n'obtiendra qu'une moitié du lieu. Il faut donc faire varier ω négativement.

Or, en changeant ω en $-\omega$, l'équation [2] ne change pas; donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire FY, comme cela doit être.

Cherchons la tangente en un point quelconque (ρ, ω). Nous ferons, pour cela, le calcul suivant :

$$(2\rho-2r+k)k-r^2(2\omega+h)h=0, \quad \lim\frac{h}{k}=\frac{\rho-r}{r^2\omega},$$

$$\text{tang}\,M=\frac{\rho(\rho-r)}{r^2\omega}.$$

Au point A_1, $\omega=\frac{a}{r}$, $\rho=r$: donc tang $M=0$, ainsi le rayon FA_1 est tangent à la courbe en ce point; et, en effet, la tangente en A étant perpendiculaire à l'axe des x a dû prendre la position FA_1. La courbe présente donc au point A_1 sa convexité au rayon FA_1.

CHAPITRE XV.

DU POLE ET DE LA POLAIRE.

*393. Lemme. *Le lieu des points harmoniques conjugués d'un point donné, par rapport aux extrémités des cordes que laissent dans une courbe du second ordre une infinité de sécantes issues de ce point, est une ligne droite.*

Prenons pour axe des x le diamètre tiré par le point donné A, et pour axe des y une parallèle menée par ce point aux cordes conjuguées de ce diamètre : l'équation de la courbe du second ordre sera de la forme

$$Ay^2+Cx^2+Ex+F=0 \qquad [1].$$

Fig. 136 Cela posé, soit AC une sécante quelconque menée par A, M l'harmonique conjugué de ce point par rapport aux extrémités de la corde M'M''. Les projections A, P', P, et P'' des quatre points A, M', M et M'' formeront aussi un système harmonique, et réciproquement, de sorte que si l'on désigne par x', x et x'' les abscisses respectives des points M', M et M'', on aura

$$x':x-x'::x'':x''-x,$$

d'où

$$2x'x''-x(x'+x'')=0.$$

Or, l'équation de la sécante AC est de la forme

$$y=mx,$$

et si l'on élimine y entre cette équation et celle de la courbe, l'équation finale

$$(Am^2+C)x^2+Ex+F=0$$

aura pour racines les abscisses x' et x'' des points B et C; donc

$$x'+x''=-\frac{E}{Am^2+C}, \quad x'x''=\frac{F}{Am^2+C},$$

et par conséquent

$$Ex+2F=0 \qquad [2].$$

Telle est l'équation du lieu, qui est ainsi une ligne droite

parallèle aux cordes conjuguées du diamètre tiré par le point donné.

* **394.** Problème. *Par un point fixe on mène tant de couples de sécantes que l'on voudra à une courbe du second ordre, trouver le lieu des points de concours des droites qui joindront les points où ces sécantes rencontrent cette courbe.*

Soient AC et AC′ un couple de sécantes, il s'agit de trouver le lieu des points M et M′. Désignons, pour cela, par N et par N′, les points harmoniques conjugués de A relativement à B et à C, et à B′ et à C′ : joignons MA et MN, et nous formerons un faisceau harmonique MABNC, qui devra couper AC′ en parties harmoniques (**138**); par conséquent, MN ira passer par N′; donc, le point M est situé sur la direction indéfinie de la droite qui est le lieu des points harmoniques conjugués de A par rapport à la courbe proposée; et comme on en dirait autant du point M′, il faut en conclure que cette droite est précisément le lieu que l'on cherche. Fig. 137

* **395.** Le lieu des points M se nomme *la polaire* du point A, et ce point est appelé réciproquement *le pôle* de cette droite. Nous verrons bientôt la raison de ces dénominations (**401** et **405**).

* **396.** Nous pourrons, d'après cela, énoncer le lemme (**393**) en disant que *toutes les cordes dont les directions vont passer par un même point intérieur ou extérieur à une courbe du second ordre, sont coupées en parties harmoniques par ce point et par sa polaire, laquelle est parallèle aux cordes conjuguées du diamètre tiré par ce point.*

Si le pôle est au centre, $E=0$; et la valeur de x tirée de l'équation [2] est $-\frac{2F}{0}$; donc *la polaire du centre est située à l'infini.*

* **397.** Si la courbe est une parabole, $C=0$, et alors l'abscisse du sommet est $-\frac{F}{E}$, tandis que celle du pied de la polaire est $-\frac{2F}{E}$; ainsi, *dans la parabole, un point et sa polaire déterminent des segments égaux sur le diamètre tracé par ce point.*

* **398.** Il suit du n° **393** que si l'on prend pour axe des

abscisses le diamètre passant par le pôle, et pour axe des y la parallèle menée par ce point aux cordes conjuguées de ce diamètre, les équations de la courbe et de la polaire seront respectivement

$$Ay^2+Cx^2+Ex+F=0$$

et

$$Ex+2F=0.$$

Or, si l'on cherche l'équation de la corde qui joindrait les points de contact de deux tangentes issues du pôle (**279**), on trouvera que l'équation de cette corde est aussi

$$Ex+2F=0;$$

donc, *la polaire d'un point extérieur à une courbe du second ordre est la droite indéfinie qui passe par les points de contact des deux tangentes issues de ce point**, et le pôle d'une sécante est le point de concours des tangentes menées aux points où elle rencontre la courbe.*

Si le pôle est intérieur à la courbe, la corde qui joindrait les points de contact des tangentes issues de ce point n'existe plus, mais son équation subsiste toujours : seulement, si l'on cherchait les coordonnées des points où la droite, représentée par cette équation, rencontre la courbe, on trouverait pour valeurs de ces coordonnées, des expressions imaginaires. Ainsi donc, *pour obtenir l'équation de la polaire d'un point donné, il n'y aura qu'à opérer comme si l'on voulait trouver l'équation de la corde de contact* (**279**) *des deux tangentes issues de ce point***.

* **399.** La polaire d'un point extérieur à une courbe du second ordre étant la corde de contact des deux tangentes issues de ce point, on en conclut que, *pour mener à une pareille courbe une tangente par un point extérieur, il n'y aura qu'à chercher la polaire de ce point* (**394**) *et le joindre avec les points où elle coupera la courbe*. Cette construction peut, comme on voit, s'exécuter avec la règle seulement.

---

* C'est là une conséquence de la définition même de la polaire; car si la sécante AC′ devient tangente, les points M et M′ viendront coïncider avec le point de contact T, de sorte que la polaire passera par ce point.

** C'est ainsi qu'on obtient l'équation de l'axe radical de deux cercles, en cherchant l'équation de la corde qui joint leurs points d'intersection (**131**), lors même qu'ils ne se coupent pas.

*400. *Toute droite a-t-elle un pôle?* Je prends cette droite pour axe des y, et je compte les abscisses sur le diamètre dont les cordes conjuguées lui sont parallèles; de cette manière, l'équation de la courbe sera de la forme

$$Ay^2+Cx^2+Ex+F=0,$$

et, par conséquent, celle de la polaire d'un point quelconque (α, β) sera (398 et 145)

$$2A\beta y+(2C\alpha+E)x+E\alpha+2F=0 \qquad [3].$$

Si donc on veut que le point (α, β) soit le pôle de la droite donnée, il faudra que cette équation se réduise à

$$x=0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\beta=0 \quad \text{et} \quad E\alpha+2F=0 \qquad [4];$$

donc toute droite a un pôle qui est situé sur le diamètre dont les cordes conjuguées sont parallèles à cette droite.

Ce pôle est situé à l'infini, si la droite donnée passe par le centre, puisque alors $E=0$.

*401. Théorème. *Si un point mobile glisse le long d'une ligne droite, sa polaire tournera autour du pôle de cette droite.*

Prenons, en effet, cette droite pour axe des y, et pour axe des x le diamètre dont les cordes conjuguées lui sont parallèles, l'équation de la polaire d'un point quelconque $(0, \beta)$ de cette droite sera (398)

$$2A\beta y+Ex+2F=0.$$

L'abscisse à l'origine de cette droite est indépendante de β; et comme cette abscisse est précisément la valeur de α donnée par la formule [4], on conclut que *les polaires de tous les points de la droite donnée vont se croiser au pôle même de cette droite.*

*402. Corollaire I. *Pour obtenir le pôle d'une droite, il suffira de construire les polaires de deux de ses points, et le point d'intersection de ces deux polaires sera le point demandé.*

*403. Corollaire II. *Pour mener une tangente à une courbe du second ordre par un point pris sur cette courbe,*

tirez une sécante quelconque par ce point, cherchez son pôle et joignez-le au point donné.

*404. Corollaire III. *Si plusieurs angles circonscrits à une courbe du second ordre ont leurs sommets en ligne droite, leurs cordes de contact iront concourir en un même point, situé sur le diamètre dont les cordes conjuguées sont parallèles à cette droite;* car ces cordes sont les polaires de ces sommets. Cette propriété résulte très-simplement de la considération des valeurs que nous avons trouvées (279, 330 et 369) pour construire la droite qui joint les points de contact de deux tangentes issues du même point.

*405. Théorème. *Si une droite tourne autour d'un point fixe, son pôle décrira la polaire de ce point.*

Prenons, en effet, pour axe des x le diamètre tiré par ce point, et comptons les ordonnées sur une parallèle menée par ce point aux cordes conjuguées de ce diamètre. La courbe du second ordre et la polaire d'un point quelconque (α, β) seront représentées par les équations [1] et [3]; mais si l'on veut que ce point soit le pôle d'une droite passant par le point donné, il faudra que l'équation [3] soit vérifiée par $x=0$ et $y=0$; donc

$$E\alpha+2F=0.$$

Cette équation étant indépendante de β, et n'étant autre que l'équation [2] dans laquelle on a remplacé x par α, on en conclut que *le pôle de toute droite menée par le point donné, est situé sur la polaire de ce point.*

*406. Corollaire I. *La droite qui joint les pôles de deux droites est la polaire de leur point d'intersection;* car le pôle de cette droite doit se trouver à la fois sur ces deux polaires.

*407. Corollaire II. *Si les cordes de contact de tant d'angles que l'on voudra circonscrits à une courbe du second ordre, concourent en un même point, les sommets de ces angles se trouveront sur une même droite parallèle aux cordes conjuguées du diamètre qui passe par ce point;* car ces sommets sont les pôles de ces cordes.

Fig. 138 *408. Il suit du n° 406, que *si deux polygones d'un même nombre de côtés tracés sur le plan d'une courbe du second ordre, sont tels que les sommets* A, B, C,.... *de l'un*

soient les pôles des côtés a, b, c,.... *de l'autre, réciproquement les sommets* ab, bc,..... *du second* (deux droites étant désignées en général par *m* et par *n*, leur point d'intersection pourra l'être par *mn*) *seront les pôles des côtés* AB, BC... *du premier, et de plus le point de concours de deux côtés ou de deux diagonales quelconques de l'un sera le pôle de la droite qui joindra les sommets-pôles de ces deux côtés ou les pôles de ces deux diagonales dans l'autre*. Ainsi, par exemple, le point *ad* de concours des deux côtés *a* et *d*, est le pôle de la droite AD qui joint les sommets A et D, pôles respectifs de *a* et de *d*.

A raison de ces deux propriétés corrélatives, les deux polygones sont appelés *polaires réciproques* l'un de l'autre, par rapport à la courbe qui est dite leur *directrice*.

Ce théorème, qui s'étend à des courbes quelconques, puisqu'il est indépendant du nombre et de la grandeur des côtés des polygones, sert de base à une belle théorie que son auteur, M. *Poncelet*, a nommée *Théorie des polaires réciproques*, et de laquelle il a déduit une multitude de belles propositions qu'il serait fort difficile de démontrer d'une autre manière.

CHAPITRE XVI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES DU SECOND ORDRE.

409. Problème. *Étant donnée une équation à deux variables et à coefficients arbitraires, déterminer ces coefficients de manière que la courbe qu'elle représente passe par certains points donnés* (a, b), (a', b'), (a'', b''),...

Soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation proposée : puisque la courbe qu'elle représente passe par le point (a, b), il faut et il suffit que cette équation soit vérifiée, quand on y remplacera x et y, respectivement par a et b; donc

$$\varphi(a, b) = 0.$$

Il est clair que nous aurons autant d'équations analogues à celles-ci, qu'il y a de points par lesquels la courbe doit passer; et comme ces équations ne renfermeront pas d'autres inconnues que les coefficients arbitraires de la proposée, elles serviront à les déterminer.

Supposons que l'équation $\varphi(x, y) = 0$ soit la plus générale du degré m : elle renfermera donc $\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}$ termes, et par conséquent $\frac{(m+1)(m+2)}{1.2} - 1 = \frac{m(m+3)}{2}$ coefficients arbitraires, puisqu'on peut toujours réduire à l'unité le coefficient de l'un quelconque de ses termes. Donc, on ne peut pas se proposer de faire passer une courbe de l'ordre m par plus de $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés. Ainsi, *on ne saurait tracer une courbe du second ordre par plus de cinq points pris au hasard.*

Les équations de condition étant du premier degré par rapport aux coefficients arbitraires de l'équation $\varphi(x, y) = 0$, on voit qu'on en tirera toujours des valeurs réelles pour ces coefficients; de sorte qu'il est *généralement* possible de faire passer une *courbe* de l'ordre m par $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés; je dis généralement, parce que plusieurs des équations de con-

dition pourraient être contradictoires. C'est ce qui arriverait nécessairement, si $(m+1)$ des points donnés étaient situés en ligne droite (63).

Si le nombre des points donnés était moindre que $\frac{m(m+3)}{2}$, le problème serait indéterminé, et il y aurait par conséquent une infinité de courbes de l'ordre m qui pourraient passer par ces points*.

410. PROBLÈME. *Trouver l'équation d'une courbe du second ordre assujettie à passer par cinq points donnés sur un plan.*

---

* Il suit de cette théorie, que le nombre des points nécessaires pour déterminer une courbe donnée par son équation la plus générale, c'est-à-dire, quand cette courbe occupe une position quelconque par rapport aux axes des coordonnées, est égal au nombre des constantes arbitraires contenues dans cette équation. Observons toutefois que cette règle pourrait indiquer un nombre de points trop considérable, si, dans l'équation proposée, le nombre des termes distincts renfermant les constantes arbitraires, était moindre que celui de ces constantes. Ainsi l'équation $y=(a+b)x+cde$ renferme cinq constantes arbitraires, et cependant deux points suffisent pour déterminer la droite qu'elle représente. C'est qu'en effet, quels que soient les changements que pourront éprouver les constantes, l'équation représentera toujours la même ligne, si les deux quantités $(a+b)$ et cde restent invariables. Il sera donc plus général de dire que *pour obtenir le nombre des points nécessaires à la détermination d'une courbe donnée par son équation la plus générale, il faudra compter séparément le nombre des constantes arbitraires qui entrent dans cette équation, et celui des termes distincts qui les contiennent; le plus petit de ces deux nombres sera la réponse à la question.*

Si l'on n'a qu'une équation particulière de la courbe proposée, c'est-à-dire, une équation qui soit relative à une certaine situation de la courbe à l'égard des axes, on ramènera ce cas au précédent en *généralisant* l'équation proposée, ce qui se fera en changeant à la fois l'origine et la direction des axes, mais sans altérer leur inclinaison mutuelle; car cette transformation d'axes équivaut à un changement de position de la courbe par rapport aux axes que l'on considère (94 et 97). On introduira ainsi trois nouvelles constantes arbitraires a, b, α, dans l'équation proposée, et on appliquera ensuite la règle précédente.

Remarquez que si la transformation des coordonnées n'apporte pas dans l'équation de nouveaux termes qui soient fonction des constantes arbitraires, ce sera un signe que l'équation proposée avait tout le degré de généralité possible.

Veut-on savoir, par exemple, combien il faut de points pour déterminer une cissoïde, on observera que l'équation particulière que nous avons trouvée (80) renfermant une seule constante, l'équation générale de

Fig. 139 Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés, je prends les droites AB et CD pour axes des y et des x, et je désigne les coordonnées de ces points par

$$A(o, a),\quad B(o, b),\quad C(c, o),\quad D(d, o),\quad E(p, q).$$

L'équation de la courbe demandée sera de la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad [1].$$

Maintenant si nous y faisons $y=0$, l'équation résultante

$$Cx^2+Ex+F=0$$

devra avoir pour racines les abscisses c et d des deux points C et D; donc

$$cd=\frac{F}{C},\quad c+d=-\frac{E}{C},$$

et partant
$$C=\frac{F}{cd},\quad E=-\frac{c+d}{cd}F.$$

On aura donc aussi, par une simple permutation de lettres,

$$A=\frac{F}{ab},\quad D=-\frac{a+b}{ab}F;$$

de sorte qu'il ne s'agit plus que de déterminer le coefficient B, et on a pour cela l'équation de condition

$$Aq^2+Bpq+Cp^2+Dq+Ep+F=0,$$

de laquelle on tire

$$B=-\frac{F}{pq}\left[\frac{q(q-a-b)}{ab}+\frac{p(p-c-d)}{cd}+1\right].$$

On substituera les valeurs trouvées pour A, B, C, D, E, dans l'équation [1], et en supprimant le facteur F commun à tous les termes de l'équation résultante, on obtiendra l'équation demandée. Comme les valeurs des coefficients A, B, C, D, E sont uniques, et en général finies, il s'ensuit *qu'on peut se proposer de faire passer une courbe du second ordre par*

---

cette courbe en renfermera quatre; et comme il y aura plus de quatre termes qui les contiendront, on en conclura que quatre points déterminent une cissoïde. S'il s'agissait, au contraire, d'un cercle représenté par $x^2+y^2-r^2=0$, il entrerait quatre constantes dans son équation transformée; mais comme les coefficients des carrés des variables seraient encore l'unité, il n'y aurait que trois termes qui seraient fonction des constantes arbitraires; d'où l'on conclurait que trois conditions suffisent pour déterminer un cercle.

cinq points donnés sur un plan, mais qu'on ne peut en faire passer qu'une.

Supposons que trois des cinq points donnés, C, D, E par exemple, soient en ligne droite, on aura $q=0$, et ainsi la valeur de B sera alors infinie; donc, avant de faire cette hypothèse $q=0$ dans l'équation trouvée, on devra faire évanouir les dénominateurs; et en exprimant ensuite que q est nul, on trouvera

$$xy=0,$$

équation qui représente le système des deux axes, comme il était facile de le prévoir.

Il est important de remarquer que, comme l'équation [1] renferme cinq coefficients indéterminés, si l'on assujettissait la courbe qu'elle doit représenter à satisfaire à une certaine condition, le nombre des éléments vraiment arbitraires et indépendants se trouvant réduit à quatre, on ne pourrait plus se donner que quatre points par lesquels la courbe devrait passer.

On pourra supposer, comme exercice, que le centre ou un foyer doive se trouver sur une courbe donnée; que ce centre ou ce foyer soit donné; que l'un des axes doive avoir une direction déterminée*; que sa longueur soit connue; qu'il soit donné en grandeur et en position; que l'on connaisse un diamètre et la direction de ses cordes conjuguées; une tangente, une asymptote; les deux asymptotes, etc., etc.

Si l'on veut que la courbe soit une parabole, on aura

$$B^2-4AC=0;$$

ainsi quatre points déterminent une parabole. Toutefois le problème aura deux solutions, puisque cette équation donnera pour B deux valeurs. L'équation de la parabole qui passera par les quatre points A, B, C, D sera

$$cdy^2\pm2\sqrt{abcd}.xy+abx^2-cd(a+b)y-ab(c+d)x+abcd=0 \qquad [2].$$

* Si cet axe est désigné, il faudra employer l'équation focale (262) plutôt que l'équation [1], parce que *le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole est une perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice*, et que *le petit axe ou l'axe imaginaire est une parallèle à cette droite menée par le centre*.

Fig. 139 Tâchons de retrouver les éléments de l'une de ces paraboles, de celle, par exemple, qui correspond au signe supérieur. On voit d'abord que l'équation du diamètre dont les cordes conjuguées sont parallèles à l'axe des y est

$$y=-x\sqrt{\frac{ab}{cd}}+\frac{a+b}{2},$$

équation facile à construire. Soit FK ce diamètre : il ne s'agira plus que de déterminer son extrémité (364). Pour y parvenir, je suppose que la parabole soit rapportée au diamètre FK et à la tangante à son extrémité, son équation sera de la forme $y^2=2px$. Or, si l'on appelle (α, β) et (α', β') les coordonnées des points B et C par rapport à ces axes, on aura $\beta^2=2p\alpha$, $\beta'^2=2p\alpha'$, équations desquelles on tire facilement

$$\alpha=\frac{\beta^2(\alpha'-\alpha)}{\beta'^2-\beta^2},$$

ce qui détermine la position du sommet; car tout est connu dans le second membre de cette équation, puisque $\alpha'-\alpha=$KE.

411. Pascal a découvert une proposition fort remarquable qui fournit un moyen très-simple de décrire une courbe du second ordre assujettie à passer par cinq points donnés, en n'employant que la règle seulement.

Nous déduirons ce théorème, que l'on a nommé l'*hexagramme mystique de* Pascal, du Lemme suivant :

Lemme. *Si trois lignes du second ordre ont une corde commune, les autres cordes communes à ces courbes, prises deux à deux, se couperont en un même point.*

Fig. 140 Prenons la corde commune AB pour l'axe des x, et plaçons l'origine des coordonnées au point A : si l'on désigne par a la longueur AB, l'équation de toute courbe ABEE' du second ordre passant par les points A et B sera de la forme

$$Ay^2+Bxy+Dy+x^2-ax=0 \qquad [3].$$

Les équations des deux autres courbes ABHH' et ABP qui passeront aussi par les points A et B, seront respectivement

$$A'y^2+B'xy+D'y+x^2-ax=0 \qquad [4],$$

et

$$A''y^2+B''xy+D''y+x^2-ax=0 \qquad [5].$$

Or, si l'on retranche membre à membre les équations [3] et [4], l'équation résultante

$$\{(A-A')y+(B-B')x+(D-D')\}y=0$$

représentera le système de deux lignes droites qui passeront par les points d'intersection des lieux de ces deux équations; donc

$$(A-A')y+(B-B')x+D-D'=0 \quad [6]$$

est l'équation de la corde CD, puisque $y=0$ est celle de AB.

En retranchant de même l'équation [5] de [3] et l'équation [5] de l'équation [4], on trouvera

$$(A-A'')y+(B-B'')x+D-D''=0 \quad [7],$$

et

$$(A'-A'')y+(B'-B'')x+D'-D''=0 \quad [8],$$

pour les équations des deux autres cordes GI et FK. Or, l'équation de cette dernière est une conséquence de celles des deux autres; donc cette troisième corde va concourir avec les deux premières.

412. Scolie. Le lemme serait encore vrai, si une ou plusieurs des équations [3], [4] et [5] représentait le système de deux lignes droites. Il le serait encore, lors même que les courbes représentées par ces équations ne se couperaient pas, c'est-à-dire que les droites dont [6], [7] et [8] sont les équations concourront toujours.

413. Théorème de Pascal. *Dans tout hexagone inscrit à une courbe du second ordre, les points de concours des côtés opposés sont tous trois situés sur une même ligne droite.*

Soient ABCDEF un hexagone inscrit à une courbe du second ordre, L, M, N les points de concours des côtés opposés AB et DE, BC et EF, CD et FA : je dis que ces trois points sont situés sur une même ligne droite. Joignons, en effet, deux sommets opposés A et D, cette diagonale sera une corde commune à *la courbe*, au *système des droites* AB *et* CD et *au système des droites* AF *et* DE. Or, la seconde corde d'intersection de la courbe avec le premier système de droites est la droite BC; avec le système de AF et de DE c'est FE, et ces deux cordes BC et EF concourent en M. Fig. 141

D'un autre côté, la seconde corde d'intersection du système des droites AB et CD avec celui des deux droites AF et DE est la droite LN qui joint les points de concours de AB et de DE, de CD et de AF; donc, en vertu du lemme,

cette droite LN doit aller passer par le point M où se croisent les deux autres cordes BC et EF, ce qui démontre le théorème de Pascal.

414. Supposons actuellement que l'on veuille *faire passer une courbe du second ordre par les cinq points* A, B, C, D, E : après avoir joint chaque sommet avec le suivant, ce qui formera le quadrilatère ouvert ABCDE, on prolongera les deux côtés extrêmes jusqu'à leur point de rencontre L, puis par ce point on mènera une sécante quelconque LMN terminée en M et en N aux prolongements respectifs de BC et de DC, et enfin on joindra les points M et N avec les points E et A par deux droites qui, par leur intersection, détermineront un point F de la courbe demandée; car, s'il n'en est pas ainsi, appelons F′ le point où la droite NA va la couper, il faudra alors que les trois points F′, E et M soient en ligne droite, ce qui ne se peut. Donc *si l'on fait tourner la sécante* LMN *autour de* L, *les droites* ME *et* NA *tourneront en même temps autour des points* E *et* A, *et leur point de concours* F *décrira la courbe du second ordre qui passe par les cinq points* A, B, C, D, E *.

On peut déduire de la génération même de la courbe décrite par le point F, que cette courbe passe par les cinq points A, B, C, D, E. Je dis d'abord qu'elle passe par le point B; car, si l'on fait coïncider la sécante mobile LMN avec AB, le point N qui appartient à CD sera venu se placer en I à l'intersection de cette droite avec AB; donc le point M, qui doit être situé à la fois sur LN et sur BC, se trouvera actuellement en B; ainsi les deux droites NAF et MEF auront pris les positions AL et BE, de sorte que le point F est venu en B. La même démonstration s'applique évidemment au point D.

Si l'on suppose que la sécante LMN vienne passer par C, les points M et N coïncideront avec C, et partant NA et ME seront dirigées suivant AC et CE; donc leur point de section F sera venu en C; donc C est un point du lieu.

Enfin, si l'on suppose que la sécante ME se soit couchée

---

* On peut se proposer, pour exercice, de trouver l'équation du lieu ainsi engendré, et on vérifiera qu'il passe par les cinq points A, B, C, D, E, ce qui fournira une démonstration analytique du *Théorème de* Pascal.

sur AE, le point M sera allé en M' au point où AE coupe BC, de sorte que la sécante LMN aura pris la position LM'; le point N aura donc glissé jusqu'au point N' d'intersection de CD avec LM', et AN sera devenu N'A. Ainsi le point F est venu en A; donc le point A appartient à la courbe.

Remarquons que la sécante NAF coupe actuellement la courbe en deux points réunis en un seul A; donc N'A est une tangente à la courbe au point A. On mènerait de même une tangente en E.

Si l'on voulait mener une tangente en tout autre point, en B, par exemple, on prendrait le point I de concours des droites AB et CD pour centre de rotation de la sécante mobile, et on répéterait la construction précédente. Ainsi on prolongerait BC jusqu'à sa rencontre en M' avec AE; on joindrait IM', et en unissant le point T où cette droite va couper DE avec B, on aurait la tangente demandée.

415. Il est facile de reconnaître le genre de la courbe et de déterminer ses éléments : car, si l'on joint le point K, où les deux tangentes KE et KB vont se couper, au milieu de la corde BE qui unit leurs points de contact, on aura un diamètre de la courbe (277, 327 et 367). La considération des deux tangentes AG et KG en déterminera un second, GO, on joindra donc BO, on prolongera cette droite d'une quantité OB'=BO, et BB' sera la longueur d'un diamètre. Son conjugué sera dirigé suivant la parallèle menée par le point O à la tangente GK. Pour déterminer sa longueur, on supposera que la courbe soit rapportée à ces deux diamètres conjugués pris pour axes des x et des y, de sorte qu'en appelant $2a'$ et $2b'$ leurs longueurs et (x', y') les coordonnées du point A, on aura, pour l'équation de la tangente AG, Fig. 141

$$a'^2y'y \pm b'^2x'x \mp a'^2b'^2 = 0,$$

et en y faisant $x=0$, on trouvera $yy' = \pm b'^2$; ainsi, suivant que y et y' seront de mêmes signes ou de signes contraires, la courbe sera une ellipse ou une hyperbole, et il sera facile de trouver b.

Observons toutefois que, dans le cas de la parabole, il n'y aura qu'à prendre le milieu de KH pour avoir l'extrémité du diamètre dont KH est la direction (368).

Remarquons que le théorème de Pascal a lieu quelle que

soit la forme de l'hexagone inscrit à la courbe, et lors même que ses côtés s'entre-croiseraient de toutes les manières possibles *.

*416. M. *Brianchon* a découvert le théorème suivant, qui n'est pas moins beau que celui de Pascal :

Dans tout hexagone circonscrit à une courbe du second ordre, les diagonales qui joignent les sommets respectivement opposés se croisent toutes trois en un même point.

Fig. 143 Soit, en effet, *abcdef* l'hexagone dont il s'agit, je joins chaque point de contact au suivant, et je forme ainsi un hexagone inscrit ABCDEF, dans lequel les points de concours L, M et N des côtés opposés sont situés sur une même ligne droite. Or, les sommets opposés *a* et *d* de l'hexagone circonscrit sont les pôles des deux côtés opposés AF et CD de l'hexagone inscrit (**398**); donc la diagonale *ad* est la polaire du point N où ces côtés vont se croiser (**406**) ; donc elle contient le pôle de la droite LMN (**405**). Ce pôle doit donc se trouver à la fois sur chacune des trois diagonales *ad*, *be*, *cf* de l'hexagone circonscrit ; donc ces diagonales se croisent au même point.

On aurait pu conclure immédiatement la vérité de ce théorème du principe fondamental de la théorie des polaires réciproques (**408**); mais, à raison de son importance, nous avons cru devoir entrer dans le détail de la démonstration.

*417. La réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire que, *si cinq côtés d'un hexagone sont tangents à une courbe du second ordre, et que d'ailleurs ses trois diagonales se croisent en un même point, le sixième côté sera aussi tangent à la courbe*. En effet, si ce sixième côté *ef* n'est pas tangent à la courbe, nous pourrons mener par le point *e* une droite *ef'* qui lui soit tangente, et alors la diagonale *f'c* de l'hexagone circonscrit *abcdef'* devra aller passer par le point de section O des deux autres diagonales *ad* et *be*; donc elle aura ainsi deux points communs avec *fc* sans coïncider avec elle, ce qui ne se peut.

---

* Il s'applique aussi au cas où la courbe du second ordre se réduirait au système de deux lignes droites, d'où il suit que *dans tout hexagone*
Fig. 142 ABCDEFA *inscrit au système de deux droites, les trois points de concours* L, M, N *des côtés opposés sont en ligne droite.*

***418.** Il suit encore du *théorème de M. Brianchon* (**416**), qu'*il n'existe qu'une seule courbe du second ordre qui puisse toucher à la fois cinq droites données*. Supposons, en effet, que deux pareilles courbes puissent toucher les cinq droites *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ae* : d'un point *quelconque* *e'* de *de*, je mène une tangente *e'f* à la première courbe, et une tangente *e'f'* à la seconde; les trois diagonales du premier hexagone *abcde'f* se croiseront en un certain point O, et les trois diagonales du second hexagone *abcde'f'* devront aussi se croiser au même point, car O est le point d'intersection des diagonales *ad* et *be'* qui sont communes à ces deux polygones. Donc *cf* et *cf'* coïncident, et par conséquent les deux tangentes *e'f* et *e'f'* se confondent aussi. Il en est donc de même des deux courbes, puisque le point *e'* a été pris au hasard sur la direction de la tangente commune *de*. Fig. 144

***419.** Tout pentagone inscrit à une courbe du second ordre peut être regardé comme un hexagone inscrit, dont l'un des côtés est devenu une tangente. Si donc au sommet A du pentagone inscrit ABCDEA on mène une tangente FAN, on pourra la regarder comme le sixième côté de l'hexagone inscrit ABCDEFA, dont les côtés opposés sont AB et DE, BC et EF, CD et FAN. Donc

Fig. 145

THÉORÈME. *Dans tout pentagone* INSCRIT, *les* POINTS *de concours de deux couples de* CÔTÉS *alternatifs* SONT EN LIGNE DROITE *avec le* POINT *où le cinquième* CÔTÉ *va couper la tangente menée au* SOMMET *qui lui est opposé*.

***420.** Tout pentagone circonscrit à une courbe du second ordre peut être regardé comme un hexagone circonscrit, dont l'un des angles vaut deux droites, et qui a pour sommet le point même où l'un des côtés de ce pentagone touche la courbe : ainsi le pentagone *abcde* peut être regardé comme un hexagone circonscrit *abcdefa*, dont les sommets opposés sont *a* et *d*, *b* et *e*, *c* et *f*. Donc Fig. 144

THÉORÈME. *Dans tout pentagone* CIRCONSCRIT, *les* DIAGONALES *qui joignent deux couples de* SOMMETS *alternatifs* CONCOURENT *avec la* DROITE *qui joint le cinquième* SOMMET *avec le point de contact du* CÔTÉ *opposé*.

***421.** Tout quadrilatère inscrit peut être considéré comme un hexagone dont deux

***422.** Tout quadrilatère circonscrit peut être considéré comme un hexagone dans le-

Fig. 146 côtés sont devenus tangents : soit donc ABCD un pareil quadrilatère, si on mène des tangentes *ad* et *bc* aux sommets opposés A et C, on formera un hexagone dont les côtés opposés sont AB et CD, BC et AD, *bc* et *ad*; ainsi les trois points L, M, N où ces couples de côtés vont se croiser sont en ligne droite. Donc

Théorème. *Dans tout quadrilatère inscrit, les* POINTS *de concours des côtés opposés et les* POINTS *de concours des tangentes menées aux* SOMMETS *opposés sont quatre* POINTS *situés en* LIGNE DROITE.

quel deux angles opposés valent chacun deux droits, et dont les sommets sont les points mêmes où deux côtés de ce quadrilatère touchent la courbe. Soit donc *abcd* un pareil quadrilatère, on pourra le regarder comme un hexagone dont les sommets opposés sont *a* et *c*, *b* et *d*, C et A; ainsi les trois droites *ac*, *bd* et CA vont se couper en un même point. Donc Fig.1

Théorème. *Dans tout quadrilatère* CIRCONSCRIT, *les* DIAGONALES *et les* DROITES *qui joignent les points de contact des* CÔTÉS *opposés se croisent au même* POINT.

*423. Ces deux théorèmes peuvent être compris dans un même énoncé, en disant que

Si l'on inscrit à une courbe du second ordre un quadrilatère quelconque ABCD, *et qu'on lui en circonscrive un autre* abcd, *dont les côtés touchent la courbe aux sommets du premier :* 1° *Les quatre diagonales* AC, BD, ac, bd *de ces deux quadrilatères se croiseront au même point* O; 2° *les quatre points de concours* L, M, N, P *des côtés opposés de ces deux quadrilatères seront tous quatre rangés sur une même droite polaire de* O; car N et P sont les pôles respectifs des diagonales AC et BD, et par conséquent NP est la polaire de leur point d'intersection O.

*424. Scolie. *Les diagonales du quadrilatère circonscrit vont concourir respectivement aux points* M *et* L *où se coupent deux à deux les côtés opposés du quadrilatère inscrit*. En effet, le point L est le pôle de la diagonale *ac*; car AB et CD sont les polaires respectives des points *a* et *c* (406); mais OM est aussi la polaire de L (394); donc les deux droites *ac* et OM coïncident; donc la diago-

nale *ac* va passer par le point de concours des deux côtés BC et DA.

*425. Tout triangle inscrit peut être regardé comme un hexagone inscrit, dans lequel trois côtés alternatifs sont devenus des tangentes, de sorte qu'en menant des tangentes
147 *bc*, *ac*, *ab* aux trois sommets du triangle ABC, on aura un hexagone inscrit dont les directions des côtés opposés seront *bc* et BC, *ac* et AC, *ab* et AB. Donc

Théorème. *Dans tout triangle* INSCRIT *à une courbe du second ordre, les* POINTS *de concours des côtés avec les tangentes menées aux sommets opposés sont trois* POINTS *en* LIGNE DROITE.

*426. Tout triangle circonscrit peut être regardé comme un hexagone circonscrit, dans lequel les angles sont devenus de deux en deux égaux à deux droits, de sorte que le triangle *abc* sera considéré comme un hexagone circonscrit dont les angles opposés sont A et *a*, B et *b*, C et *c*. Donc

Théorème. *Dans tout triangle* CIRCONSCRIT *à une courbe du second ordre, les trois* DROITES *qui joignent chaque sommet avec le point de contact du côté opposé vont se* CROISER *au même* POINT.

*427. Ces deux derniers théorèmes peuvent être compris dans l'énoncé suivant :

Si deux triangles sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une courbe du second ordre, de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés opposés du second, les points de concours des côtés opposés des deux triangles sont situés sur une même ligne droite, et les droites qui joignent leurs sommets opposés se croisent en un point qui est le pôle de cette droite.

*428. Considérons un hexagone ABCDEFA inscrit dans Fig. 148
une parabole, supposons que le sommet F s'éloigne indéfiniment, et que E vienne coïncider avec D. Le côté DE deviendra une tangente, et les côtés AF et EF seront alors deux diamètres issus de A et de D. Comme le théorème de Pascal a toujours lieu, le point L, intersection du côté AB avec la tangente au point D, sera en ligne droite avec les points M et N, où les côtés BC et DC vont couper les diamètres menés par les points D et A.

Cette remarque fournit le moyen de *mener une tangente en*

un point donné D *d'une parabole, lorsqu'on connaît trois autres points* A, B, C *de cette courbe et la direction de ses diamètres.*

Si le point E, au lieu de coïncider avec le point D, s'en éloigne indéfiniment, le point L viendra se placer en L' à l'intersection de AB avec le diamètre tiré par le point D; mais le point M du diamètre EF s'éloignera aussi indéfiniment du point N; de sorte que la droite MN sera devenue parallèle à BC. Donc, *dans tout quadrilatère inscrit à une parabole, les points d'intersection des diamètres qui passent par les extrémités d'un même côté avec les côtés qui lui sont adjacents déterminent une parallèle au quatrième côté.*

*429. Problème. *Décrire une parabole qui passe par quatre points donnés.*

Fig. 149 Soient A, B, C, D les quatre points donnés, AN et DL les directions des diamètres qui passent par les deux points A et D : la droite LN qui joint les points où ils sont rencontrés par les côtés DC et AB est parallèle à BC (428); par conséquent, les triangles ILN et IBC sont semblables, et on a la proportion

$$\mathrm{IN} : \mathrm{IL} :: \mathrm{IC} : \mathrm{IB};$$

mais la similitude des triangles NIA et LID donne pareillement

$$\mathrm{IN} : \mathrm{ID} :: \mathrm{IA} : \mathrm{IL};$$

en multipliant ces deux proportions par ordre, on trouvera

$$\overline{\mathrm{IN}}^2 = \frac{\mathrm{ID.IC.IA}}{\mathrm{IB}},$$

équation qui détermine IN. Pour construire cette droite, je mène AG parallèle à BC et terminée à la rencontre de CD; IG sera ainsi une quatrième proportionnelle aux droites IB, IA et IC, de sorte que la valeur de $\overline{\mathrm{IN}}^2$ deviendra

$$\overline{\mathrm{IN}}^2 = \mathrm{ID.IG}.$$

On cherchera donc une moyenne proportionnelle entre ID et IG, et on la portera sur ID, de I en N et de I en N'; joignant donc le point A à l'un des points N et N', on aura la direction du diamètre qui passe par ce point, de sorte que le problème admet deux solutions.

Maintenant, si l'on joint le point M' où BC coupe le diamètre DL avec N, le point L', intersection de cette droite avec AB, appartiendra à la tangente menée au point D (428); ainsi cette tangente sera connue, et on pourra alors déterminer les éléments de la parabole (364).

*430. Le théorème que nous avons établi au n° 408 combiné avec ceux des n°s 413 et 416 ont conduit M. *Brianchon* à une propriété très-remarquable des hexagones inscriptibles et circonscriptibles à une courbe du second ordre, que M. *Poncelet* a étendue ensuite à des polygones d'un nombre quelconque de côtés. Supposons, en effet, que l'on ait tracé sur le plan d'une pareille courbe deux polygones qui soient polaires-réciproques l'un de l'autre (408). Nous pourrons toujours décrire deux courbes du second ordre, dont l'une passera par cinq sommets A, B, C, D, E du premier, et dont l'autre touchera les cinq côtés correspondants a, b, c, d, e du second. De plus, ces deux courbes seront uniques (410 et 418). Si la première passe par un sixième sommet F du premier polygone, les trois points de concours des côtés opposés de l'hexagone inscrit seront en ligne droite (413), et par conséquent les trois diagonales de l'hexagone formé par les six polaires a, b, c, d, e, f se croiseront au même point (416), de sorte que cet hexagone sera circonscrit à la courbe qui lui correspond (417); par la même raison, si la courbe qui passe par les six sommets A, B, C, D, E, F passe encore par un septième sommet G, la courbe qui touche les six côtés a, b, c, d, e, f touchera aussi le septième g, et ainsi de suite; donc

Si un polygone quelconque tracé sur le plan d'une courbe du second ordre est inscriptible à une autre courbe du second ordre, son polaire-réciproque sera, par là même, circonscriptible à une telle courbe, et vice versa.

Si l'on suppose que le nombre des côtés du premier de nos deux polygones devienne infini, et que chacun d'eux devienne infiniment petit, auquel cas il se confondra avec la courbe à laquelle il était inscrit, le nombre des côtés de son polaire-réciproque augmentera au delà de toute limite, et ce polygone, formé par toutes les tangentes de la courbe à laquelle il était circonscrit se confondra avec elle; donc on a aussi ces deux beaux théorèmes dus à M. *Poncelet :*

Si un point, pris sur le plan d'une courbe quelconque

du second ordre, se meut sur une autre courbe du second ordre, sa polaire en enveloppera une troisième dans son mouvement.

Réciproquement, *si une droite, située dans le plan d'une courbe du second ordre, se meut en restant constamment tangente à une autre courbe quelconque du second ordre, son pôle en décrira une troisième dans son mouvement.*

Les courbes décrites par le point mobile et par sa polaire sont polaires-réciproques l'une de l'autre; de sorte que, pour obtenir l'équation de la courbe enveloppée par les polaires d'un point qui décrit une courbe du second ordre, il n'y a qu'à chercher quel est le lieu des pôles de toutes les tangentes à cette courbe. C'est une question que l'on pourra se proposer pour exercice.

CHAPITRE XVII.

IDENTITÉ DES COURBES DU SECOND ORDRE AVEC LES SECTIONS CONIQUES.

431. Nous nous proposons ici de *prouver que la courbe qui résulte de l'intersection d'une surface conique circulaire droite par un plan quelconque, qui ne passe point par le centre de cette surface, est une courbe du second ordre*, et que, réciproquement, *toute courbe du second ordre peut être obtenue en coupant une pareille surface par un plan.*

D'un point quelconque de l'axe d'une surface conique circulaire droite, abaissons une perpendiculaire sur un plan qui coupe cette surface; puis menons un plan par ces deux lignes, et soient SA, SB et OX ses traces sur la surface conique et Fig. 150
sur le plan sécant MON. Le plan ASB est donc perpendiculaire à celui-ci. Maintenant, par un point quelconque M de la section conique, conduisons un plan perpendiculaire à l'axe, et soient EMF et EF ses traces sur le cône et sur le plan ASB. La droite MP, qui joint le point M avec le point P où EF et OX se croisent, sera perpendiculaire au plan ASB, et partant à ces deux droites; or, EMF est une circonférence: donc, MP est une moyenne proportionnelle entre EP et PF. Cela posé, rapportons la section MON à la droite OX prise pour axe des x, et à la perpendiculaire OY élevée au point O sur OX dans le plan sécant. Désignons par β l'angle générateur de la surface conique, et convenons, en outre, de représenter par d la distance OS, et par α l'angle SOX. Ce sont là les deux quantités qui déterminent la position du plan sécant à l'égard de la surface conique. Appelons encore x et y les deux coordonnées OP et MP du point quelconque M de la courbe NOM, et il s'agira, pour avoir l'équation de cette courbe, de chercher l'expression de la relation constante qui lie entre elles x et y. Or, d'après ce que nous avons remarqué plus haut, on a

$$y^2 = \text{EP.PF},$$

de sorte qu'on obtiendra l'équation de la *section coni-*

que NOM en exprimant EP et PF en fonction de x et des constantes β, α et d. Le triangle EOP donne

$$EP : x :: \sin\alpha : \cos\beta, \quad \text{d'où} \quad EP = \frac{x\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Tâchons maintenant d'obtenir l'expression de PF. Pour cela, je mène la parallèle PIL à la génératrice SB, et on aura ainsi PF=2OK—OI. Mais $OK = d\sin\beta$; on tire ensuite du triangle PIO

$$OI : x :: \sin(\alpha+2\beta) : \cos\beta;$$

car l'angle OPL est supplémentaire de LOP+OLP=$\alpha+2\beta$, et sin OIP = sin OGS = $\cos\beta$: donc

$$OI = \frac{x\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta};$$

partant $$PF = 2d\sin\beta - \frac{x\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta},$$

et enfin $$y^2 = \frac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}x^2 \qquad [1].$$

Donc *les sections coniques sont des courbes du second ordre.*

Examinons, avant de démontrer la réciproque, si cette équation [1] peut représenter toutes les courbes du second ordre. Pour qu'elle représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, il faut que l'on ait

$$\sin(\alpha+2\beta) > 0, \quad < 0, \quad \text{ou} \quad = 0;$$

car l'angle α ne devant varier que depuis zéro jusqu'à 180°, son sinus est une quantité positive. Cette condition revient à

$$\alpha+2\beta < 180°, \quad > 180°, \quad \text{ou} \quad = 180°;$$

car $\alpha+2\beta$ est nécessairement $<360°$.

Dans le premier cas, la trace OX du plan sécant sur ASB coupe la génératrice SB sur la nappe ASB de la surface conique, et par conséquent le plan sécant rencontrant toutes les génératrices sur une même nappe, la courbe MON est rentrante et fermée, ce qui s'accorde avec la forme connue de l'ellipse.

Si $\alpha+2\beta > 180°$, la trace OX coupe la génératrice SB sur son prolongement SB′, de sorte que le plan sécant rencontre

une partie seulement des génératrices de chacune des deux nappes. Il en résulte donc deux branches de courbe qui s'étendent indéfiniment chacune sur une seule nappe, et s'opposent leur convexité. C'est bien là la forme de l'hyperbole.

Enfin, si $\alpha+2\beta=180°$, OX est parallèle à SB, et le plan sécant rencontre toutes les génératrices, sauf SB, sur la nappe ASB, de sorte que la courbe sera formée d'une seule branche qui s'étendra indéfiniment sur cette nappe.

Si l'on suppose $d=0$, et que, pour abréger, on représente par $-k$ le coefficient de x^2, l'équation [1] se réduira à

$$y^2+kx^2=0,$$

et représentera ainsi un point, deux droites qui se coupent, ou deux droites confondues en une seule, selon qu'on aura

$$\alpha+2\beta<180°, \quad >180° \quad \text{ou} \quad =180°.$$

On voit donc que l'équation [1] peut représenter :

1° Une ellipse et un point ;

2° Une hyperbole et deux droites qui se coupent;

3° Une parabole et une ligne droite ;

mais qu'elle ne peut jamais représenter deux parallèles ou une ligne imaginaire, de sorte qu'elle est moins générale que l'équation:

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

432. Venons actuellement à la seconde partie de la question que nous nous sommes proposée. Supposons donc que l'on demande de *couper un cône de manière que la courbe d'intersection soit une courbe donnée du second ordre.* Rapportons cette courbe à l'un de ses axes et à la tangente à l'un des sommets de cet axe, son équation sera de la forme

$$y^2=2px+nx^2 \qquad [2],$$

$2p$ désignant le paramètre, et la valeur absolue de n étant le carré du rapport des axes, dont l'un est perpendiculaire à l'axe des x, et dont l'autre est dirigé suivant cette droite (354). Il s'agit de savoir si, en donnant à d et à α des valeurs réelles et finies, on pourra rendre l'équation [1] identique avec [2].

Il faudra donc satisfaire aux deux équations de condition

$$p = \frac{d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta} \quad \text{et} \quad -n = \frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta}.$$

Or, la première, étant du premier degré par rapport à d, donnera toujours une valeur réelle et finie de cette inconnue, si l'on peut tirer de la seconde une valeur réelle de α qui ne soit ni 0° ni 180°. Résolvons donc cette seconde équation. Pour y parvenir, il faut se rappeler que la différence des cosinus de deux arcs est égale à moins le double produit du sinus de la demi-somme de ces arcs par le sinus de leur demi-différence (*Trigonométrie,* 35); or, si l'on regarde $\alpha + 2\beta$ comme la demi-somme de deux arcs et α comme leur demi-différence, ces deux arcs seront $(2\alpha + 2\beta)$ et 2β, et on aura ainsi

$$\cos(2\alpha + 2\beta) - \cos 2\beta = -2 \sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta),$$

et par conséquent

$$2n\cos^2\beta = \cos(2\alpha + 2\beta) - \cos 2\beta \qquad [3];$$

d'où l'on tire

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = 2(n+1)\cos^2\beta - 1,$$

en se rappelant que $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$. Pour que l'on puisse tirer de cette équation une valeur de α, il faut que son second membre soit compris entre -1 et $+1$; car ce sont là les limites entre lesquelles tout cosinus est renfermé; ainsi, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

$$2(n+1)\cos^2\beta - 1 > -1 \quad \text{et} \quad < +1.$$

Ces deux inégalités reviennent à

$$n + 1 > 0 \quad \text{et} \quad \cos^2\beta < \frac{1}{1+n} \qquad [4].$$

Dans le cas de l'ellipse, n est négatif, mais plus petit que l'unité; car $-n = \frac{b^2}{a^2}$, et $2a$ représente toujours le grand axe; donc ces deux conditions sont remplies quel que soit β; d'un autre côté la valeur de α donnée par l'équation [3] n'est ni 0° ni 180°; car, s'il en était ainsi, cette équation se réduirait à $2n\cos^2\beta = 0$, ce qui est impossible. Donc *il n'est pas d'ellipse qui ne puisse provenir de l'intersection d'un cône droit par un plan.*

Si la courbe donnée est une hyperbole, n est positif, et la seconde condition se réduit à $\cos^2\beta < \frac{a^2}{c^2}$; mais, en appelant θ le demi-angle asymptotique, on a $\cos\theta = \frac{a}{c}$; donc $\cos^2\beta < \cos^2\theta$, et par conséquent $2\beta > 2\theta$, ce qui nous apprend que *la section conique ne sera égale à l'hyperbole donnée que si l'angle au centre de ce cône est au moins égal à l'angle asymptotique de cette hyperbole.*

Enfin, s'il s'agit d'une parabole, $n = 0$, et les conditions [4] sont satisfaites. Mais ce n'est pas encore assez pour être certain que la section conique sera cette parabole, il faut encore que $\sin\alpha$ ne soit pas nul, sans quoi d serait infinie. Or, n étant nul, l'équation [3] se réduit à

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\beta, \quad \text{d'où} \quad 2\alpha + 2\beta \pm 2\beta = 2k\pi;$$

mais, α ne peut pas surpasser π, $\beta < \frac{\pi}{2}$, de sorte que

$$2\alpha + 4\beta < 4\pi; \quad \text{donc} \quad k = 1,$$

donc $$2\alpha + 4\beta = 2\pi, \quad \text{d'où} \quad \alpha + 2\beta = \pi,$$

et $$2\alpha = 0 \text{ ou } = 2\pi \ldots \quad \text{d'où} \quad \alpha = 0 \text{ ou } = \pi.$$

Ces deux dernières valeurs de α doivent être rejetées, mais la première est bonne. Donc *toute parabole peut être regardée comme une section conique**.

*433. Si l'on suppose que le centre S de la surface co-

* La théorie que nous venons de développer conduit très-simplement aux *conditions de* SIMILITUDE *de deux courbes du second ordre*. Car, si les plans, qui coupent la surface conique suivant deux ellipses ou deux hyperboles, sont parallèles, ces courbes seront semblables, leurs centres de similitude seront deux points quelconques situés en ligne droite avec le centre de la surface, et le rapport de similitude sera le rapport des distances de ces deux points à ce centre (*Géom.*, page 378); donc les axes des deux courbes sont proportionnels. Cette condition est d'ailleurs suffisante, comme le prouve l'équation

$$\pm\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin\alpha\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta},$$

puisque, si elle est remplie, la valeur de α sera constante et les plans des deux courbes seront parallèles.

Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses ou*

nique s'éloigne indéfiniment du plan sécant, auquel cas cette surface devient cylindrique, on aura $\beta=0$, et $d=\infty$; mais le triangle SOK donne $OK=d\sin\beta$; donc, si l'on appelle r le rayon invariable de la circonférence qui sert de base au cône, le produit $d\sin\beta$ tendra vers r, lorsque β et d convergeront respectivement vers 0° et vers l'infini; donc, à la limite, l'équation [1] deviendra

$$y^2+\sin^2\alpha.x^2-2r\sin\alpha.x=0,$$

équation d'une ellipse. Donc *les sections faites dans une surface cylindrique circulaire droite par des plans inclinés sur la base, sont des ellipses qui ont toutes pour petit axe le diamètre de ce cylindre.* On ne peut donc pas placer une ellipse quelconque sur une pareille surface, mais on peut très-bien couper cette surface suivant une ellipse semblable à une ellipse donnée. Il suffit, pour cela de poser $\sin\alpha=\frac{b}{a}$.

***434.** Terminons par faire voir que l'*on peut obtenir les trois courbes du second ordre, en coupant convenablement un cône circulaire oblique.*

Fig. 151 Soit UV la trace du plan sécant sur celui de la base du cône, j'abaisse du centre C de cette base la perpendiculaire CD sur UV, et je mène un plan par cette perpendiculaire et par le sommet S du cône; soient SA, SB et OD ses traces sur la surface conique et sur le plan sécant, γ et δ les inclinaisons des génératrices SA et SB sur la droite CD; j'appelle encore α l'angle SOD, d la distance OS, et enfin x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la section conique MON par rapport à la droite OD prise pour axe des x et à une parallèle OY menée à UV par le point O. Je conduis enfin par le point M un plan parallèle à celui de la base du

---

deux hyperboles soient semblables, c'est que leurs axes soient proportionnels.

Il suit de là, que *si deux hyperboles sont semblables, les angles formés par leurs asymptotes sont égaux.*

Quant à la parabole, il suffit de mener par un point pris convenablement sur une génératrice un plan parallèle à la génératrice opposée et perpendiculaire à celui de ces deux génératrices, pour obtenir une parabole donnée; donc, *quelles que soient deux paraboles,* on pourra toujours les regarder comme les intersections d'une surface conique par deux plans parallèles; donc *elles* sont semblables.

cône; l'intersection sera un cercle EMF, et la droite MP, qui joint le point M au point P où les droites OX et EF se croisent sera parallèle à UV, et par conséquent perpendiculaire à EF et parallèle à OY, de sorte que OP et MP seront les deux coordonnées x et y du point M. En raisonnant maintenant comme au n° **431**, on obtiendra successivement

$$y^2 = \mathrm{EP}.\mathrm{PF},$$

$$\mathrm{EP} : x :: \sin\alpha : \sin\gamma, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{EP} = \frac{x\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

$$\mathrm{PF} = \mathrm{OG} - \mathrm{OI};$$

$$\mathrm{OG} : d :: \sin(\gamma+\delta) : \sin\delta, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{OG} = \frac{d\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta};$$

$$\mathrm{OI} : x :: \sin(\alpha+180^\circ-\gamma-\delta) = \sin(\gamma+\delta-\alpha) : \sin\delta,$$

d'où
$$\mathrm{OI} = \frac{x\sin(\gamma+\delta-\alpha)}{\sin\delta},$$

et enfin, $$y^2 = \frac{d\sin\alpha\sin(\gamma+\delta)}{\sin\gamma\sin\delta}x - \frac{\sin\alpha\sin(\gamma+\delta-\alpha)}{\sin\gamma\sin\delta}x^2,$$

équation du second degré, qui représentera les trois courbes, suivant qu'on aura

$$\gamma+\delta-\alpha > 0, \quad < 0, \quad \text{ou} \quad = 0;$$

car il est d'ailleurs évident que la valeur absolue de $(\gamma+\delta-\alpha)$ est $< 180^\circ$. Cette condition revient à

$$\alpha + \mathrm{S} < 180^\circ, \quad > 180^\circ, \quad = 180^\circ.$$

Voyons si la section peut être une circonférence de cercle. La condition trouvée au n° **70**, $\mathrm{B} = 2\mathrm{A}\cos\theta$, se réduit ici à $\cos\theta = 0$, d'où $\theta = 90^\circ$; ainsi *il faut que l'angle* YOX *soit droit;* on satisfera à cette condition en dirigeant le plan sécant parallèlement à la base du cône, ce qui donnera évidemment un cercle; ou bien en faisant en sorte que la droite UV soit perpendiculaire au plan ASB, lequel sera par conséquent perpendiculaire à celui de la base du cône. Ainsi la première condition à remplir, si le plan sécant n'est point parallèle à la base du cône, c'est qu'il soit perpendiculaire à celui de la *section principale*, c'est-à-dire à un plan mené par l'axe du cône perpendiculairement à celui de sa base. Il faudra encore que

$$\sin\alpha\sin(\gamma+\delta-\alpha) = \sin\gamma\sin\delta,$$

ou, en remplaçant comme au n° **432**, le produit de deux sinus par la différence de deux cosinus,

$$\cos(\gamma+\delta)-\cos(2\alpha-\gamma-\delta)=\cos(\gamma+\delta)-\cos(\gamma-\delta),$$

équation qui se réduit à

$$\cos(2\alpha-\gamma-\delta)=\cos(\gamma-\delta).$$

Or, pour que deux arcs aient le même cosinus, il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit un multiple pair de la demi-circonférence; donc on aura toutes les solutions de cette équation en posant

$$2\alpha-\gamma-\delta+\gamma-\delta=2k\pi, \quad \text{d'où} \quad \alpha-\delta=k\pi;$$
$$2\alpha-\gamma-\delta-\gamma+\delta=2k\pi, \quad \text{d'où} \quad \alpha-\gamma=k\pi.$$

Mais les angles α, γ, δ sont moindres que 180°; donc $k=0$, et par conséquent

$$\alpha=\delta \quad \text{ou} \quad \alpha=\gamma.$$

Donc le plan sécant coupera le cône suivant un cercle, en le menant parallèlement à la base, ce que l'on savait, ou bien en le dirigeant de manière qu'il fasse avec la génératrice SA un angle SOK égal à l'inclinaison de SB sur cette base. Cette seconde section se nomme *sous-contraire* ou *anti-parallèle*.

CHAPITRE XVIII.

DE LA FORME DES COURBES.

§ I. Concavité et convexité des courbes.

435. On dit qu'*une courbe est* CONCAVE *en un de ses points par rapport à une droite donnée, lorsque l'arc, dont ce point est le milieu, est compris dans l'angle aigu formé par cette droite et par la tangente à la courbe au point dont il s'agit, cet arc pouvant être aussi petit qu'on voudra. Si cet arc est au contraire situé hors de cet angle, on dit que la courbe est* CONVEXE *au point que l'on considère.*

436. Nous allons chercher à quel caractère analytique on peut reconnaître si une courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers l'axe des x. Or l'inspection seule de la figure 152 Fig. 152
suffit pour montrer que, si l'on considère un arc de courbe situé dans l'angle YOX ou dans son opposé au sommet yOx, l'angle α qui mesure l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x diminue ou augmente à mesure que le point de contact s'éloigne de l'axe des ordonnées, suivant que la courbe présente sa concavité ou sa convexité à l'axe des abscisses, et que le contraire a lieu si l'arc proposé se trouve dans l'un des deux angles yOX ou YOx. Or, en regardant une quantité négative comme d'autant plus petite que sa valeur absolue est plus grande, on voit que tang α augmente ou diminue avec α, et réciproquement; on peut donc établir cette règle générale :

Un arc de courbe situé dans l'angle des coordonnées positives ou dans son opposé au sommet présente sa concavité ou sa convexité à l'axe des x, *lorsqu'en lui menant une tangente à l'un de ses points, le coefficient angulaire de cette tangente diminue ou augmente algébriquement, à mesure que le point de contact s'éloigne de l'axe des ordonnées*. Le contraire a lieu si l'arc que l'on considère est situé dans l'un des angles* yOX *ou* YOx.

* Nous avons supposé les coordonnées rectangulaires ; mais la règle

Faisons une application de cette règle à la cissoïde. Le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe au point (x, y) est (146)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y^2 + 3x^2}{2y(2r - x)}.$$

Or, si l'on fait croître x, y croît aussi, et par conséquent on ne voit pas comment varie le dénominateur. Eliminons donc y au moyen de l'équation de la courbe,

$$y^2(2r - x) - x^3 = 0,$$

et il viendra, toutes réductions faites,

$$\operatorname{tang}\alpha = \pm \frac{\sqrt{x}(3r - x)}{\sqrt{(2r - x)^3}},$$

le signe supérieur étant relatif à l'arc situé au-dessus de l'axe des x, et le signe inférieur à l'arc situé au-dessous. Or, si x augmente, l'un des facteurs du numérateur croît, tandis que l'autre décroît, ainsi que le dénominateur, de sorte que l'on ne peut encore rien conclure pour tangα; mais j'observe que cette valeur revient à

$$\operatorname{tang}\alpha = \pm \sqrt{\frac{x}{2r - x}} \cdot \frac{3r - x}{2r - x};$$

or le premier facteur augmente évidemment avec x; quant au second, on peut le mettre sous la forme $1 + \frac{r}{2r - x}$, et on voit alors qu'il augmente avec x; donc la première valeur de tangα augmente et la seconde diminue; donc les deux branches de la courbe présentent leur convexité à l'axe des abscisses.

437. Scolie. La considération de la figure 152 montre que *quand l'abscisse d'un point d'une courbe augmente, l'ordonnée correspondante augmente ou diminue, selon que le coefficient angulaire de la tangente est positif ou négatif.*

***438.** Si la courbe était rapportée à des coordonnées polaires, il faudrait calculer la tangente de l'angle α que la

---

serait encore vraie si elles étaient obliques; car $\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$, coefficient angulaire de la tangente, augmente et diminue avec α

touchante au point (ω, ρ) fait avec l'axe polaire. Or cet angle α est égal à $M+\omega$, de sorte qu'il sera facile d'exprimer sa tangente en fonction de ω et de ρ. Mais l'expression de cette tangente est ordinairement si compliquée qu'elle n'est alors d'aucune utilité.

§ II. Points *maximums* et *minimums*.

439. *Un point d'une branche de courbe est dit* MAXIMUM *ou* MINIMUM, *par rapport à l'axe des abscisses, lorsque son ordonnée surpasse celles des points qui le précèdent et le suivent immédiatement, ou en est surpassée, pourvu toutefois que la tangente en ce point ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées;* s'il en était ainsi, le point que l'on considère prendrait le nom de *point de rebroussement.* Fig. 153

440. Il suit de cette définition, qu'en un point *maximum* la courbe est *concave* vers l'axe des x, et *convexe* au contraire à l'égard de cet axe, s'il s'agit d'un point *minimum* : donc si l'on mène une tangente à la branche sur laquelle se trouve un point *maximum*, en un point N suffisamment près de celui-ci, et qu'on fasse glisser le point de contact de manière qu'il s'éloigne de l'axe des y, le coefficient angulaire de la tangente diminuera (**434**) d'une manière continue* en passant du positif au négatif, puisque la tangente fait un angle aigu ou obtus avec l'axe des x, suivant que le point de

---

* Donnons, en effet, à x et à y les accroissements respectifs h et k, et développons les deux termes du coefficient angulaire en les ordonnant par rapport aux puissances et produits de ces accroissements : le numérateur, par exemple, donnera un résultat de la forme

$$\begin{aligned}\varphi'(x_1+h, y+k) = \varphi'(x_1, y) &+ a_1h + a_2h^2 + \dots\\ &+ b_1k + b_2hk + \dots\\ &+ c_2k^2 + \dots\end{aligned}$$

Or, puisque x et y sont les coordonnées d'un point qui décrit une même branche de courbe, y varie d'une manière continue, lorsque x croît de la même manière; par conséquent, si h tend vers zéro, il en est de même de k; donc on peut rendre la différence $\varphi'(x_1+h, y+k) - \varphi'(x_1, y)$ moindre que toute grandeur donnée. Ainsi lorsque x croîtra d'une manière continue, les deux termes de la fraction $-\frac{\varphi'(x_1, y)}{\varphi'(x, y_1)}$ varieront d'une manière continue, et cette fraction elle-même variera aussi d'une manière continue.

contact est à gauche ou à droite de M. Or ce coefficient n'a pas pu devenir infini, puisque la tangente au point *maximum* n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées; donc il a dû nécessairement passer par zéro; et comme on en dirait autant pour un point *minimum*, on en conclut que *la tangente en un point* maximum *ou* minimum *est parallèle à l'axe des abscisses, et que par conséquent son coefficient angulaire est nul.*

Observons toutefois que la réciproque de ce théorème n'est point toujours vraie, c'est-à-dire que l'on ne doit pas conclure qu'un point est *maximum* ou *minimum*, par cela seul que la tangente en ce point est parallèle à l'axe des x; car ce point pourrait être un *point d'inflexion*, comme on le voit dans la figure 154, c'est-à-dire un point où la concavité de la courbe se change en convexité, ou bien un point de rebroussement, comme le point M de la figure 155.

Concluons que, pour déterminer les points *maximum* et *minimum* d'une courbe, il faudra calculer le coefficient angulaire de la tangente en un point indéterminé (x, y) de cette courbe, et égaler ce coefficient $-\frac{\varphi'(x_1, y)}{\varphi'(x, y_1)}$ à zéro. Mais comme $\varphi'(x, y_1)$ ne peut pas devenir infini, puisque c'est une fonction entière de x et de y, on se contentera de poser $\varphi'(x_1, y)=0$, c'est-à-dire d'égaler à zéro la dérivée de l'équation proposée, prise par rapport à x, de sorte que le système des équations

$$\varphi(x, y)=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x_1, y)=0$$

déterminera les coordonnées de tous les points de la courbe proposée qui *peuvent* être des points *maximums* ou *minimums*.

441. Pour reconnaître si le point qui a pour coordonnées un couple de valeurs de x et de y qui vérifient les deux équations précédentes, est effectivement un point *maximum* ou un point *mininum*, on observera qu'à droite et à gauche d'un pareil point l'ordonnée de la courbe doit être réelle, et que le coefficient angulaire de la tangente doit avoir des signes contraires pour deux valeurs de x, l'une un peu plus grande et l'autre un peu plus petite que l'abscisse du point *maximum* ou *minimum*. S'il est positif pour la plus petite

de ces valeurs, le point est *maximum*, et il est *minimum* dans le cas contraire.

Si la fonction $-\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)}$ a le même signe pour les points qui précèdent et qui suivent immédiatement celui que l'on considère, la courbe a une inflexion en ce point; et elle y forme un rebroussement, si l'ordonnée est réelle d'un côté de ce point et imaginaire de l'autre. Tel est le point M de la figure 155. Fig. 154 Fig. 155

Lorsqu'on ne cherchera les points *maximums* et *minimums* d'une courbe que pour en assigner plus exactement la forme, et c'est ce qui arrivera le plus souvent, la discussion à laquelle on se sera préalablement livré, en discutant l'ordonnée (**51**), suffira toujours pour reconnaître si le point déterminé par une solution des équations

$$\varphi(x, y)=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x_1, y)=0,$$

est un point *maximum, minimum,* d'inflexion ou de rebroussement.

442. En cherchant les points *maximums* et *minimums* par rapport à l'axe des y, ce qui se fera en déterminant les solutions des équations

$$\varphi'(x, y_1)=0, \quad \varphi(x, y)=0,$$

on aura les points qui limitent l'étendue de la courbe dans le sens de l'axe des x. On les appelle en conséquence des *points-limites*.

Exemple. *Trouver les points* MAXIMUMS, MINIMUMS *et* LIMITES *du lieu de l'équation*

$$900y^2-30x^3+x^4=0$$

que nous avons construite au n° **50**. Les points *maximums* et *minimums* seront donnés par le système des équations Fig. 17

$$\left.\begin{matrix}\varphi(x,y)=900y^2-30x^3+x^4=0\\ \varphi'(x_1,y)=-90x^2+4x^3=0\end{matrix}\right\}, \text{d'où} \begin{Bmatrix}x=0\\ y=0\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}x=22,5\\ y=\ 9,74\end{Bmatrix};$$

et les coordonnées des points-limites seront les solutions des deux équations

$$\left.\begin{matrix}\varphi(x,y)=900y^2-30x^3+x^4=0\\ \varphi'(x,y_1)=1800y=0\end{matrix}\right\}, \text{d'où} \begin{Bmatrix}x=0\\ y=0\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}x=30\\ y=0\end{Bmatrix}.$$

La nature du point (0, 0) est, comme on voit, tout à fait indéterminée. Pour la connaître, je me reporte au coefficient angulaire, et je trouve, en en éliminant y au moyen de l'équation proposée, qu'il revient à

$$\frac{\sqrt{x}(45-2x)}{30(30-x)},$$

quantité qui pour $x=0$ se réduit à zéro; et comme d'ailleurs la courbe ne s'étend pas à gauche de l'axe des y, on en conclut que les deux branches de la courbe touchent l'axe des abscisses à l'origine et y forment un rebroussement.

Les points A et A′ ($x=22,5$ et $y=\pm 9,74$) sont des points *maximums*, et le point B (30,0) est un point-limite.

443. Lorsque la courbe que l'on considère est rapportée à des coordonnées polaires, il est également facile de déterminer ses points *maximums* et *minimums* par rapport à l'axe fixe, ainsi que ses *points-limites*. En effet, aux points *maximums* et *minimums*, la tangente devant être parallèle à l'axe fixe, l'angle M doit être le supplément de ω : ainsi $\operatorname{tang} M = -\operatorname{tang}\omega$; et comme le point dont il s'agit est sur la courbe, on a entre ses coordonnées les deux équations

$$\operatorname{tang}\omega = -\rho \lim\frac{h}{k} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega,\rho)=0,$$

ce qui suffira pour les déterminer. On reconnaîtra ensuite si le point dont on aura calculé ainsi les coordonnées est *maximum* ou *minimum*, en examinant le cours de la courbe de part et d'autre de ce point.

Pour avoir les *points-limites* de la courbe dans le sens de l'axe fixe, on observera qu'en ces points la tangente est perpendiculaire à l'axe polaire, et qu'ainsi l'angle M est le complément de ω, de sorte que $\operatorname{tang} M = \cot\omega$; les coordonnées des *points-limites* seront donc données par les deux équations

$$\rho \operatorname{tang}\omega . \lim\frac{h}{k} = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(\rho,\omega)=0.$$

Prenons, pour exemple, le lieu de l'équation

$$\rho\cos\omega\cos 2\omega = a.$$

On cherchera d'abord la limite du rapport $\frac{h}{k}$, et, pour le faire

le plus simplement possible, on observera que

$$\cos\omega\cos 2\omega = \frac{1}{2}(\cos 3\omega + \cos\omega),$$

de sorte que l'équation proposée revient à

$$\cos 3\omega + \cos\omega = \frac{2a}{\rho}.$$

En opérant alors comme il a été indiqué au n° **160**, on trouvera facilement

$$3\sin\left(3\omega + \frac{3h}{2}\right)\frac{\sin\frac{3h}{2}}{\frac{3h}{2}} + \sin\left(\omega + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{2a\frac{k}{h}}{\rho(\rho+k)},$$

$$3\sin 3\omega + \sin\omega = \frac{2a}{\rho^2}\lim\frac{k}{h}, \quad \text{partant} \quad \operatorname{tang} M = \frac{\cos 3\omega + \cos\omega}{3\sin 3\omega + \sin\omega}.$$

Nous aurons donc pour déterminer les points *maximums* et *minimums* les deux équations

$$\frac{\cos 3\omega + \cos\omega}{3\sin 3\omega + \sin\omega} + \frac{\sin\omega}{\cos\omega} = 0 \quad \text{et} \quad \rho\cos\omega\cos 2\omega = a.$$

On tire successivement de la première

$$\cos 3\omega\cos\omega + \cos^2\omega + 3\sin 3\omega\sin\omega + \sin^2\omega = 0,$$

$$\cos 2\omega + 1 - (\cos 4\omega - \cos 2\omega) = 0,$$

$$\cos 4\omega - 2\cos 2\omega - 1 = 0, \ldots\ \cos^2 2\omega - \cos 2\omega - 1 = 0.$$

$$\cos 2\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \ldots\ \cos\omega = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}; \quad \text{partant} \quad \rho = \frac{2a}{\sqrt{7-3\sqrt{5}}}.$$

Les *points-limites* ont pour coordonnées les valeurs de ρ et de ω qui satisfont aux deux équations

$$\frac{\cos 3\omega + \cos\omega}{3\sin 3\omega + \sin\omega} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega} \quad \text{et} \quad \rho\cos\omega\cos 2\omega = a.$$

On tire successivement de la première

$$3\sin 3\omega\cos\omega - \sin\omega\cos 3\omega = 0,$$

$$\sin 4\omega + 2\sin 2\omega = 0, \quad \sin 2\omega(\cos 2\omega + 1) = 0,$$

$$\sin 2\omega = 0, \quad \omega = k\frac{\pi}{2}, \qquad \rho = \pm a, \quad \rho = \pm\infty;$$

$$\cos 2\omega + 1 = 0, \quad \omega = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \rho = \pm\infty.$$

§ III. Théorie des *maximums* et des *minimums* des fonctions algébriques d'une seule variable.

444. *On dit qu'une fonction* F(x) *prend une valeur* MAXIMUM *pour* x = a, *lorsqu'en donnant successivement à la variable* x *des valeurs qui surpassent* a *ou en sont surpassées d'une quantité aussi petite que l'on voudra, les valeurs correspondantes de* F(x) *sont toujours moindres que* F(a). *Si ces valeurs de* F(x) *sont, au contraire, toujours plus grandes que* F(a), F(a) *est un* MINIMUM *de* F(x).

445. Si l'on pose $y = F(x)$ et que l'on regarde x et y comme des coordonnées courantes, cette équation représentera une courbe, et il est clair que les abscisses de ses points *maximums* ou *minimums* seront des valeurs de x qui rendront $F(x)$ *maximum* ou *minimum;* mais ce ne sont pas les seules valeurs de x qui jouiront de cette propriété; car si la courbe dont il s'agit a des points de rebroussement où la tangente soit parallèle à l'axe des y, comme au point M' de la
Fig. 155 figure 155, les ordonnées de ces points satisferont à la définition du n° **444**. La détermination des valeurs *maximums* et *minimums* de la fonction proposée $F(x)$ est donc ainsi ramenée à trouver les coordonnées des points *maximums* et *minimums* de la courbe qui a pour équation

$$y = F(x),$$

ainsi que les coordonnées des points de rebroussement de cette courbe, où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées. Nous distinguerons deux cas, suivant que la fonction proposée sera rationnelle et entière ou qu'elle ne le sera pas.

446. 1er Cas. $F(x)$ étant rationnelle et entière, le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y) sera $F'(x)$, ainsi que nous l'avons vu au n° **144** : nous poserons donc

$$F'(x) = 0,$$

et les racines réelles de cette équation seront les valeurs de x qui *pourront* rendre $F(x)$ un *maximum* ou un *minimum*.

Soit a une de ces racines : pour reconnaître analytiquement si elle satisfait à la question, nous poserons $x = a + h$, h étant une quantité positive ou négative susceptible de décroître indéfiniment, et en substituant cette valeur de x dans

la fonction proposée, et développant $F(a+h)$ d'après le théorème des fonctions dérivées, nous trouverons, en observant que $F'(a)$ est identiquement nulle,

$$F(a+h)-F(a)=F''(a)\frac{h^2}{1.2}+F'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots,$$

ou, en mettant h^2 en facteur commun du second membre,

$$F(a+h)-F(a)=h^2\left(\frac{F''(a)}{1.2}+F'''(a)\frac{h}{1.2.3}+\ldots\right).$$

Or, puisque h est une quantité susceptible de décroître indéfiniment, on voit qu'on pourra lui assigner des valeurs soit positives, soit négatives, telles que le premier terme de la quantité renfermée dans les parenthèses soit plus grand que la somme de tous les autres, de sorte que le signe du second membre, et par conséquent celui du premier, sera le signe même de $F''(a)$; donc $F(a)$ sera un *maximum* ou un *minimum* selon que $F''(a)$ sera négative ou positive.

Mais, si $F''(a)$ est nulle et que $F'''(a)$ ne le soit pas, le second membre, et par conséquent le premier, changera de signe avec h, de sorte que $F(a)$ ne sera ni un *maximum* ni un *minimum*. Mais si $F'''(a)=0$, on a

$$F(a+h)-F(a)=h^4\left(\frac{F^{\text{IV}}(a)}{1.2.3.4}+F^{\text{V}}(a)\frac{h}{1.2.3.4.5}+\ldots\right),$$

et il est clair que si $F^{\text{IV}}(a)\gtrless 0$, le premier membre sera constamment négatif ou positif, et qu'ainsi $F(a)$ est un *maximum* ou un *minimum*, et ainsi de suite.

Ainsi, *pour qu'une racine de l'équation* $F'(x)=0$ *rende la fonction* $F(x)$ maximum *ou* minimum, *il faut et il suffit que la première dérivée qu'elle n'anéantit pas soit d'ordre pair; si cette dérivée est rendue négative par la substitution de cette racine,* $F(x)$ *est* maximum, *et* minimum *dans le cas contraire.*

447. Remarquons que si la valeur a de x annule plusieurs dérivées consécutives, à partir de la première, la parallèle à l'axe des x, qui a pour équation $y=F(a)$, coupera cette courbe en autant de points réunis en un seul qu'il est marqué par le nombre de ces dérivées, plus un; car l'équation qui a pour racines les abscisses des points d'intersection

de la droite $y=F(a)$, avec la courbe $y=F(x)$, étant $F(x)-F(a)=0$, ses dérivées successives sont les mêmes que celles de $F(x)=0$; donc elle a autant de racines égales à a qu'il y a d'unités, plus une, dans le nombre de ces dérivées de $F(x)$ qu'anéantit cette valeur a de x. La droite $y=F(a)$ est donc une tangente à la courbe $y=F(x)$, mais une tangente qui a avec cette courbe un *contact d'un ordre supérieur au premier : du second, du troisième, du quatrième,....* ordre, suivant que cette droite coupe la courbe en *deux, trois, quatre,....*points réunis en un seul. Or, ce qui est très-remarquable, c'est que *si le contact est d'ordre impair, le point de tangence est un point d'inflexion.* Nous avons vu, en effet, que si $F'(a)$ et $F''(a)$ sont nulles sans que $F'''(a)$ le soit, la différence $F(a+h)-F(a)$ entre l'ordonnée de la droite $y=F(a)$ et celle d'un point de la courbe pris aussi près que l'on voudra du point dont l'abscisse est a, changeait de signe avec h, de sorte que si d'un côté de ce point la courbe est au-dessus de sa tangente, de l'autre elle sera au-dessous.

448. 2ᵉ Cas. Supposons que la fonction proposée $F(x)$ ne soit plus rationnelle et entière, on posera encore $y=F(x)$, mais on fera évanouir de cette équation les radicaux et les dénominateurs, ce qui donnera une certaine équation

$$\varphi(x, y)=0,$$

et il s'agira de trouver les abscisses des points du lieu de cette équation qui sont *maximums* ou *minimums,* ainsi que celles de ses points de rebroussement où la tangente est parallèle à l'axe des y. Or, le coefficient angulaire de la tangente doit être nul pour les points *maximums* et *minimums,* et infini pour les points de rebroussement dont il s'agit ici. En conséquence, on formera les dérivées de $\varphi(x,y)$ par rapport à x et à y, et on posera

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(x_1, y)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\varphi'(x, y_1)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{array}\right\};$$

puis on éliminera y entre les équations du premier système, et aussi entre celles du second, et on aura deux équations finales

$$\pi(x)=0, \quad \psi(x)=0,$$

dont les racines seront les valeurs de x qui *peuvent* rendre la fonction proposée *maximum* ou *minimum*. Pour reconnaître ensuite si une racine a de l'une de ces équations jouit de cette propriété, il faudra comparer $F(a)$ avec les valeurs que prend $F(x)$ pour des valeurs de x, qui diffèrent très-peu de a, soit en *plus*, soit en *moins*. Mais si la forme de la fonction proposée ne permet pas de faire cette comparaison, et c'est ce qui arrivera le plus souvent, on examinera le cours de la courbe $\varphi(x,y)=0$ aux environs du point $[a, F(a)]$, et la remarque du n° **437** pourra être alors très-utile pour cela.

Exemples. I. *Trouver les limites de la fonction*

$$F(x)=3x^4-4x^3-6x^2+12x-5.$$

Sa dérivée est

$$F'(x)=12x^3-12x^2-12x+12=0:$$

ainsi, les valeurs de x qui peuvent répondre à des *maximums* ou à des *minimums* de la fonction proposée sont les racines de cette équation. On trouve qu'elle a deux racines égales à $+1$ et une égale à -1. La première anéantira nécessairement $F''(x)=12(3x^2-2x-1)$, mais elle ne pourra pas rendre $F'''(x)$ égale à zéro; donc $F(1)$ n'est ni un *maximum*, ni un *minimum*; quant à la racine -1, elle réduira $F''(x)$ à $+12.4$; donc $F(-1)=-16$ est un *minimum*.

II. *Construire un cylindre dont l'aire totale soit égale à celle d'un cercle donné, et dont le volume soit le plus grand possible.*

Soient h et r la hauteur et le rayon du cylindre demandé, a le rayon du cercle donné, on exprimera que l'aire du cylindre est égale à celle du cercle donné, en écrivant

$$2\pi rh+2\pi r^2=\pi a^2, \quad \text{d'où} \quad h=\frac{a^2-2r^2}{2r};$$

l'expression du volume que l'on veut rendre *maximum* sera ainsi $\frac{\pi r(a^2-2r^2)}{2}$, et l'équation du problème sera en conséquence

$$a^2-2r^2-4r^2=0;$$

et comme la dérivée du premier membre de cette équation

est $-12r$, on voit que la valeur de r qu'elle détermine,

$$r=\frac{a}{\sqrt{6}},$$

répond à un *maximum* de la fonction $\frac{\pi r(a^2-2r^2)}{2}$. En substituant cette valeur de r dans celle de h, on trouvera

$$h=a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2a}{\sqrt{6}}=2r.$$

Ainsi le cylindre demandé est équilatéral.

III. Soit $F(x)=\frac{4x}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. Il est évident que les valeurs de x qui rendront le cube de $\frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ un *maximum* ou un *minimum*, rendront pareillement la fonction proposée *maximum* ou *minimum*. Je pose donc

$$y=\frac{x^3}{(x-1)^2}, \quad \text{d'où} \quad \varphi(x,y)=y(x-1)^2-x^3=0.$$

De là

$$\left.\begin{matrix}\varphi'(x_1,y)=2y(x-1)-3x^2=0\\ \varphi(x,y)=y(x-1)^2-x^3=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}\varphi'(x,y_1)=(x-1)^2=0\\ \varphi(x,y)=y(x-1)^2-x^3=0\end{matrix}\right\}.$$

La seule solution du second système est évidemment $\left.\begin{matrix}x=1\\ y=\infty\end{matrix}\right\}$.
On pouvait reconnaître que la fonction proposée était susceptible de croître au delà de toute limite ; car, lorsque x augmente depuis zéro jusqu'à 1, son dénominateur décroît jusqu'à zéro.

Le premier système d'équations donne $\left.\begin{matrix}x=0\\ y=0\end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix}x=3\\ y=\frac{27}{4}\end{matrix}\right\}$.
Pour savoir quelle est la nature de la valeur *zéro* de la fonction, je considère que le signe de cette fonction change avec celui des x, et qu'ainsi zéro n'est ni un *maximum* ni un *minimum* de cette fonction. Quant à la valeur $y=\sqrt[3]{16}$ qu'elle prend pour $x=3$, comme à partir de $x=3$, les deux termes de $\frac{4x}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ varient dans le même sens, on ne peut rien con-

clure de la considération de cette fonction. Je forme alors le coefficient angulaire,

$$\frac{3x^2-2y(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

de la tangente à la courbe $\varphi(x,y)=0$, et je vois que pour toute valeur de $x<3$ et >1, il est négatif, et positif pour toute valeur de $x>3$; donc la courbe descend vers le point $\left(x=3, y=\frac{27}{4}\right)$ en s'éloignant de l'axe des ordonnées, et se relève après l'avoir atteint; donc $x=3$ rend la fonction proposée un *minimum*.

CHAPITRE XIX.

DES POINTS SINGULIERS.

449. *On entend par* POINT SINGULIER *tout point d'une courbe où elle offre quelque particularité remarquable.*

450. POINTS D'INFLEXION. *On appelle point d'inflexion le point où une courbe, en poursuivant son cours, passe de la concavité à la convexité vers l'axe des abscisses.*

Il suit du théorème du n° **436** que, si en s'éloignant de Fig. 156 l'axe des y, la courbe proposée passe de la forme convexe à la forme concave, le coefficient angulaire de la tangente a augmenté jusqu'au point d'inflexion pour diminuer ensuite; donc en ce point il a atteint une valeur *maximum*. Le contraire aurait lieu si la courbe passait de la forme concave à la forme convexe. Par conséquent, pour déterminer les abscisses des points d'inflexion, il n'y aura qu'à chercher les valeurs de x qui rendent *maximum* ou *minimum* le coefficient angulaire de la tangente, exprimé en fonction de x seulement. Observons toutefois que si ces valeurs *maximum* ou *minimum* sont l'*infini* ou *zéro*, il faudra s'assurer que le point dont il s'agit n'est pas un point *maximum* ou *minimum*, un point de rebroussement ou un point-limite.

EXEMPLE. *La courbe représentée par l'équation*

$$\varphi(x, y)=x^3-ax^2-a^2y=0$$

a-t-elle des points d'inflexion?

$$-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}=-\frac{3x^2-2ax}{-a^2},\text{ partant }\quad 2.3x-2a=0;$$

d'où $\quad x=\frac{a}{3},\quad y=-\frac{2a}{27},\ldots-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}=-\frac{1}{3}.$

Il y a donc un point d'inflexion dont les coordonnées sont $\frac{a}{3}$ et $-\frac{2a}{27}$, et le coefficient angulaire de la tangente en ce point est $-\frac{1}{3}$.

451. Cette méthode est très-simple lorsque $-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}$ est

une fonction entière et rationnelle d'une seule variable ; mais elle devient presque impraticable par sa longueur, quand il n'en est pas ainsi ; car si elle renferme x et y, on devra, en général, poser $-\frac{\varphi'(x_1, y)}{\varphi'(x, y_1)}=z$, puis éliminer y entre cette équation et celle $\varphi(x, y)=0$ de la courbe, et ensuite chercher les abscisses des points *maximums, minimums* et celles des points de rebroussement correspondants à une tangente parallèle à l'axe des y, pour la courbe représentée par l'équation finale $\psi(x, z)=0$. Voici une autre méthode qui est d'une application beaucoup plus facile, et qui a d'ailleurs l'avantage de s'étendre à d'autres objets dont la considération est fort importante dans la discussion des courbes.

***452.** Soient (x', y') les coordonnées d'un point M de la courbe qui a pour équation $\varphi(x, y)=0$; $(x'+h, y'+k)$ les coordonnées d'un autre point M' de cette courbe : l'équation de la droite qui les joint sera

$$y-y'=\frac{k}{h}(x-x'),$$

avec les deux conditions $\varphi(x', y')=0$ et

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x'+h, y'+k)=\varphi'(x'_1, y')h+\varphi''(x'_2, y')\frac{h^2}{1.2}+\varphi'''(x'_3, y')\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\\ \qquad +\varphi'(x', y'_1)k+2\varphi''(x'_1, y'_1)\frac{hk}{1.2}+3\varphi'''(x'_2, y'_1)\frac{h^2k}{1.2.3}+\ldots\\ \qquad\qquad +\varphi''(x', y'_2)\frac{k^2}{1.2}+3\varphi'''(x'_1, y'_2)\frac{hk^2}{1.2.3}+\ldots\\ \qquad\qquad\qquad +\varphi'''(x', y'_3)\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots\end{array}\right\}=0.$$

Maintenant désignons par r la distance MM', et si nous observons, comme dans la note du n° **142**, que h et k étant proportionnels à r, nous pourrons poser $h=\alpha r$ et $k=\beta r$, les équations précédentes deviendront

$$y-y'=\frac{\beta}{\alpha}(x-x') \qquad [1],$$

$$\varphi(x', y')=0 \qquad [2],$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(x'_1, y').\alpha\\ +\varphi'(x', y'_1).\beta\end{array}\right| r+\left.\begin{array}{l}\varphi''(x'_2, y')\alpha^2\\ +2\varphi''(x'_1, y'_1)\alpha\beta\\ +\varphi''(x', y'_2)\beta^2\end{array}\right|\frac{r^2}{1.2}+\left.\begin{array}{l}\varphi'''(x'_3, y')\alpha^3\\ +3\varphi'''(x'_2, y'_1)\alpha^2\beta\\ +3\varphi'''(x'_1, y'_2)\alpha\beta^2\\ +\varphi'''(x', y'_3)\beta^3\end{array}\right|\frac{r^3}{1.2.3}+\ldots=0 \qquad [3].$$

Or, r ne représente pas la distance du point M à l'un des points où la sécante MM′ rencontre la courbe plutôt qu'à tout autre de ces points ; ainsi l'équation [3] doit avoir pour racines les distances du point M à tous les points où cette sécante rencontre la courbe, et voilà pourquoi elle a une racine nulle ; car M est lui-même un de ces points.

Cela posé, si M est un point d'inflexion, il est clair qu'en prenant le point M′ suffisamment près de M, la sécante MM′ coupera nécessairement la courbe en un troisième point M″ situé de l'autre côté de M par rapport à M′, et que ces deux points se réuniront avec M, quand la sécante viendra coïncider avec la tangente au point M. L'équation [3] aura alors trois racines nulles, et deviendra par conséquent divisible par r^3 quand on y remplacera le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ par la valeur du coefficient angulaire de la tangente au point M, c'est-à-dire par $-\frac{\varphi'(x'_1, y')}{\varphi'(x', y'_1)}$. Donc, *pour trouver les points d'inflexion, on devra égaler à zéro les coefficients de* r *et de* r^2, *ce qui donnera les équations de condition*

$$\varphi(x,y) = 0,$$
$$\varphi'(x_1,y)\alpha + \varphi'(x,y_1)\beta = 0,$$
$$\varphi''(x_2,y)\alpha^2 + 2\varphi''(x_1,y_1)\alpha\beta + \varphi''(x,y_2)\beta^2 = 0,$$

au moyen desquelles on déterminera les coordonnées (x, y) *du point d'inflexion, et le coefficient angulaire de la tangente en ce point :* si les valeurs de x et de y tirées de ces équations n'étaient pas réelles et finies, il n'y aurait pas d'inflexion *.

---

* Si une valeur *particulière* de $\frac{\beta}{\alpha}$ annule les coefficients de toutes les puissances de r inférieures à la $n^{\text{ième}}$, il n'y aura d'inflexion au point (x, y) que dans le cas où n sera un nombre impair. Considérons, en effet, une
Fig. 157 courbe sinueuse UV et une sécante qui la coupe aux points d'inflexion M, M′, M″,.... Il est clair que les longueurs des cordes qu'elle laisse dans la courbe, dépendent à la fois de la position de cette sécante et des constantes de l'équation proposée $\varphi(x,y) = 0$. Si donc, en donnant des valeurs convenables à ces constantes, les deux points d'inflexion M et M′ viennent à se réunir, ces deux inflexions se détruiront mutuellement, de sorte que si la courbe n'en avait pas eu primitivement d'autres, elle n'en présentera plus. Mais si elle en a une troisième M″, elle la conservera encore, lors même que ce point M″ viendrait à se confondre avec les deux premiers, et ainsi de suite.

EXEMPLE. $y^5+a^2x^3-b^5=0$. On trouvera

$$\varphi'(x_1,y)=3a^2x^2,\quad \varphi'(x,y_1)=5y^4,\quad \varphi''(x_1,y_1)=0,$$
$$\frac{\varphi''(x_1,y)}{1.2}=3a^2x,\quad \frac{\varphi''(x,y_1)}{1.2}=10y^3.$$

Donc

$$y^5+a^2x^3-b^5=0,$$
$$3a^2x^2\alpha+5y^4\beta=0,$$
$$3a^2x\alpha^2+10y^3\beta^2=0.$$

On tire de la seconde

$$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{3a^2x^2}{5y^4},$$

substituant dans la troisième, il viendra

$$xy^3(5y^5+6a^2x^3)=0.$$

$x=0$ donne $y=b$; $y=0$ donne $x=\sqrt[3]{\frac{b^5}{a^2}}$. De la combinaison des deux équations $5y^5+6a^2x^3=0$ et $y^5+a^2x^3-b^5=0$, il résulte $x=-\sqrt[3]{\frac{5b^5}{a^2}}$ et $y=b\sqrt[5]{6}$. Ainsi il y a trois inflexions aux points $(0, b)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{b^5}{a^2}}, 0\right)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{5b^5}{a^2}}, b\sqrt[5]{6}\right)$.

*453. POINTS MULTIPLES. *On appelle point multiple un point commun à plusieurs branches d'une même courbe,* et on dit que ce point est *double, triple, quadruple,* suivant qu'il appartient à *deux, trois, quatre* branches.

Il peut se faire que les branches qui se réunissent au point multiple se *coupent* (fig. 158), ou s'*embrassent* (fig. 159), ou forment une *osculation,* c'est-à-dire se touchent en s'opposant leur convexité (fig. 160). Dans le premier cas, chaque branche a sa tangente distincte, tandis que dans le second et dans le troisième ces tangentes se confondent. Fig. 158 159, 160

Si le point M est multiple, quelle que soit la direction de la sécante menée par ce point, l'équation [3] aura autant de racines nulles qu'il passe de branches par ce point; donc les coefficients de toutes les puissances de r, dont l'exposant est un nombre plus petit que celui de ces branches, doivent être nuls, et cela indépendamment de toute valeur particulière donnée au rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, coefficient angulaire de la sécante. Par Fig. 158

conséquent, si le point M est, par exemple, un point triple, il faudra que l'on ait

$$\varphi'(x_1, y)=0, \quad \varphi'(x, y_1)=0,$$
$$\varphi''(x_2, y)=0, \quad \varphi''(x_1, y_1)=0, \quad \varphi''(x, y_2)=0.$$

D'où l'on voit que *la condition nécessaire pour qu'une courbe* $\varphi(x, y)=0$ *ait un point multiple, c'est que les dérivées du premier ordre de son équation prises successivement par rapport à* x *et par rapport à* y *soient vérifiées par les coordonnées de ce point. On résoudra donc les équations*

$$\varphi'(x_1, y)=0 \quad \textit{et} \quad \varphi'(x, y_1)=0,$$

et si l'on trouve des solutions réelles communes à ces deux équations et à $\varphi(x, y)=0$, *on en conclura que les points dont elles sont les coordonnées* PEUVENT *être des points multiples.*

* **451.** Pour achever de caractériser ces points, il faudra voir par combien de branches ils sont formés, et si ce sont des points d'intersection, d'embrassement ou d'osculation. On examinera donc combien on peut mener de tangentes au point (x', y'). Or, si l'on fait tourner la sécante MM', qui est représentée par les équations [1], [2] et [3], jusqu'à ce qu'elle soit venue coïncider avec la tangente MT, il est clair que l'équation [3] aura alors une nouvelle racine nulle, et par conséquent une de plus qu'il n'est indiqué par le degré de multiplicité du point M. Ainsi, dans le cas d'un point triple, le coefficient de r^3 devra s'annuler lorsqu'on y remplacera $\frac{\beta}{\alpha}$ par le coefficient angulaire de la tangente MT : mais comme il en est de même pour chacune des tangentes menées par le point M aux trois branches qui passent par ce point, il en résulte qu'en égalant à zéro le coefficient de r^3, on formera une équation qui aura pour racines les coefficients angulaires de ces trois tangentes. *On substituera donc dans l'équation*

$$\varphi''(x_2, y)+2\varphi''(x_1, y_1)\frac{\beta}{\alpha}+\varphi''(x, y_2)\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0 \quad [4],$$

les coordonnées du point M, *et si* $\varphi''(x_2, y)$, $\varphi''(x_1, y_1)$ *et* $\varphi''(x, y_2)$ *ne sont pas anéanties toutes trois par cette substitution, on en conclura que ce point est double et que les*

coefficients angulaires des deux tangentes correspondantes seront les valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$ données par cette équation.

Si $\varphi''(x_2, y)$, $\varphi''(x_1, y_1)$ et $\varphi''(x, y_2)$ s'évanouissent, on substituera les coordonnées de M *dans l'équation*

$$\varphi'''(x_3, y)+3\varphi'''(x_2, y_1)\frac{\beta}{\alpha}+3\varphi'''(x_1, y_2)\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\varphi'''(x, y_3)\frac{\beta^3}{\alpha^3}=0;$$

et si le résultat de cette substitution n'est pas identiquement nul, c'est que M *est un point triple, et les trois valeurs du coefficient angulaire de la tangente en ce point seront les racines de cette équation; et ainsi de suite.*

Si l'équation qui détermine le coefficient angulaire de la tangente au point multiple a ses racines inégales, c'est un point d'intersection; si toutes ses racines sont égales entre elles, c'est un point d'embrassement ou d'osculation; et s'il y en a d'égales et d'inégales, c'est à la fois un point d'intersection et d'attouchement. Pour savoir si un point d'attouchement est d'embrassement ou d'osculation, il suffira d'examiner comment les branches qui le forment présentent leur concavité à l'axe des abscisses (436). Enfin si l'équation formée, en égalant à zéro le premier des coefficients de l'équation [3] qui ne devient pas identiquement nul par la substitution des coordonnées du point que l'on considère, n'a qu'une seule racine réelle, ce point n'est pas multiple.

Exemples. I. Soit $\varphi(x, y)=y^3-3axy+x^3=0$. On a

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x_1, y)&=-3ay+3x^2=0\\ \varphi'(x, y_1)&=\ \ 3y^2-3ax=0\end{aligned}\right\},\quad \text{de là}\quad \left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=a\\ y&=a\end{aligned}\right\}.$$

Le premier couple vérifie l'équation proposée, mais le second n'y satisfait pas. Ainsi l'origine est un point multiple et le seul qu'ait la courbe proposée. Ce point est double, sans quoi cette courbe pourrait être coupée par une droite en plus de trois points, et elle est du troisième ordre. Pour savoir si c'est un point d'intersection ou d'attouchement, je forme l'équation [4], et je trouve Fig. 175

$$\frac{\varphi''(x_2, y)}{1.2}=3x,\quad \varphi''(x_1, y_1)=-3a,\quad \frac{\varphi''(x, y_2)}{1.2}=3y;$$

partant $$3x-3a\frac{\beta}{\alpha}+3y\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0.$$

Les racines de cette équation correspondantes à $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}$ sont $\frac{\beta}{\alpha}=\infty$ et $\frac{\beta}{\alpha}=0$; donc les tangentes au point multiple sont les axes mêmes des coordonnées, et les deux branches de la courbe s'y *coupent*.

Fig. 161 II. Soit $a^2y^2-a^2x^2+x^4=0$. On trouvera que l'origine est à la fois un point double et un point d'inflexion.

Fig. 162 III. Soit $\varphi(x, y)=y^2-2x^2y+x^5=0$. On verra facilement que la courbe a à l'origine un point d'attouchement sur une inflexion.

IV. Soit $\varphi(x, y)=ay^3-(x-b)^3x=0$. On trouvera $\left.\begin{matrix}\varphi'(x_1, y)=-(x-b)^2(4x-b)=0\\ \varphi'(x, y_1)=3ay^2=0\end{matrix}\right\}$. La seule solution commune à ces équations et à la proposée est $\left.\begin{matrix}x=b\\y=0\end{matrix}\right\}$. On verra ensuite que

$$\frac{1}{2}\varphi''(x_2, y)=-3(x-b)(2x-b),\quad \varphi''(x_1, y_1)=0,$$
$$\frac{1}{2}\varphi''(x, y_2)=3ay,$$

quantités qui s'évanouissent pour $x=b$ et $y=0$; puis

$$\frac{1}{1.2.3}\varphi'''(x_3, y)=-(4x-3b),\quad \varphi'''(x_2, y_1)=0,\quad \varphi'''(x_1, y_2)=0,$$
$$\frac{1}{1.2.3}\varphi'''(x, y_3)=a,$$

de sorte qu'en égalant le coefficient de r^3 à zéro, on trouve $-b+a\frac{\beta^3}{\alpha^3}=0$. Cette équation n'a qu'une seule racine réelle, et ainsi *le point* (b, 0) *n'est pas multiple;* mais en ce point
Fig. 163 la courbe a un contact du deuxième ordre avec sa tangente, de sorte qu'il y a là une inflexion (**447**).

***455**. Points de rebroussement. *Les points de rebroussement sont des points multiples formés par deux branches de courbe qui se touchent et ne s'étendent pas au delà de leur point de contact.* Si la tangente commune se trouve entre les deux branches, le rebroussement est de première espèce, et il est de seconde lorsqu'elle les laisse d'un même côté.

*436. Il suit de cette définition que pour trouver les points de rebroussement d'une courbe $\varphi(x,y)=0$, il faudra chercher les points doubles de cette courbe, et celui de ces points pour lequel le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ aura deux valeurs égales sera un point de rebroussement, d'embrassement ou d'osculation. On reconnaîtra que c'est un point de rebroussement, lorsque, pour des valeurs de x, aussi peu différentes que l'on voudra de son abscisse, les ordonnées des branches qui le forment seront imaginaires d'un côté de ce point et réelles de l'autre; et il sera de première ou de seconde espèce, suivant que ces branches y tourneront leur concavité dans des sens contraires ou dans le même sens.

Exemples. I. Soit $\varphi(x,y)=a(y-x)^2-(x-b)^3=0$. On trouvera

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(x_1,y)=-2a(y-x)-3(x-b)^2=0\\ \varphi'(x,y_1)=2a(y-x)=0\end{array}\right\},\quad \text{d'où}\quad \left.\begin{array}{l}x=b\\ y=b\end{array}\right\}.$$

Puis

$$\tfrac{1}{2}\varphi''(x_2,y)=a-3(x-b),\quad \varphi''(x_1,y_1)=-2a,\quad \tfrac{1}{2}\varphi''(x,y_2)=a,$$

partant

$$a-3(x-b)-2a\frac{\beta}{\alpha}+a\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0=\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)^2.$$

Ainsi les deux branches de courbe qui passent au point (b,b) s'y touchent. D'ailleurs y est imaginaire pour $x<b$, et réelle pour toute autre valeur; donc il y a rebroussement au point (b,b). Pour en reconnaître le genre, je considère que

$$-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}=\frac{2a(y-x)+3(x-b)^2}{2a(y-x)}=1\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-b)}{a}}:$$

qu'ainsi, à mesure que x augmentera, à partir de b, la première valeur de $-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}$ croîtra, tandis que l'autre décroîtra; donc la première branche présente sa convexité à l'axe des x, et la seconde lui présente sa concavité (436); donc le rebroussement est de première espèee. Fig. 164

II. Soit $\varphi(x,y)=(ay-x^2)^2-c(x-b)^5=0$. On trouvera facilement qu'au point $\left(b,\frac{b^2}{a}\right)$, deux branches de courbe

se touchent, qu'elles ne s'étendent pas au delà de ce point du côté des abscisses négatives, et qu'aux environs de ce
Fig. 165 même point elles présentent leur convexité à l'axe des abscisses. Elles y forment donc un rebroussement de la seconde espèce.

*457. Points conjugués. *On appelle point conjugué un point dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe et qui en est tout à fait séparé. De plus, il est impossible de supprimer dans cette équation la solution qui donne les coordonnées du point conjugué.* Le caractère analytique d'un pareil point consiste évidemment en ce que, pour toute valeur de x, qui différera aussi peu que l'on voudra de l'abscisse de ce point, la valeur correspondante de y devra être imaginaire, de sorte qu'en faisant varier x d'une manière continue, depuis 0 jusqu'à $+\infty$ et jusqu'à $-\infty$, on ne pourra pas manquer de déterminer les points conjugués d'une courbe, s'il y en a.

Exemple. Soit $\varphi(x,y)=y^2-(x-2)^4(x-3)=0$. On voit que pour toute valeur de x inférieure à 2, y sera imaginaire; que pour $x=2$, $y=0$, et que pour toute valeur de x comprise entre 2 et 3, y est imaginaire. Donc le point (2, 0) est un point conjugué.

Cette équation donne lieu à une observation qui, au premier abord, paraît fort singulière, c'est que la tangente au point (2, 0) est réelle; on trouve, en effet,

$$-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}=\frac{(x-2)^3(5x-14)}{2y}.$$

Cette formule se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x=2$; mais si on y remplace y par sa valeur tirée de l'équation proposée, et qu'on réduise le résultat à sa plus simple expression

$$-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}=\pm\frac{(x-2)(5x-14)}{2\sqrt{x-3}},$$

on trouve que $-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}=0$ pour $x=2$. En faudrait-il conclure que l'axe des x est tangent à la courbe au point (2, 0)? Évidemment non; car, en faisant tourner une droite autour de ce point, elle ne pourra jamais rencontrer la courbe en un second point qui vienne coïncider avec lui. Mais, en vertu de l'équation proposée, l'axe des x coupe le lieu de cette

équation en cinq points dont quatre sont réunis en un seul (2, 0), et voilà pourquoi on a trouvé une valeur réelle pour le coefficient angulaire de la tangente en ce point.

*458. Il ne faudrait donc pas regarder, comme le caractère analytique des points conjugués, cette propriété qu'a fort souvent le coefficient angulaire de la tangente en ces points d'y prendre des valeurs imaginaires.

Il y a encore deux autres espèces de points singuliers, mais que l'on ne peut rencontrer que dans les courbes transcendantes (459 et 461) : ce sont les *points d'arrêt* et les *points saillants ou anguleux*.

*459. Points d'arrêt. *On appelle points d'arrêt tout point où s'arrête brusquement une branche unique de courbe.* L'équation

$$y=e^{\frac{1}{x}},$$

en offre un exemple. En y faisant croître x d'une manière continue depuis $x=0$ jusqu'à $x=+\infty$ et jusqu'à $x=-\infty$, on forme le tableau suivant :

$x=0$ donne $y=\infty$,
x aug^{te}. . . . . y dimin^{e},
$x=\infty$. . . . . $y=1$,
$x<0$. . . . . $y=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$.
$x=0$. . . . . $y=0$,
x aug^{te}. . . . . y aug^{te},
$x=\infty$. . . . . $y=1$.

Ainsi la courbe est composée de deux branches situées de part et d'autre de l'axe des y; la première a pour asymptotes l'axe des y et la parallèle menée à l'axe des abscisses à la distance $+1$ de cet axe; l'autre a cette même droite pour asymptote, et s'arrête *brusquement* à l'origine en venant de l'infini négatif. Fig. 166

Si l'on veut savoir sous quelle direction cette branche de courbe atteint l'origine, on représentera par (x, y) les coordonnées d'un point pris sur la branche négative, dans le voisinage de l'origine, et le coefficient angulaire de la sécante qui unit ces deux points sera $\frac{y}{x}=\frac{1}{x.e^{\frac{1}{x}}}$, de sorte que

pour avoir le coefficient angulaire de la tangente à l'origine, il faudra chercher la limite vers laquelle tend cette fraction quand x tend vers zéro. Or, on sait que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

(*Algèbre* de MM. *de Fourcy* et *Mayer*), donc

$$x.e^{\frac{1}{x}} = x + 1 + \frac{1}{1.2.x} + \frac{1}{1.2.3.x^2} + \ldots$$

Par conséquent, la limite de la quantité $\frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}}$ est zéro, et ainsi la courbe touche l'axe des x à l'origine des coordonnées.

460. Lorsqu'une branche d'une courbe algébrique s'arrête, c'est que l'ordonnée correspondante à l'abscisse que l'on considère devient imaginaire; toutefois le cours de cette courbe n'est pas interrompu pour cela; il arrive seulement qu'une seconde branche s'arrête aussi, mais au même point que la première, et qu'elles se continuent ainsi mutuellement. En effet, le premier membre de l'équation proposée $\varphi(x, y) = 0$ est, en regardant y comme la seule inconnue, décomposable en facteurs réels du second degré, de la forme

$$y^2 + 2Py + Q:$$

P et Q étant des fonctions de x qui, en général, sont irrationnelles. Or, on peut supposer que la branche qui s'arrête soit représentée par l'une ou l'autre des racines de l'équation formée en égalant ce trinôme à zéro, par

$$y = -P + \sqrt{P^2 - Q},$$

par exemple. Mais puisque cette équation représente une branche de courbe, P et $P^2 - Q$ varient d'une manière continue avec x; donc la formule

$$y = -P - \sqrt{P^2 - Q}$$

représente aussi une branche de courbe, qui s'arrête en même temps que la première, puisque ces deux valeurs de y deviennent imaginaires ensemble, et au même point que cette première; car la fonction continue $P^2 - Q$ n'a pu devenir négative qu'en passant par zéro, et alors les deux valeurs de y se sont trouvées égales. *Les courbes algébriques n'ont donc pas de points d'arrêt.*

***461**. POINTS SAILLANTS OU ANGULEUX. *On donne ce nom aux points où deux branches de courbe viennent se couper, sans y avoir la même tangente, de même que pour les points multiples, avec cette différence que les deux branches s'arrêtent là, sans se prolonger plus loin.* On en a un exemple dans la courbe représentée par l'équation

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

En faisant varier x, on trouve

$x=0 \ldots\ldots y=0,$
x aug^{te} $\ldots\ldots y$ aug^{te},
$x=\infty \ldots\ldots y=\infty.$

$$x<0 \ldots\ldots y=-\frac{x}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}.$$

$x=0 \ldots\ldots y=0,$
x aug^{te} $\ldots\ldots y$ incertain, mais réel et <0,
$x=\infty \ldots\ldots y=-\infty.$

Ainsi la courbe a deux branches qui s'étendent indéfiniment, Fig. 167 à partir de l'origine, dans les angles YOX et yOx. Cherchons à leur mener une tangente à l'origine. Il faut pour cela chercher les limites vers lesquelles tendent les quantités

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}},$$

lorsque x tend vers zéro. Ces limites sont zéro et l'unité; de sorte que la tangente à la branche positive est l'axe des abscisses, et la tangente à la branche négative est la bissectrice de l'angle yOx. Les deux branches se coupent donc à l'origine sous un angle de 135°, et ne s'étendent pas au delà.

462. Les courbes algébriques n'ont pas de points saillants, car on prouve, mais par des considérations qui dépendent du *calcul différentiel*, qu'au point où deux branches d'une pareille courbe viennent se réunir, elles ont la même tangente, de sorte qu'elles ne sont que le prolongement l'une de l'autre, ou qu'elles forment en ce point un rebroussement.

CHAPITRE XX.

DISCUSSION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS A DEUX INDÉTERMINÉES.

§ I. Coordonnées rectilignes.

463. *L'objet que l'on se propose dans la discussion d'une équation à deux variables est de déterminer la forme générale de la courbe qu'elle représente et sa situation par rapport aux axes des coordonnées*, c'est-à-dire d'examiner dans quelles régions du plan s'étendent les différentes branches dont elle se compose, si ces branches sont infinies ou limitées, si elles se réunissent pour envelopper certaines portions du plan, enfin de reconnaître toutes les circonstances remarquables du cours de cette ligne.

464. Pour atteindre ce but, on commencera par résoudre l'équation proposée $\varphi(x, y) = 0$ par rapport à l'une des variables, si la chose est possible, relativement à celle qui donnera lieu au calcul le plus simple; et si y est cette variable, on en tirera différentes valeurs algébriques de y,

$$y = \psi(x), \quad y = \pi(x), \quad y = \chi(x), \ldots$$

qui, comme nous l'avons déjà observé (**49**), représenteront autant de branches de la courbe cherchée. Cela fait, on *supposera* que x croisse d'une manière continue depuis zéro jusqu'à $+\infty$ et jusqu'à $-\infty$, et on examinera avec soin quelle sera la marche des valeurs correspondantes de y, et pour quelles valeurs de x l'ordonnée deviendra infinie ou imaginaire; car ces valeurs de x détermineront en général des asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées ou des limites de la branche que l'on considère, dans le sens de l'axe des abscisses. Il sera bon, pour obtenir plus facilement ces valeurs, de décomposer en facteurs les différentes parties des fonctions $\psi(x)$, $\pi(x)$, $\chi(x)$,.... Cette décomposition aura encore souvent l'avantage de faire voir plus facilement si la variable y croît ou décroît avec x. On ne devra pas d'ailleurs oublier

que le signe du coefficient angulaire de la tangente en un point d'une courbe indique si l'ordonnée de ce point augmente ou diminue à mesure que son abscisse prend des valeurs de plus en plus grandes (**437**).

Cette *discussion de l'ordonnée* apprendra dans quelles parties du plan s'étendent les différentes branches de la courbe, si elles sont limitées ou infinies; mais elle ne suffira pas en général pour donner une idée précise de la forme de cette courbe : il faudra encore chercher ses asymptotes, déterminer ses points *maximum* ou *minimum;* examiner si ses branches présentent leur concavité ou leur convexité à l'axe des abscisses. On calculera aussi les coordonnées des points remarquables que la discussion de l'ordonnée aura manifestés, et on pourra leur mener des tangentes. Enfin on fera passer par ces points principaux un trait continu qui satisfasse à toutes les conditions précédemment trouvées, et la courbe ainsi dessinée aura une forme approchée de celle que représente l'équation $\varphi(x,y)=0$.

Si on voulait obtenir ce lieu avec une grande exactitude, il faudrait, après s'être livré à la discussion précédente, calculer encore les coordonnées d'un certain nombre de points de chaque branche, situés entre ceux que l'on aurait déjà obtenus, et faire passer le trait continu par ces nouveaux points et par les précédents.

***465.** Si l'équation $\varphi(x,y)=0$ n'est pas résoluble par rapport à l'une des deux variables x et y, on pourra encore parvenir à la discuter en cherchant immédiatement ses points *maximum* et *minimum*, ses points-limites et singuliers et ses asymptotes. Ainsi on déterminera d'abord les limites de la courbe dans le sens des ordonnées et dans le sens des abscisses (**440** et **442**), et, pour cela, on résoudra les deux systèmes d'équations,

$$\left.\begin{matrix}\varphi'(x_1,y)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \left.\begin{matrix}\varphi(x,y)=0\\ \varphi'(x,y_1)=0\end{matrix}\right\};$$

on reconnaîtra ensuite par la règle du n° **441** si une solution du premier de ces systèmes détermine un point *maximum* ou *minimum*. En soumettant les solutions du second système à un examen analogue, on distinguera parmi les points dont elles donnent les coordonnées ceux qui sont des limites dans

le sens des abscisses de ceux qui n'en sont pas. On pourra construire ensuite quelques points intermédiaires entre ceux-là, ainsi que les intersections de la courbe avec les axes des coordonnées, et tracer les tangentes en ces différents points.

Cela fait, on posera les deux équations

$$\varphi'(x_1, y)=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x, y_1)=0;$$

d'où l'on tirera un certain nombre de couples de valeurs de x et de y: on les substituera dans l'équation $\varphi(x,y)=0$, et en ne conservant que celles de ses valeurs qui vérifient cette équation, on aura les coordonnées de tous les points qui *peuvent* être des points multiples ou de rebroussement (**453** et **456**), et la règle du n° **454** fera ensuite connaître la nature de ces points.

Actuellement, pour obtenir les branches infinies de la courbe $\varphi(x,y)=0$, on cherchera ses asymptotes (**167** et **170**).

Enfin, on pourra déterminer les points d'inflexion de la courbe (**450** ou **452**), et il sera alors facile de la dessiner.

Appliquons à quelques exemples les méthodes que nous venons d'exposer.

466. Exemple I. *Discuter la courbe représentée par l'équation en coordonnées rectangulaires,*

$$y^2(x+a)-x(x-a)(x-b)=0 \qquad [1],$$

dans laquelle a *et* b *représentent deux droites données.*

J'en tire
$$y=\pm\sqrt{\frac{x(x-a)(x-b)}{x+a}} \qquad [2].$$

Ainsi, à chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires; l'axe des abscisses divise donc la courbe en deux parties symétriques, de sorte qu'il suffira d'en suivre le cours au-dessus de l'axe des x. Cela posé, il peut se présenter trois cas principaux, suivant que l'on aura $b>a$, $b=a$ ou $b<a$. Nous allons les examiner successivement.

1er Cas. $b>a$. Je suppose d'abord que x croisse d'une

manière continue depuis zéro jusqu'à $+\infty$, et je vois que

$$x=0 \quad \text{donne} \quad y=0;$$

que si x augmente depuis zéro jusqu'à a, le facteur x croîtra, mais que les deux autres $(x-a)$ et $(x-b)$ décroîtront négativement, de sorte que l'on ne peut point savoir comment varie le numérateur dans la formule [2]; l'ordonnée y est donc réelle et finie, mais la loi de ses variations nous reste inconnue.

$$x=a \quad \text{donne} \quad y=0.$$

Ainsi la courbe part de l'origine, s'élève au-dessus de l'axe des x, puis redescend vers cet axe pour venir le couper à la distance $OA=a$ de cette origine. Fig. 168

Tant que x sera comprise entre a et b, les valeurs correspondantes de y seront imaginaires, mais pour

$$x=b, \quad \text{on aura} \quad y=0.$$

La courbe coupe donc de nouveau l'axe des x à la distance $OB=b$ de l'origine.

Si x reçoit des valeurs plus grandes que b, le numérateur et le dénominateur de la quantité soumise au radical croissent en même temps, de sorte que la marche des valeurs de y semble incertaine. Toutefois, si l'on divise le numérateur et le dénominateur par x, on aura

$$\frac{x(x-a)(x-b)}{x+a}=\frac{(x-a)(x-b)}{1+\frac{a}{x}},$$

et l'on voit alors que x croissant, le numérateur du second membre augmente, que le dénominateur diminue, et que, par cette double raison, la valeur de y augmente. Ainsi la courbe s'éloigne à la fois des deux axes des coordonnées dans l'angle YOX, et elle s'en éloigne indéfiniment; car x devenant infinie, y devient aussi infinie.

Nous allons maintenant supposer que x croisse depuis zéro jusqu'à $-\infty$, et pour le faire plus commodément, nous changerons x en $-x$ dans la formule [2], ce qui donnera

$$y=\sqrt{\frac{x(x+a)(x+b)}{x-a}} \qquad [3].$$

En faisant varier ici x depuis zéro jusqu'à $+\infty$, nous trouverons que

$$\begin{array}{ll} x=0 \text{ donne } \ldots\ldots & y=0, \\ x<a \ldots\ldots\ldots & y \text{ imaginaire}, \\ x=a \ldots\ldots\ldots & y=\infty : \end{array}$$

ainsi, si l'on prend $OA'=a$, et que par le point A' on mène une parallèle à l'axe des y, cette parallèle sera une asymptote; car, si l'on donne à x des valeurs quelconques plus grandes que a, la formule [3] donnera pour y des valeurs réelles. Mais, comme les deux termes de la quantité soumise au radical croîtront en même temps que x, on ne pourra rien conclure sur la marche des valeurs correspondantes de y, sinon que cette variable deviendra infinie en même temps que x. Donc, la branche de courbe qui a A'C pour asymptote s'en éloigne indéfiniment, en descendant d'abord vers l'axe des x pour se relever ensuite et s'écarter de cet axe jusqu'à une distance infinie.

Voilà la discussion complète de l'ordonnée; il faut voir maintenant comment la courbe tourne sa concavité par rapport à l'axe des x. Formons donc le coefficient angulaire de la tangente. Nous trouverons

$$\varphi'(x_1, y)=y^2-3x^2+2(a+b)x-ab, \text{ et } \varphi'(x, y_1)=2y(x+a),$$

partant $$\operatorname{tang}\alpha=\frac{3x^2-2(a+b)x+ab-y^2}{2y(x+a)}.$$

On voit par là que pour $\left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$, on a $\operatorname{tang}\alpha=\infty$,

et qu'ainsi aux environs du point O la courbe est concave vers l'axe des x; il en est de même aux points A et B, car on trouve encore $\operatorname{tang}\alpha=\infty$, soit que l'on fasse

$$\left\{\begin{matrix} x=a \\ y=0 \end{matrix}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{matrix} x=b \\ y=0 \end{matrix}\right\}.$$

Pour déterminer le point *maximum* de l'ovale dont OA est le diamètre, on devra égaler à zéro le numérateur de la valeur de $\operatorname{tang}\alpha$; mais comme il faudrait ensuite éliminer y de l'équation résultante au moyen de l'équation [1], nous ferons

d'abord cette élimination qui nous donnera

$$\tang \alpha = \frac{2x^3 + (2a-b)x^2 - 2a(a+b)x + a^2b}{2(x+a)\sqrt{x(x-b)(x^2-a^2}} \quad [4];$$

puis nous poserons

$$2x^3 + (2a-b)x^2 - 2a(a+b)x + a^2b = 0 \quad [5].$$

Cette équation a pour racines les abscisses du point M le plus élevé de l'ovale OA et du point m le plus bas de la branche UV; deux de ses racines sont donc réelles, et par conséquent la troisième l'est aussi; mais comme l'équation [5] a deux variations et une permanence, deux de ses racines sont positives et la troisième est négative. La branche BS aurait-elle donc un point tel que sa tangente fût parallèle à l'axe des x? Pour le savoir, je cherche à séparer les racines de l'équation [5] :

$$\begin{array}{lr} x=0 \quad \text{donne} & +a^2b>0, \\ x=a\,.\;.\;.\;.\;. & 2a^2(a-b)<0, \\ x=b\,.\;.\;.\;.\;. & b(b^2-a^2)>0, \end{array}$$

de sorte que l'une des racines positives est comprise entre zéro et a, et l'autre entre a et b; celle-ci ne répond, en conséquence, à aucun point de la courbe. Si on représente ces deux racines par p et par q, et la troisième par $-r$, le premier membre de l'équation [5] pourra être mis sous la forme

$$2(x-p)(x-q)(x+r),$$

et on voit ainsi que $\tang\alpha$ sera positif tant que x sera $<p$, et négatif quand x sera comprise entre p et q; donc la courbe s'éloigne de l'axe des x depuis l'origine jusqu'au point M dont l'abscisse est p, et s'en rapproche continuellement depuis M jusqu'en A (437). Elle est d'ailleurs constamment concave vers l'axe des x, sans quoi une ligne droite pourrait couper l'ovale en quatre points, et l'équation [1] n'est que du troisième degré.

Occupons-nous maintenant de la branche BS. La quantité $2(x-p)(x-q)(x+r)$ étant constamment positive pour toute valeur de x plus grande que q, il en est de même de $\tang\alpha$; mais la formule [4] est trop compliquée pour qu'on puisse suivre les variations de cette quantité, de sorte que

nous ignorons si la branche BS est constamment concave vers l'axe des x ou si elle a une inflexion.

La considération des asymptotes, s'il y en a, pourra nous éclairer sur ce point. En appliquant la règle du n° **167**, on trouvera

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y^2}{x^2}-1=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{y}{x}=c=\pm 1;$$

$$F'(c)=\pm 2, \quad F_1(c)=2a+b, \quad d=-\frac{2a+b}{\pm 2}.$$

Ainsi, l'équation des asymptotes obliques à l'axe des y est

$$y=\pm x\mp\frac{2a+b}{2} \qquad [6].$$

Ces lignes sont faciles à construire.

Passent-elles au-dessus ou au-dessous de la branche S'S? Si $\frac{2a+b}{2}$ est plus grand que b ou égal à b, l'asymptote $y=x-\frac{2a+b}{2}$ coupe l'axe des x au delà du point B ou en ce point même, et ainsi la branche BS est au-dessus de son asymptote, et par conséquent cette courbe a une inflexion, puisqu'elle présente d'abord sa concavité à son asymptote, et qu'elle doit finir par lui opposer sa convexité; d'ailleurs elle n'en a qu'une, sans quoi une droite pourrait la couper en plus de trois points.

Mais si $\frac{2a+b}{2}<b$, le seul moyen de savoir si l'asymptote RR' passe au-dessus de la branche BS est de comparer les ordonnées de ces deux lignes, qui correspondent à une même abscisse, ou, ce qui sera plus commode ici, de comparer les carrés de ces ordonnées. En désignant par y_1 l'ordonnée de l'asymptote, nous trouverons

$$y_1^2=\frac{4x^2-4(2a+b)x+(2a+b)^2}{4},$$

et par suite

$$y_1^2-y^2=\frac{(b^2-4ab-4a^2)x+a(2a+b)^2}{4(x+a)} \qquad [7].$$

On voit par cette formule que si

$$b^2-4ab-4a^2<0,$$

il y aura une valeur positive de x, à partir de laquelle le se-

cond membre de l'équation [7] sera constamment négatif; donc alors y_1 sera $< y$, et la branche BS sera au-dessus de son asymptote, qu'elle coupera au point dont l'abscisse est Fig. 169

$$x = -\frac{a(2a+b)^2}{b^2-4ab-4a^2}.$$

Donc cette branche a une inflexion.

Mais si l'on donne à x des valeurs négatives, le dénominateur étant alors négatif, on aura encore $y_1^2 < y^2$ (nous supposons toujours que $b^2-4ab-4a^2<0$), et ainsi la branche U'V' sera tout entière au-dessous de son asymptote, d'où je conclus qu'elle n'a pas d'inflexion; car m'V' présentant sa convexité à son asymptote, dans le voisinage de m', point *minimum* de U'V', et finissant par la lui présenter encore, elle ne pourrait avoir moins de deux inflexions, auquel cas une droite pourrait couper la courbe en plus de trois points. Par la même raison m'U' n'a pas non plus d'inflexion.

Si $b^2-4ab-4a^2$ est égal à zéro, le second membre de l'équation [7] reste positif pour toute valeur positive de x, et négatif pour toute valeur négative de cette variable (il n'y a pas de courbe entre Yy et CC'); ainsi les branches BS et U'V' sont entièrement au-dessous de leurs asymptotes, et par conséquent elles n'ont pas d'inflexion; car l'une en B et l'autre en m' présentent leur convexité à cette asymptote et finissent par la lui présenter à leurs extrémités respectives.

Si $b^2-4ab-4a^2>0$, le second membre de l'équation [7] reste positif pour toute valeur positive de x; il est au contraire négatif pour les valeurs négatives de cette variable, qui sont moindres que $\frac{a(2a+b)^2}{b^2-4ab-4a^2}$, et positif pour toutes celles qui sont plus grandes que cette quantité. Donc la courbe BS est tout entière au-dessous de RR', et en conséquence n'a pas d'inflexion; mais cette même asymptote coupe alors la branche U'V' et passe au-dessous d'une partie de U'V', de sorte que cette branche a une inflexion. Fig. 170

Nous n'aurons donc besoin d'avoir recours au calcul des n^os **450** ou **452**, que si l'on veut déterminer exactement les points d'inflexion; et encore faudrait-il, pour cela, que a et b fussent donnés numériquement. Toutefois, pour guider le lecteur dans cet exercice de calcul, nous en donnerons les ré-

sultats principaux. On trouvera d'abord que l'équation qui a pour racines les abscisses des points d'inflexion est

$$(b^2-4ab-4a^2)x^4+4a(b^2+2ab+2a^2)x^3-6a^2b(b+2a)x^2+4a^3b^2x+a^4b^2=0 \quad [8].$$

Si $b^2-4ab-4a^2<0$, cette équation a une racine négative moindre que a, une racine positive $>b$, et si les deux autres racines sont réelles, elles sont nécessairement comprises entre 0 et a ou entre a et b ; or, l'ovale ne peut pas avoir d'inflexion, et il n'y a pas de courbe depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$. Donc la branche BS a seule une inflexion.

Si $b^2-4ab-4a^2=0$, on verra qu'il n'y en a pas, et que si $b^2-4ab-4a^2>0$, l'équation [8] ayant deux racines négatives, l'une $<a$, l'autre $>a$, les branches UV et U'V' ont chacune une inflexion correspondant à cette seconde racine, mais que SBS' n'en a pas ; car $x=b$ et $x=+\infty$ donnent deux résultats de mêmes signes.

Fig. 171 2ᵉ Cas. $b=a$. La branche SBS' vient alors se réunir à la courbe OA au point A, de sorte que ce point est multiple. Pour en connaître la nature, je fais $b=a$ dans la formule [4], qui devient ainsi

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{2x^2+3ax-a^2}{2(x+a)\sqrt{x(x+a)}},$$

après avoir supprimé le facteur $(x-a)$ commun à ses deux termes ; en supposant maintenant $x=a$, on trouvera

$$\operatorname{tang}\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc ce point A résulte de l'intersection de deux branches de courbe qui font avec l'axe des x des angles dont les tangentes sont

$$+\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

L'hypothèse $b=a$ donne $b^2-4ab-4a^2<0$, ainsi les branches UV et U'V' n'ont point d'inflexion, non plus que SAS', quoique nous ayons trouvé que cette branche en avait une quand $b^2-4ab-4a^2<0$. C'est qu'ici la ligne SAS' présente en A sa convexité à son asymptote, tandis que le contraire avait lieu au point B, lorsque l'on supposait $b>a$ (fig. 168 et 169).

La considération de l'équation [8] confirme ce résultat, qu'il n'y a plus aucune inflexion; car elle se réduit à

$$(x-a)^2(7x+a)=0.$$

Or, à $x=-\frac{a}{7}$ répond une valeur imaginaire de y, et comme le couple $\begin{matrix}x=a\\y=0\end{matrix}$ anéantit $\varphi'(x_1, y)$ et $\varphi'(x, y_1)$, ce point est un point multiple et non un point d'inflexion (453 et note de 452).

Observons que l'équation $2x^2+3ax-a^2=0$, formée en égalant à zéro le coefficient angulaire de la tangente, a ses racines de signes contraires; que la négative répond au point *minimum* de UV, et la positive au *maximum* de OA; mais que pour toute valeur de x moindre que celle-ci $\tan\alpha$ est négative. C'est que, pour $a=b$, l'équation [1] revenant à $y=\pm(x-a)\sqrt{\frac{x}{x+a}}$, on voit que pour $x<a$, le signe supérieur répond à une valeur négative de y et détermine ainsi la partie de la *feuille* OA, qui s'étend au-dessous de l'axe des abscisses. Fig. 171

Si a est nulle, l'équation [1] se réduit à

$$[y^2-x(x-b)]x=0,$$

de sorte qu'elle représente le système de l'axe des y et d'une hyperbole équilatère qu'il est facile de construire.

3° Cas. $b<a$. Alors l'ovale OA a b pour diamètre, les deux branches SBS' et UVU'V' commencent à des distances égales à a de l'axe des y. De plus, la quantité $b^2-4ab-4a^2>0$: ainsi SB a une inflexion, mais UVU'V' n'en a point. Fig. 168, 169, 170

Si b diminue, le nœud OA se resserre et finit par se réduire à un point quand $b=0$. Ce point est tout à fait séparé du reste du lieu dont la forme générale reste la même, et c'est par conséquent un *point conjugué*. Si on fait $b=0$, dans la formule [4], elle se réduit à Fig. 172

$$\tan\alpha=\frac{x^2+ax-a^2}{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}},$$

et cette tangente devient imaginaire pour $x=0$, ce qui est fort naturel (458).

Si a et b sont nulles, les asymptotes deviennent les bissectrices des angles des coordonnées; et alors la partie SAOS' de Fig. 173

la figure 171 se réduit à ces droites; car d'abord la feuille OAO devient un point, les branches AS et AS', qui présentent leur convexité aux asymptotes et ont un point O commun avec elles, ne peuvent pas en différer. Quant aux branches UV et U'V', leur point *minimum* est l'origine; ces branches coupent aussi les asymptotes à cette origine, donc les parties UM et U'M' s'aplatissent sur l'axe des y, et les parties VM et V'M' sur leurs asymptotes. En effet, l'équation [1] devient

$$y^2x-x^3=0, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=\pm x. \end{cases}$$

467. Exemple II. *Construire l'équation*

$$y(x^2+3x-2)-x^3-1=0 \qquad [9],$$

Fig. 174 *rapportée à des coordonnées rectangulaires et en prenant le centimètre pour unité.*

On en tire $$y=\frac{x^3+1}{x^2+3x-2},$$

ou, en effectuant la division du numérateur par le dénominateur,

$$y=1+\frac{3(1-x)}{x^2+3x-2}.$$

Or, si l'on compare cette équation à l'équation

$$y=1$$

formée en égalant y à la partie entière du sécond membre de la précédente, on voit que, si l'on construit la droite AB, lieu de cette équation, il suffira, pour obtenir les différents points de la ligne cherchée, d'augmenter chaque ordonnée de la droite AB de la valeur que prend la fonction $\frac{3(1-x)}{x^2+3x-2}$ pour l'abscisse que l'on considère, de sorte que cette fonction représente les ordonnées des différents points de la courbe, comptées à partir de AB. Je désigne en conséquence cette ordonnée par y_1, et la discussion de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à celle de l'équation plus simple

$$y_1=\frac{3(1-x)}{x^2+3x-2}.$$

Pour suivre plus facilement les variations de y, je cherche

la racine réelle de l'équation $x^3+3x-2=0$; car il est évident qu'elle en a deux imaginaires, puisqu'il manque un terme entre deux autres qui ont les mêmes signes. Elle tombe entre 0,5 et 0,6; je la représente par a et je divise x^3+3x-2 par $x-a$, ce qui donne pour quotient x^2+ax+a^2+3. De cette manière, la valeur de y_1 devient

$$y_1=\frac{3(1-x)}{(x-a)(x^2+ax+a^2+3)}.$$

Maintenant je fais varier x depuis zéro jusqu'à l'infini positif et jusqu'à l'infini négatif, et je forme le tableau suivant, en n'oubliant pas que le polynôme x^2+ax+a^2+3 reste constamment positif, puisque l'équation formée en l'égalant à zéro a ses racines imaginaires :

$x=0$ donne. . . . . $y_1=-\frac{3}{2}$,
x aug^{te} $<a$. . . . . . y_1 négatif, mais incertain,
$x=a$ . . . . $y_1=\infty$,
x aug^{te} <1 . . . . . . y_1 diminue positivement,
$x=1$ . . . . $y_1=0$,
x aug^{te}. . . . . y_1 négatif et incertain,
$x=\infty$. . . . . $y_1=0$,
$x<0$ . . . . $y_1=-\frac{3(1+x)}{(x+a)(x^2-ax+a^2+3)}$,
$x=0$ . . . . $y_1=-\frac{3}{2}$,
x aug^{te}. . . . . y_1 incertain et négatif,
$x=\infty$. . . . . $y_1=0$.

On voit par ce tableau que la courbe coupe l'axe des y à la distance $CD=\frac{3^{c.m}}{2}$ de AB; qu'à partir du point D elle s'approche indéfiniment de la droite EF menée parallèlement à l'axe des ordonnées à la distance a de cet axe; qu'une seconde branche a aussi cette droite pour asymptote, qu'elle s'en éloigne en se rapprochant de AB qu'elle coupe au point G, à *un* centimètre de l'axe des y; cette branche descend au-dessous de cette droite et s'en rapproche ensuite indéfiniment, à mesure qu'elle s'éloigne de l'axe des y; donc CB est une asymptote. La branche UD passe à gauche de l'axe des y, coupe l'axe des x en I à un centimètre de l'origine, poursuit

son cours et se rapproche indéfiniment de AC, qui en est par conséquent une asymptote.

Je forme maintenant le coefficient angulaire de la tangente

$$\varphi'(x_1, y) = 3[y(x^2+1) - x^2], \quad \varphi'(x, y_1) = x^3 + 3x - 2;$$

$$-\frac{\varphi'(x_1, y)}{\varphi'(x, y_1)} = \frac{3[x^2 - y(x^2+1)]}{x^3+3x-2} = +\frac{3(2x^3-3x^2-1)}{(x^3+3x-2)^2}.$$

Ainsi pour $x=0$, on a $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{3}{4}$,

$x=1 \ldots\ldots \operatorname{tang}\alpha = -\frac{3}{2}$.

Pour avoir le point le plus bas de la branche ST, je pose

$$2x^3 - 3x^2 - 1 = 0,$$

et je trouve que cette équation a une racine réelle comprise entre 1,6 et 1,7 : la valeur correspondante de y est 0,7 environ. Les deux autres racines de cette équation sont imaginaires.

Comme la parallèle AB à l'axe des x est asymptote de la branche ST, cette ligne a au moins une inflexion. Nous allons la chercher.

$$\frac{\varphi''(x_2, y)}{1.2} = 3x(y-1), \quad \varphi''(x_1, y_1) = 3(x^2+1), \quad \frac{\varphi''(x, y_2)}{1.2} = 0;$$

on a donc l'équation (452)

$$3x(y-1) + 3(x^2+1) \cdot \frac{3(2x^3-3x^2-1)}{(x^3+3x-2)^2} = 0,$$

ou, en éliminant y, effectuant et réduisant,

$$x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

équation qui revient à

$$(x^3+1)(x^2-2x-1) = 0; \quad \begin{cases} x = -1, \\ x = 1 \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

Il y a donc trois inflexions dont une est au point I où la courbe rencontre l'axe des x, et les deux autres en H et en K. Il est alors facile de tracer la courbe.

*468. Exemple III. *Discuter l'équation*

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

rapportée à des coordonnées rectangulaires.

On voit à l'inspection seule de cette équation que la courbe qu'elle représente passe par l'origine ; qu'elle n'a aucun point situé dans l'angle yOx, puisque l'équation proposée ne pourrait être vérifiée par aucun couple de valeurs négatives de x et de y, et qu'à toute valeur positive donnée à x correspondra une et une seule valeur négative de y, et réciproquement ; car l'équation proposée est symétrique en x et en y ; donc la courbe a deux branches qui s'étendent indéfiniment dans les angles XOy et YOx. Fig. 175

Pour déterminer les limites de la courbe, je pose

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x_1,y) &= 3x^2-3ay=0\\ \varphi(x,y) &= y^3-3axy+x^3=0\end{aligned}\right\}$$

et

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x,y_1) &= 3y^2-3ax=0\\ \varphi(x,y) &= y^3-3axy+x^3=0\end{aligned}\right\}.$$

Le premier système donne les couples

$$\left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=a\sqrt[3]{2}\\ y&=a\sqrt[3]{4}\end{aligned}\right\},$$

et il est évident qu'à cause de la symétrie le second système d'équations donnera

$$\left.\begin{aligned}y&=0\\ x&=0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}y&=a\sqrt[3]{2}\\ x&=a\sqrt[3]{4}\end{aligned}\right\}.$$

On voit ainsi que le couple $\left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\}$ réduira à $\frac{0}{0}$ le coefficient angulaire de la tangente

$$-\frac{\varphi'(x_1,y)}{\varphi'(x,y_1)}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax},$$

et qu'en conséquence l'origine peut être un point multiple (**453**). Or, en nous reportant à l'exemple I du n° **454**, nous reconnaissons que l'origine est, en effet, le point d'insection de deux branches qui sont tangentes aux deux axes des coordonnées.

Maintenant, pour savoir si le point $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ est un point *maximum* ou *minimum*, je représente par $a\sqrt[3]{2}+h$ et par $a\sqrt[3]{4}+k$ les coordonnées d'un point de la courbe pris aussi près que l'on voudra du point $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$, et j'écris que ces coordonnées vérifient l'équation proposée ; mais afin

d'effectuer ce calcul le plus simplement possible, je formerai auparavant les dérivées successives de son premier membre. En supposant ensuite dans ces dérivées $x=a\sqrt[3]{2}$, $y=a\sqrt[3]{4}$, nous trouverons, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de k (*Alg.*, **341**),

$$\varphi(a\sqrt[3]{2}+h,\ a\sqrt[3]{4}+k)$$
$$=k^3+3a\sqrt[3]{4}k^2+3a(a\sqrt[3]{2}-h)k+h^2(3a\sqrt[3]{2}+h)=0;$$

d'où l'on voit que si h est une quantité positive moindre que $a\sqrt[3]{2}$, ou une quantité négative dont la valeur absolue soit plus petite que $3a\sqrt[3]{2}$, les valeurs réelles de k données par cette équation seront négatives, et qu'ainsi tous les points dont les abscisses sont comprises entre $-2a\sqrt[3]{2}$ et $+2a\sqrt[3]{2}$ ont leurs ordonnées moindres que $a\sqrt[3]{4}$; donc le point $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ est un point *maximum*. De plus, la tangente en ce point coupe la courbe au point $(-2a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$; car, pour $h=-3a\sqrt[3]{2}$, on a $k=0$.

Comme l'équation proposée est symétrique par rapport à x et à y, on conclut de là que le point $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ est un point-limite, et que la tangente en ce point coupe la courbe au point $(a\sqrt[3]{4}, -2a\sqrt[3]{2})$.

On voit par tout ce qui précède que deux branches issues de l'origine s'étendent dans l'angle YOX et viennent s'y réunir pour former une feuille inscrite dans le carré OABC.

Il ne nous reste plus qu'à chercher les asymptotes de la courbe. Nous mettrons, pour cela, cette équation sous la forme $x^3\left(1+\frac{y^3}{x^3}\right)-3a\frac{y}{x}x^2=0$; ainsi le coefficient angulaire de l'asymptote est donné par l'équation

$$1+\frac{y^3}{x^3}=0,\quad \text{d'où}\quad c=-1,$$

et l'ordonnée à l'origine a pour valeur $d=-\frac{3a}{3}=-a$, de sorte qu'il n'y a qu'une seule asymptote oblique à l'axe des y, et laquelle est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle YOX, puisque son équation est

$$y=-x-a.$$

Il n'y en a pas qui soit parallèle aux axes; car aucune des deux variables x et y ne peut devenir infinie à moins que l'autre ne le soit aussi. Donc la droite $y = -x - a$ est asymptote des deux branches infinies.

Si, pour tracer très-exactement le lieu de l'équation proposée, on veut calculer les coordonnées de quelques-uns de ses points, on pourra le faire très-facilement par le procédé suivant, que M. *Lacroix* a indiqué dans son *Traité de calcul différentiel*. Je pose $x = ty$, t étant une inconnue auxiliaire, et en substituant cette expression de x dans $y^3 - 3axy + x^3 = 0$, j'obtiens une transformée qui est divisible par y^2 et se réduit à $t^3y - 3at + y = 0$, d'où $y = \frac{3at}{1+t^3}$ et par suite $x = \frac{3at^2}{1+t^3}$. Ainsi, en donnant à t des valeurs arbitraires, on aura pour x et pour y des solutions de la proposée, sans qu'il soit nécessaire d'extraire aucune racine ou d'avoir recours à la résolution si pénible des équations numériques. Si, par exemple, on suppose $t = 1$, il vient $y = \frac{3a}{2}$ et $x = \frac{3a}{2}$, de sorte que ce point, ayant ses coordonnées égales, appartient à la bissectrice de l'angle YOX. Or, si l'on introduit ces valeurs de x et de y dans l'expression du coefficient angulaire de la tangente, on trouve -1 pour sa valeur : donc la tangente au point $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ est perpendiculaire à cette bissectrice de l'angle YOX. *C'est* donc *le point de cette branche qui est le plus éloigné de l'origine*. La courbe que nous venons de construire est connue sous le nom de *folium de Descartes**.

Exemples. $y^m = a^{m-n}x^n$, $n \gtrless 0$. $y = x^3 - 2x^2 - x + 3$.

$y(x-1)^2 - x^3 = 0$. $y(x^2 - x - 2) = x + 3$.

$(y-1)^3 + (x-2)^2 = 0$. $(y-3)^2 - x(x-3)^2 = 0$.

$y(1+x^2) = x$. $x^3 - y^2(x+1) = 0$.

$(y-3)^2 - (x-2)^4(x-1) = 0$. $y^2 - (x-1)(x+3)^2 = 0$.

$y^3 - yx^2 - 1 = 0$. $y^2 + x^2(y+1) - 2y = 0$.

$x^2y - x^3 + 1 = 0$.

$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$.

$y^4 - 2x(x-a)y^2 - x^4 - 5ax^3 = 0$.

$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$.

* Le théorème que nous avons démontré, dans la note du nº 221,

On trouvera dans les *Compléments de mathématiques spéciales** de M. P. H. *Blanchet* un choix précieux d'exemples de discussions de courbes.

§ II. Coordonnées polaires.

469. Exemple I. *Discuter l'équation*

$$\rho=\frac{a}{\cos\omega\cos 2\omega}.$$

Fig. 172 Je remarque, 1° que cette équation ne sera pas altérée si l'on y change ω en $-\omega$, et qu'en conséquence la courbe qu'elle représente est symétrique de part et d'autre de l'axe polaire. Il sera donc inutile de donner des valeurs négatives à ω.

2° Que si l'on suppose $\omega=180°+\alpha$, le second membre ne fera que changer de signe. Il faudra donc porter cette valeur de ρ dans le prolongement du rayon vecteur qui fait avec l'axe polaire l'angle $180°+\alpha$, de sorte qu'on retrouvera le point déjà obtenu pour $\omega=\alpha$. Donc en faisant varier ω depuis 180° jusqu'à 360°, on retrouvera les points déjà obtenus en donnant à ω des valeurs comprises entre 0° et 180°.

Il sera aussi inutile de donner à ω des valeurs plus grandes que 360°; car l'équation déterminant alors pour ρ les mêmes valeurs que quand ω est $< 360°$, on repassera par tous les points précédemment obtenus.

Enfin, si l'on observe que faire $\omega=90°+\alpha$ donne au signe près la même valeur de ρ que celle qui répond à $\omega=90°-\alpha$, de sorte qu'il faudra porter cette valeur de ρ dans le prolongement du rayon vecteur qui fait l'angle $90°+\alpha$, on voit que le point $(\rho, 90°+\alpha)$ est le symétrique par rapport à l'axe fixe du point $(\rho, 90°-\alpha)$; par conséquent, la branche correspon-

donne le moyen de réduire l'équation $y^3-3axy+x^3=0$ au deuxième degré par rapport à l'une des variables, y par exemple; car, si l'on prend la bissectrice de l'angle des coordonnées positives pour axe des abscisses, et une perpendiculaire à cette droite pour axe des ordonnées, il faudra que, pour chaque valeur donnée à x, l'équation de la courbe rapportée à ces nouveaux axes détermine pour y deux valeurs égales et de signes contraires; donc elle ne devra pas renfermer d'autre puissance de y que la seconde, et alors on pourra appliquer à la discussion de cette équation transformée la méthode du n° 464.

* Paris, chez Hachette.

dante aux valeurs de ρ comprises entre $90°$ et $180°$ est la symétrique de celle qu'on aura trouvée en faisant croître ω depuis zéro jusqu'à $90°$. Donc enfin il suffira, pour tracer la courbe demandée, de donner à ω des valeurs croissantes depuis zéro jusqu'à $90°$.

On formera facilement le tableau suivant :

$\omega=0$ donne. . . . . . . $\rho=a$,
ω aug$^{te}<45°$. . . . . ρ aug^{te},
$\omega=45°$. . . . . $\rho=\infty$,
ω aug$^{te}<90°$. . . . . ρ négatif et incertain,
$\omega=90°$. . . . . $\rho=\infty$.

Il résulte de ce tableau que la courbe cherchée coupe l'axe polaire à la distance $OA=a$ du pôle ; qu'elle s'éloigne ensuite de plus en plus du pôle, à mesure que ω augmente, et que le rayon vecteur devient infini pour $\omega=45°$; que de $45°$ à $90°$ le rayon vecteur est négatif, de sorte qu'en donnant à ω des valeurs qui surpassent $45°$ d'aussi peu que l'on voudra, on aura des points situés sur le prolongement du rayon vecteur correspondant et à des distances du pôle aussi grandes que l'on voudra ; mais, quand ω sera très-près de $90°$, on retrouvera encore des points excessivement éloignés sur le prolongement du rayon vecteur, et ce rayon devient $-\infty$ quand $\omega=90°$. Donc il y a une seconde branche $V'm'U'$, qui vient de l'infini, se rapproche du pôle et s'en éloigne de nouveau jusqu'à l'infini.

Pour reconnaître plus exactement la forme de chacune des deux branches AS et $V'm'U'$, nous allons mener à la première une tangente au point A, chercher le point *minimum* de la seconde et les asymptotes de toutes deux. Nous avons trouvé au n° **443** que

$$\operatorname{tang} M=\frac{\cos 3\omega+\cos\omega}{3\sin 3\omega+\sin\omega},$$

et comme $\qquad \cos\omega\cos 2\omega=\frac{1}{2}(\cos 3\omega+\cos\omega),$

d'où
$$\rho=\frac{2a}{\cos 3\omega+\cos\omega},$$

on en conclut que l'expression de la sous-tangente est

$$OT=\frac{2a}{3\sin 3\omega+\sin\omega}.$$

Lorsque $\omega=0$, on a $OT=\infty$; donc la tangente au point A est perpendiculaire à l'axe polaire, et ainsi la courbe, aux environs de ce point, présente sa concavité à cet axe.

Pour $\omega=45°$, on a $OT=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, et, comme $\omega=45°$ donne $\rho=\pm\infty$, on en conclut que les branches AS et $m'V'$ ont une asymptote inclinée de 45° sur l'axe polaire et distante du pôle de la quantité $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C'est donc la parallèle RR' menée par le point A à la droite OD.

Si l'on fait $\omega=90°$, on trouve $OT=-a$; ainsi, en prenant $OA'=a$, et élevant par le point A' une perpendiculaire à l'axe polaire, on aura l'asymptote de la branche $m'U'$.

Cherchons actuellement le point *minimum* de la courbe U'V'. Le calcul a été fait au n° **443**, et on a trouvé pour ses coordonnées

$$\omega=\text{arc}\cos=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2},\quad \rho=\frac{2a}{\sqrt{7-3\sqrt{5}}}.$$

Il est maintenant facile de tracer la courbe demandée.

470. Exemple II. *Discuter l'équation*

$$\rho=a\cos 3\omega+b.$$

Fig. 176 J'observe d'abord que cette équation ne change pas lorsque l'on y remplace ω par $-\omega$, et qu'ainsi elle est symétrique par rapport à l'axe polaire; ensuite, qu'il sera inutile de donner à ω des valeurs positives plus grandes que 360°; car on repassera alors par les points obtenus en faisant varier cet angle de 0° à 360°.

Je remarque encore que notre équation donne les mêmes valeurs pour ρ lorsqu'on y fait $\omega=60°-\alpha$ et $\omega=60°+\alpha$, ou $\omega=120°-\alpha$ et $\omega=120°+\alpha$; donc notre courbe est symétrique par rapport aux droites OX et OY, qui, menées par le pôle, font avec l'axe polaire des angles de 60° et de 120°. Il suffira donc de faire varier ω depuis 0° jusqu'à 60°, et de construire la portion correspondante de la courbe; on pliera alors la figure le long de la droite XO, et on tracera ainsi la portion comprise entre cette droite et OY; on obtiendra celle qui s'étend entre cette dernière droite et le rayon vecteur OX' dont l'inclinaison est de 240°, en faisant tourner la figure autour de la droite OY; et enfin on terminera la courbe en pliant

la figure le long de la droite OV. Faisons donc varier ω depuis zéro jusqu'à 60°. Trois cas se présentent, suivant que $a>b$, $a=b$ et $a<b$.

1er Cas. $a>b$.

$\omega=0$ donne . . . . $\rho=a+b$,
ω augte $<30°$ . . . . ρ diminue,
$\omega=30°$. . . . . $\rho=b$,
ω augte $<\frac{1}{3}\arccos=-\frac{b}{a}$. . . . . ρ diminue,
$\omega=\frac{1}{3}\arccos=-\frac{b}{a}$ . . . . $\rho=0$,
ω augte $<60°$. . . . . ρ augte négativement,
$\omega=60°$. . . . . $\rho=-(a-b)$.

Ainsi, on prendra sur l'axe polaire une distance $OA=a+b$, et le point A sera le point d'intersection de la courbe avec cet axe; à partir de ce point, elle se rapproche constamment du pôle, coupe le rayon vecteur incliné de 30°, au point B tel que $OB=b$, et vient passer par le pôle quand ω est égal à l'angle EOA, tiers de l'angle DOA qui a $-\frac{b}{a}$ pour cosinus. Elle s'éloigne ensuite du pôle dans le sens du prolongement des rayons vecteurs compris entre OE et OX, et coupe ce dernier rayon au point C dont la distance au pôle est égale à $a-b$.

Cherchons tang M. On fait, pour cela, le calcul suivant :

$$\rho+k=a\cos(3\omega+3h)+b,$$

$$\frac{k}{a}=\cos(3\omega+3h)-\cos 3\omega=-2\sin\left(3\omega+\frac{3h}{2}\right)\sin\frac{3h}{2};$$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{k}{h}=-3\sin\left(3\omega+\frac{3h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{3h}{2}}{\frac{3h}{2}};\qquad \frac{1}{a}\lim\frac{k}{h}=-3\sin 3\omega.$$

$$\operatorname{tang} M=-\frac{\rho}{3a\sin 3\omega},\qquad OT=-\frac{(a\cos 3\omega+b)^2}{3a\sin 3\omega}.$$

$\omega=0°$ donne. . . . . . . $OT=-\infty$,
$\omega=30°$ . . . . $OT=-\frac{b^2}{3a}$,
$\omega=60°$. . . . . $OT=-\infty$.

Ainsi la courbe coupe à angles droits l'axe polaire et le rayon vecteur OX. Elle est tangente à la droite OE; car

$a\cos 3\omega + b = 0$ donne $OT = 0$, et, en effet, cette droite OE coupe évidemment la courbe en deux points réunis en un seul au pôle. Nous n'entreprendrons pas de déterminer les points *maximums* par rapport aux axes de symétrie; car l'équation de laquelle dépendraient les valeurs correspondantes de ω serait au moins du huitième degré. Le lieu de l'équation proposée a à peu près la forme représentée dans la fig. 176.

2e Cas. $a = b$. Dans ce cas, l'angle DOA est égal à 180°, et ainsi la branche OCO se réduit à un point; mais la valeur de la sous-tangente OT, correspondante à $\omega = 60^\circ$, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour en trouver la véritable valeur, je fais $\omega = 60^\circ + h$, ce qui donne

$$OT = \frac{a(1-\cos 3h)^2}{3\sin 3h} = \frac{4a\sin^4\frac{3h}{2}}{3\sin 3h} = \frac{2a\sin^3\frac{3h}{2}}{3\cos\frac{3h}{2}},$$

formule qui, pour $h = 0$, se réduit à $OT = 0$; ainsi la branche AO est tangente en O au rayon vecteur de 60°.

3e Cas. $a < b$. Dans ce cas, ρ est constamment positif et diminue jusqu'à $b - a$.

471. On pourra se proposer pour exercices de discuter les équations

1° $\rho = \frac{a\sqrt{2}}{\sin\omega + \cos\omega}$. 5° $\rho^2\cos^2 2\omega - 4\sin 2\omega = 0$.

2° $\rho = a(\cos\omega - \sin\omega)$. 6° $\rho = \frac{a\sin 2\omega}{\sin\omega + \cos\omega}$.

3° $\rho = \frac{a}{\sin 2\omega\cos\omega}$. 7° $\rho^2\sin\omega\cos^2\omega + \rho - 2\sin\omega = 0$.

4° $\rho = \frac{a\sqrt{2}}{\sin 2\omega(\sin\omega + \cos\omega)}$. 8° $\rho = \frac{a\cos 2\omega}{\cos\omega}$.

§ III. Applications.

472. Problèmes. I. *Trouver l'équation de la courbe dont tous les points sont tels que le produit de leurs distances à deux points fixes est une quantité constante* m^2. — *Discuter l'équation.* — *Points* maximum *et* minimum.

On sera conduit à distinguer trois cas, savoir : $m < c$, $m = c$, $m > c$, en appelant $2c$ la distance des deux points fixes.

Fig. 177 II. *Étant donnés une circonférence* O *et un diamètre fixe*

AB, *on abaisse successivement de chaque point* M *de cette circonférence une perpendiculaire* MP *sur ce diamètre, puis on projette le pied* P *de cette perpendiculaire sur le rayon correspondant* MO, *et on demande le lieu des points* Q. — *Pourrait-on déterminer la forme générale du lieu, d'après sa génération? — Quelle est la tangente en* O? — *en* A? — *Discuter l'équation trouvée.*

III. *On connaît les intensités de deux lumières placées en deux points* A *et* B *donnés sur un plan, et on propose de trouver le lieu de tous les points de ce plan qui sont également éclairés par ces lumières. — Qu'arrivera-t-il, si les intensités des deux lumières sont égales? — Pourrait-on résoudre ce problème par de simples considérations géométriques? — La solution analytique s'accorde-t-elle avec la solution géométrique pour montrer qu'il y a un point du lieu situé entre* A *et* B? — *La construction géométrique du lieu s'accorde-t-elle avec celle fournie par l'équation trouvée? — Où faudrait-il placer deux lumières dont les intensités sont connues pour que tous les points d'une circonférence donnée en fussent également éclairés?*

Prenez le centre de cette circonférence pour origine des coordonnées, transportez l'origine des axes auxquels l'équation du lieu trouvé précédemment est rapportée au centre de ce lieu, et identifiez la nouvelle équation avec celle du cercle donné.

IV. *Par un point* O *donné sur le plan de deux droites rectangulaires, on leur mène une sécante quelconque* BOA: *on élève en* A *sur* BA *une perpendiculaire* $AM = \frac{\overline{BO}^2}{AO}$, *et on propose de trouver l'équation du lieu des points* M *ainsi déterminés. — Discuter l'équation trouvée.* Fig. 178

V. *Si d'un point fixe on tire des droites à tous les points d'une droite indéfinie donnée de position, et qu'à partir du point où chacune coupe cette droite, on prenne sur sa direction une distance égale à une droite donnée* r, *le lieu de tous les points ainsi déterminés forme une courbe nommée* conchoïde, *dont on demande l'équation. — Discussion. — Points* maximum, minimum *et d'inflexion. — Traduire l'équation trouvée en coordonnées polaires, et la discuter sous cette forme.*

CHAPITRE XXI.

DE LA SIMILITUDE DES COURBES EN GÉNÉRAL ET DE CELLES DU SECOND ORDRE EN PARTICULIER.

* **473.** *On appelle* COURBES SEMBLABLES *deux courbes que l'on peut placer de telle manière qu'en menant d'un certain point des rayons vecteurs à tous leurs points, ceux de ces rayons dont les directions coïncident, soient proportionnels* (*Géométrie,* page 365 et suivantes).

L'origine commune de tous les rayons vecteurs se nomme le *centre de similitude,* et le rapport de deux rayons vecteurs homologues est appelé le *rapport de similitude* des deux courbes.

Si, après avoir ramené les deux courbes à leur position primitive, leurs rayons vecteurs homologues sont parallèles et dirigés dans le même sens, on dit que ces courbes sont semblables et *semblablement placées.*

* **474.** Il suit de cette définition des courbes semblables que, si de l'origine des coordonnées on tire des rayons vecteurs à tous les points d'une courbe donnée

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad [1],$$

et que l'on divise tous ces rayons dans un rapport constant, le lieu de tous les points de division sera une courbe semblable à la courbe proposée. Or, si x et y désignent les coordonnées d'un point quelconque du lieu de $\varphi(x, y) = 0$, et x' et y' celles du point homologue de la courbe semblable, on aura $x' = mx$ et $y' = my$, de sorte qu'on obtiendra l'équation de cette courbe en remplaçant, dans [1], x et y par $\frac{x'}{m}$ et par $\frac{y'}{m}$, ce qui donnera, en supprimant les accents,

$$\varphi\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right) = 0 \qquad [2].$$

Telle est donc l'équation générale de toutes les courbes semblables à [1], qui sont semblablement placées, et ont le même centre de similitude.

Cela posé, soient

$$\psi(x, y)=0 \qquad [3]$$

l'équation d'une courbe semblable à [1], mais située d'une manière quelconque sur le plan; O' son centre de similitude, O'M' le rayon vecteur homologue de OM, et α l'angle formé par ces deux droites : si l'on fait tourner la courbe [3] autour de O' d'une quantité α, tous ses rayons vecteurs deviendront parallèles à leurs homologues, et les deux courbes [1] et [3] seront semblablement placées; si donc on fait alors glisser la deuxième courbe, de manière que tous ses points décrivent des droites égales et parallèles à O'O, elles auront de plus le même centre de similitude, et, par conséquent, la nouvelle équation de cette seconde courbe devra pouvoir s'identifier avec l'équation [2]. Or, ce double mouvement de translation et de rotation revient à transporter les axes OX et OY, parallèlement à eux-mêmes, de O en O' (94), et à les faire tourner ensuite autour de O' d'une quantité angulaire α, mais dans un sens contraire au mouvement de rotation qu'on aura imprimé à la seconde courbe (97). On substituera donc dans l'équation [3], au lieu de x et de y, leurs valeurs données par les formules * Fig. 179

$$x=a+\frac{x'\sin(\theta-\alpha)-y'\sin\alpha}{\sin\theta}, \quad y=b+\frac{x'\sin\alpha+y'\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta};$$

et si l'on peut assigner à a, b, α et m des valeurs réelles et finies, qui rendent l'équation résultante identique avec [2], on en conclura que les deux courbes [1] et [3] sont semblables. Les équations de condition qui établiront la simultanéité de celles obtenues par l'identification des deux équations, exprimeront les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés des équations [1] et [3], pour que les courbes qu'elles représentent soient semblables.

Si les courbes [1] et [3] doivent être semblablement placées, le calcul se simplifiera beaucoup; car α étant alors égal à zéro, les valeurs précédentes de x et de y se réduiront à

$$x=a+x' \quad \text{et} \quad y=b+y'.$$

Enfin, si l'on voulait que les deux courbes fussent égales,

* On a fait $\alpha'-\alpha=\theta$ dans les formules du n° 96.

il faudrait supposer $m=1$, ce qui nous ramènerait à la méthode du n° **104**.

***475.** Nous allons appliquer cette théorie générale aux courbes du second ordre; mais, pour le faire le plus simplement possible, nous considérerons d'abord une ellipse ou une hyperbole rapportée à ses axes principaux, de sorte que son équation sera ainsi

$$\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{x^2}{a^2}\mp 1=0 \qquad [4].$$

L'équation générale de toutes les courbes semblables à celle-ci sera donc

$$\frac{y^2}{m^2b^2}\pm\frac{x^2}{m^2a^2}\mp 1=0 \qquad [5],$$

résultat qui nous apprend que toute courbe semblable à une ellipse ou à une hyperbole est elle-même une ellipse ou une hyperbole. On voit, en outre, que, pour savoir si une pareille courbe est semblable à celle que l'équation [4] représente, on devra la rapporter d'abord à ses axes principaux, ce qui ramènera son équation à la forme

$$\frac{y^2}{b_1^2}\pm\frac{x^2}{a_1^2}\mp 1=0,$$

et il faudra qu'en donnant à m une valeur convenable, on puisse identifier, avec cette équation, l'équation [5] qui représente toutes les courbes semblables à la proposée. On devra donc avoir

$$m^2b^2=b_1^2 \quad \text{et} \quad m^2a^2=a_1^2,$$

d'où, en éliminant l'indéterminée m,

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}.$$

Donc *pour que deux ellipses ou deux hyperboles soient semblables, il faut et il suffit que leurs axes soient proportionnels* (note du n° **432**).

***476.** Cette règle, dont l'énoncé est très-simple, a l'inconvénient d'exiger que l'on rapporte à leurs axes principaux les deux courbes dont on veut vérifier la similitude, ce qui entraîne dans des calculs assez longs : il est donc intéressant de chercher une autre règle qui donne le moyen de *recon-*

naître facilement, *à l'inspection de leurs equations, si deux courbes à centre sont ou ne sont pas semblables.* Soient donc

$$\left.\begin{array}{l}Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\\ A_1y^2+B_1xy+C_1x^2+D_1y+E_1x+F_1=0\end{array}\right\}\quad[6],$$

les équations de deux ellipses ou de deux hyperboles rapportées à des axes rectangulaires. Si on les rapporte à leurs axes principaux, on trouvera deux équations de la forme

$$A'y^2+C'x^2+F'=0,$$
$$A'_1y^2+C'_1x^2+F'_1=0,$$

et les longueurs de leurs demi-axes seront données par les formules

$$a=\sqrt{-\frac{F'}{C'}},\qquad b=\sqrt{\mp\frac{F'}{A'}},$$

et
$$a_1=\sqrt{-\frac{F'_1}{C'_1}},\qquad b_1=\sqrt{\mp\frac{F'_1}{A'_1}},$$

les signes supérieurs des valeurs de b et de b_1 se rapportant au cas de l'ellipse, et les inférieurs à celui de l'hyperbole (**223** et **224**). Donc, pour que les deux courbes soient semblables, il faut et il suffit que l'on ait (**475**) $\frac{A'}{A'_1}=\frac{C'}{C'_1}$ ou ce qui revient au même $\frac{A'-C'}{A'+C'}=\frac{A'_1-C'_1}{A'_1+C'_1}$: mais on a trouvé (**229**)

$$A'+C'=A+C \quad \text{et} \quad A'-C'=\sqrt{B^2+(A-C)^2};$$

donc
$$\frac{\sqrt{B^2+(A-C)^2}}{A+C}=\frac{\sqrt{B_1^2+(A_1-C_1)^2}}{(A_1+C_1)},$$

équation que l'on peut remplacer par la suivante :

$$\frac{B^2-4AC}{(A+C)^2}=\frac{B_1^2-4A_1C_1}{(A_1+C_1)^2}\qquad[7].$$

Telle est donc la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses ou deux hyperboles soient semblables. Or, cette condition revient à dire que les diamètres conjugués égaux des deux ellipses, ou que les asymptotes des deux hyperboles semblables, font des angles égaux (**226** et **171**).

***477**. Si l'on veut que les deux courbes semblables soient

semblablement placées, il faudra que leurs axes homologues soient parallèles, ce qui exige que

$$-\frac{B}{A-C}=-\frac{B_1}{A_1-C_1},$$

(formule [15] du n° **229**). On tire de là

$$\frac{B}{B_1}=\frac{A-C}{A_1-C_1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sqrt{B^2+(A-C)^2}}{\sqrt{B_1^2+(A_1-C_1)^2}}=\frac{B}{B_1}=\frac{A-C}{A_1-C_1};$$

mais nous avons trouvé tout à l'heure

$$\frac{\sqrt{B^2+(A-C)^2}}{A+C}=\frac{\sqrt{B_1^2+(A_1-C_1)^2}}{A_1+C_1};$$

donc
$$\frac{B}{B_1}=\frac{A-C}{A_1-C_1}=\frac{A+C}{A_1+C_1},$$

d'où l'on tire enfin
$$\frac{B}{B_1}=\frac{A}{A_1}=\frac{C}{C_1} \qquad [8].$$

Donc, *pour que deux ellipses ou deux hyperboles soient semblables et semblablement placées, il faut et il suffit que les coefficients des termes du second degré dans leurs équations soient proportionnels.*

***478.** Le rapport de similitude des deux courbes est

$$\frac{a}{a_1}=\sqrt{\frac{F'}{F'_1}\cdot\frac{C'_1}{C'}}:$$

or si, pour abréger, on représente par V le numérateur de la valeur de F', donnée par la formule [5] du n° **219**, on aura $F'=\frac{V}{B^2-4AC}$, de sorte que

$$\frac{F'}{F'_1}=\frac{V}{V_1}\cdot\frac{B_1^2-4A_1C_1}{B^2-4AC}=\frac{V}{V_1}\cdot\frac{(A_1+C_1)^2}{(A+C)^2},$$

en vertu de la formule [7]. D'un autre côté, le rapport $\frac{C'_1}{C'}$ étant égal à $\frac{A'_1}{A'}$, l'est par conséquent à $\frac{A'_1+C'_1}{A'+C'}$, quantité qui est équivalente à $\frac{A_1+C_1}{A+C}$; donc l'expression du rapport de similitude est

$$\sqrt{\frac{V}{V_1}\cdot\left(\frac{A_1+C_1}{A+C}\right)^3}.$$

***479.** Occupons-nous maintenant des paraboles. Si on

considère une de ces courbes rapportée à son axe et à son sommet pris pour centre de similitude, et qu'on raisonne comme nous l'avons fait au n° **474**, on trouvera que l'équation générale de toutes les courbes semblables à la parabole $y^2=2px$ est

$$y^2=2mpx.$$

Or, ces deux équations ne diffèrent que par la valeur du paramètre; et, comme c'est de cette quantité que dépend uniquement la forme de la courbe, puisque c'est la seule constante qui se trouve dans son équation, on voit que *toute courbe semblable à une parabole est elle-même une parabole, et que toutes les paraboles sont semblables.*

***480**. Cette propriété n'est point particulière à la parabole, elle convient à toutes les courbes dont l'équation réduite à sa forme la plus simple ne renfermera qu'une seule constante arbitraire. En effet, si on suppose que l'on n'ait pris aucune ligne déterminée pour unité, l'équation des courbes dont il s'agit sera homogène et pourra être représentée par

$$\varphi(x, y, a)=0:$$

l'équation générale des courbes semblables à celle-ci sera donc

$$\varphi\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}, a\right)=0.$$

Mais si l'on chasse les dénominateurs, cette équation reviendra à

$$\varphi(x, y, ma)=0;$$

car soit $Ca^px^qy^r$ un terme quelconque de la proposée que je suppose du degré n, par exemple (C est un coefficient numérique), il en résultera le terme $Ca^p\,\frac{x^qy^r}{m^{q+r}}$ dans $\varphi\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}, a\right)=0$; et ce terme multiplié par m^n deviendra

$$Ca^p.m^{n-q-r}x^qy^r=C(am)^px^qy^r.$$

Or, $\varphi(x, y, ma)=0$, est une courbe du même genre que la proposée; donc, etc.

***481**. Si l'on remarque que l'équation [7] est satisfaite d'elle-même quand les deux courbes que l'on compare sont

des paraboles, on en conclura que cette équation exprime la condition générale de similitude des courbes du second ordre.

***482.** Pour que deux paraboles semblables soient semblablement placées, il faut et il suffit que leurs axes soient parallèles et que leurs paramètres aient les mêmes signes, c'est-à-dire (**232** et **236**, où N, P, Q représentent respectivement $\frac{B}{2A}$, $\frac{D}{2A}$, $\frac{E}{2A}$) que

$$-\frac{B}{2A}=-\frac{B_1}{2A_1} \quad \text{et que} \quad \frac{2AE-BD}{2A_1E_1-B_1D_1}>0 \qquad [9].$$

Or, en combinant la première de ces conditions avec les deux équations $B^2-4AC=0$ et $B^2_1-4A_1C_1=0$, on en déduit la suite [8]. Donc cette suite est la condition nécessaire et suffisante pour que deux courbes du second ordre soient semblables et semblablement placées, en y joignant toutefois la relation [9] s'il s'agit d'une parabole.

***483.** Si l'on demande que deux courbes du second ordre soient égales, il faudra écrire qu'elles sont semblables, et que leur rapport de similitude est l'unité, ce qui donnera les deux équations de condition

$$\frac{B^2-4AC}{(A+C)^2}=\frac{B_1^2-4A_1C_1}{(A_1+C_1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{V}{V_1}=\left(\frac{A+C}{A_1+C_1}\right)^2.$$

Ces deux équations conviennent aux paraboles aussi bien qu'aux deux autres courbes du second ordre; car la première est toujours satisfaite dans le cas de la parabole, et la seconde exprime que les paraboles que l'on considère ont le même paramètre, comme il est facile de le vérifier en exprimant dans V et dans V_1 que (B^2-4AC) et $(B_1^2-4A_1C_1)$ sont nuls *.

* Nous avons supposé que les courbes représentées par les équations [6] étaient rapportées à des axes rectangulaires; mais si elles l'étaient à des axes obliques, il serait encore facile de trouver les conditions de leur similitude.

Représentons, en effet, par

$$\left.\begin{array}{l} ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \\ \text{et} \quad a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1=0 \end{array}\right\} \qquad [10]$$

les équations de deux courbes du second ordre rapportées à des axes

qui forment les angles respectifs θ et θ_1. Rapportons ces deux courbes à des axes rectangulaires, mais en conservant l'axe des x, pour plus de simplicité ; les formules de transformation seront

$$x=\frac{x'\sin\theta-y'\cos\theta}{\sin\theta},\quad y=\frac{y'}{\sin\theta},$$

et en substituant ces valeurs dans la première des équations [10], nous trouverons :

$$A=a-b\cos\theta+c\cos^2\theta,\quad B=(b-2c\cos\theta)\sin\theta,\quad C=c\sin^2\theta,$$
$$D=(d-e\cos\theta)\sin\theta,\quad E=e\sin^2\theta,\quad F=f\sin^2\theta.$$

On tirera facilement de là

$$B^2-4AC=(b^2-4ac)\sin^2\theta,\quad A+C=a-b\cos\theta+c;$$

de sorte que *la condition de similitude sera* actuellement

$$\frac{(b^2-4ac)\sin^2\theta}{(a-b\cos\theta+c)^2}=\frac{(b_1^2-4a_1c_1)\sin^2\theta_1}{(a_1-b_1\cos\theta_1+c_1)^2}.$$

Pour que les courbes [10] *soient semblables et semblablement placées, il faudra que*

$$\frac{(b-2c\cos\theta)\sin\theta}{(b_1-2c_1\cos\theta_1)\sin\theta_1}=\frac{a-b\cos\theta+c\cos^2\theta}{a_1-b_1\cos\theta_1+c_1\cos^2\theta_1}=\frac{c\sin^2\theta}{c_1\sin^2\theta_1},$$

équations qui reviennent à

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}.$$

On verra ensuite que la quantité que nous avons désignée par V sera égale à

$$[ae^2-bde+cd^2+f(b^2-4ac)]\sin^4\theta,$$

de sorte qu'en représentant par v la quantité comprise dans la parenthèse, on aura

$$V=v\sin^4\theta,$$

et alors *la seconde condition d'égalité des deux courbes sera*

$$\frac{v\sin^4\theta}{v_1\sin^4\theta_1}=\left(\frac{a-b\cos\theta+c}{a_1-b_1\cos\theta_1+c_1}\right)^2.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE XXII.

DES COORDONNÉES ET DES LIEUX DANS L'ESPACE.

484. Imaginons dans l'espace trois plans fixes et connus de situation, tels d'ailleurs qu'ils se coupent en un même
Fig. 180 point O, et deux à deux, suivant trois droites indéfinies Xx, Yy, Zz. Ces plans partagent tout l'espace en huit angles trièdres, de sorte que la position d'un point sera déterminée lorsque nous saurons dans lequel de ses huit angles trièdres il se trouve, et à quelles distances de ces faces il est situé, ces distances étant comptées parallèlement aux arêtes de ce trièdre. Que l'on nous dise, par exemple, qu'un point est, dans le trièdre OXYZ, à trois décimètres du plan ZOY, à cinq décimètres du plan ZOX et à six du plan XOY. Je prendrai sur les trois arêtes OX, OY et OZ des distances OA, OB et OC respectivement égales à trois, cinq et six décimètres, et en menant par les points A, B, C des plans qui soient parallèles aux plans ZOY, ZOX et XOY, je formerai un parallélipipède dont le sommet M, opposé à O, sera le point demandé.

Pour indiquer dans quel angle trièdre se trouve le point que l'on considère, on conviendra de regarder comme positives les distances comptées sur les arêtes OX, OY et OZ, et comme négatives celles qui devraient êtres portées sur leurs prolongements Ox, Oy et Oz. Si, par exemple, le point M devait se trouver dans l'angle trièdre $OZxy$, nous dirions qu'il est à -3, -5 et $+6$ décimètres des plans respectifs ZOY, ZOX et XOY.

Les distances d'un point aux trois plans fixes se nomment *les coordonnées* de ce point, et on appelle ces plans et leurs intersections mutuelles *les plans* et *les axes des coordonnées*. Le point O est dit *l'origine*. Les distances d'un point aux trois plans ZOY, ZOX et XOY étant comptées parallèlement aux

axes Xx, Yy et Zz, on est convenu de représenter ces distances respectives par x, y et z, et de donner en conséquence à ces axes les noms d'axes des x, des y et des z. De plus, comme les points de chacun des trois plans se trouvent rapportés à ses intersections avec les deux autres, il est naturel de désigner chacun de ces plans par les coordonnées qui lui sont propres, et d'appeler ainsi les plans ZOY, ZOX et XOY les plans des zy, des zx et des xy.

485. Les points P, Q, R, où les trois coordonnées du point M coupent les plans fixes, sont les projections de ce point faites sur ces plans par des parallèles aux axes des z, des y et des x, de sorte que, si chacun de ces plans était perpendiculaire aux deux autres, les points P, Q, R seraient les projections orthogonales du point M. Ainsi, a, b, c désignant les coordonnées du point M, $\left.\begin{matrix}x=a\\y=b\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=a\\z=c\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}y=b\\z=c\end{matrix}\right\}$, seront les coordonnées de ses projections sur les plans des xy, des xz et des yz.

On voit par là que deux des projections d'un point étant données, la troisième s'ensuit nécessairement. C'est ce qu'il est d'ailleurs facile de reconnaître par une construction géométrique. Soient, en effet, P et Q les projections d'un point M sur les plans xy et zx; si l'on tire PB et QC parallèlement à l'axe des x, ces droites détermineront sur les axes OY et OZ des distances OB et OC qui seront respectivement l'y et le z du point dont il s'agit; et, par conséquent, en menant BR et CR parallèlement aux axes des z et des y, leur point R d'intersection sera la projection du point M sur zy. Si donc les coordonnées des points P et Q sont respectivement (a, b), (a, c), celles de R seront (b, c).

486. Il y a dans l'espace, comme sur un plan, une infinité de systèmes de coordonnées au moyen desquels on peut fixer la position d'un point : nous nous bornerons à indiquer le suivant que l'on nomme système de coordonnées polaires, et dont on fait souvent usage dans la mécanique, et surtout dans l'astronomie. Soient XOY un plan fixe, et par un point O deux droites également fixes OZ et OX; l'une perpendiculaire à XOY, et l'autre tracée dans ce plan. Il est facile de voir que le point M sera déterminé, si l'on se donne son rayon vecteur ρ, c'est-à-dire sa distance au pôle O, l'an-

gle θ formé par ce rayon avec l'axe OZ, et l'angle ω que fait avec l'axe OX la projection du rayon vecteur sur le plan XOY. Pour qu'avec ces trois coordonnées ω, θ et ρ on puisse fixer la position d'un point quelconque de l'espace, il faudra faire varier l'angle ω depuis $0°$ jusqu'à $360°$; θ depuis $0°$ jusqu'à $180°$, et ρ depuis zéro jusqu'à l'infini; car, de cette manière, la portion de plan ZPz aura fait une révolution entière autour de Zz, et le point M aura pris toutes les positions possibles dans cette portion de plan.

487. Concevons maintenant une surface quelconque rapportée aux trois plans fixes des xy, des xz et des yz. Il est facile de voir, en imitant le raisonnement du n° **48**, que l'une quelconque des trois coordonnées d'un point de cette surface est une fonction des deux autres, de sorte que si cette fonction est constante, *l'équation qui établira ainsi la relation constante qui lie les coordonnées de chaque point de la surface* sera l'expression analytique de la loi géométrique suivant laquelle se succèdent ses différents points. *C'est ce qu'on appelle l'équation de la surface proposée.*

488. Réciproquement *toute équation* $\varphi(x, y, z)=0$ *à trois variables représente* EN GÉNÉRAL *une surface*. Donnons, en effet, à la variable z par exemple, une certaine valeur γ, et traçons sur le plan des xy la courbe qui y est représentée par l'équation résultante $\varphi(x, y, \gamma)=0$. Si par tous ses points nous menons à OZ des parallèles qui soient égales à γ, nous formerons ainsi une courbe plane, égale et parallèle à celle que nous avons décrite sur le plan des xy, et qui sera telle que les coordonnées de chacun de ses points formeront des solutions de l'équation $\varphi(x, y, z)=0$. Si, donnant à z de nouvelles valeurs γ', γ'', γ''',.... nous recommençons les mêmes constructions, nous obtiendrons de cette manière une suite de courbes planes parallèles au plan des xy, et d'autant plus rapprochées que les valeurs données à z différeront moins les unes des autres. Donc, si l'on fait croître z d'une manière continue, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on obtiendra une série de courbes qui seront toutes contiguës, et qui formeront par conséquent une surface dont les points auront pour coordonnées tous les systèmes de valeurs de x, de y et de z, qui peuvent vérifier l'équation $\varphi(x, y, z)=0$. Donc une équation à trois variables x, y, z représente une surface qui

Fig. 181

est le lieu géométrique des points qui ont pour coordonnées tous les systèmes de valeurs de x, de y et de z qui peuvent satisfaire à cette équation.

489. Si l'équation proposée ne renferme que deux variables comme $\varphi(x, y)=0$, nous observerons que si, après avoir tracé sur le plan des xy la ligne qui y a $\varphi(x, y)=0$ pour équation, on mène par les divers points de cette ligne des parallèles indéfinies à l'axe des z, on formera ainsi une surface cylindrique. Or, chacune de ces parallèles est le lieu de tous les points de l'espace dont les coordonnées x et y sont les mêmes que celles du point où elle perce le plan des xy: donc notre surface cylindrique est le lieu géométrique de tous les points dont les coordonnées vérifient l'équation $\varphi(x,y)=0$; donc *toute équation entre deux variables représente une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe sur lequel on compte les coordonnées qui n'entrent pas dans l'équation*, et sa trace sur le plan des deux autres coordonnées y est représentée par cette même équation.

490. Il suit de là que si l'équation à deux variables est du premier degré, c'est-à-dire de la forme $y=ax+b$, elle représente un plan parallèle à l'axe des z; car on démontre, dans les éléments de géométrie, que lorsqu'une droite glisse sur une autre en restant constamment parallèle à elle-même, elle engendre un plan.

491. Si l'équation proposée ne renferme qu'une seule variable, comme $\varphi(x)=0$, elle se décomposera en autant d'équations partielles de la forme

$$x-a=0,$$

qu'elle a de racines réelles et inégales. Or, tous les points dont les coordonnées vérifient cette équation $x-a=0$, ont a pour abscisse, si a est une quantité réelle; donc ils sont tous situés sur un plan mené parallèlement au plan des zy, à une distance a de ce plan, et comme les points de ce plan sont les seuls qui aient a pour abscisse x et dont les coordonnées puissent, par conséquent, satisfaire à l'équation $x-a=0$, on en conclut que ce plan est le lieu de cette équation. Il s'ensuit que *l'équation à une seule variable* $\varphi(x)=0$ *représente le système d'autant de plans parallèles*

à celui des deux autres coordonnées qu'elle a de racines réelles et inégales.

Il suit de là que $z=0$, $y=0$, $x=0$ sont les équations des plans respectifs xy, xz, zy.

492. *Une équation à une, deux ou trois variables peut ne représenter qu'un système de lignes ou de points isolés, ou même ne rien représenter,* suivant qu'elle peut se décomposer en deux ou trois autres, ou qu'elle ne peut être vérifiée par aucun système de valeurs réelles. Ainsi les équations

$$x^2+a^2=0,\quad x^2+y^2+a^2=0,\quad x^2+y^2+z^2+a^2=0,$$

ne représentent rien.

L'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$$

représente le point (a, b, c); car cette équation ne peut être vérifiée qu'en posant à la fois

$$x-a=0,\quad y-b=0 \quad \text{et} \quad z-c=0,$$

c'est-à-dire qu'elle n'admet que ce seul système de valeurs réelles.

Mais l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0$$

étant satisfaite par telle valeur de z que l'on voudra combiner avec $x=a$ et $y=b$, représente par conséquent tous les points qui ont le point (a, b) pour projection sur le plan des xy, c'est-à-dire, l'intersection des plans qui ont pour équation

$$x-a=0 \quad \text{et} \quad y-b=0.$$

493. Cette dernière observation nous conduit à cette conséquence fort importante, que le système de deux équations simultanées

$$\varphi(x, y, z)=0 \quad \text{et} \quad \psi(x, y, z)=0,$$

c'est-à-dire dans lesquelles on donnerait les mêmes valeurs aux indéterminées, représente une ligne. Il est évident, en effet, que tout système de valeurs de x, y, z, qui satisfait à ces deux équations, détermine un point situé en même temps sur les deux surfaces, c'est-à-dire sur leur commune section,

et réciproquement. De sorte que, si l'on veut construire cette ligne, il faudra construire séparément les surfaces représentées par les deux équations $\varphi(x, y, z) = 0$ et $\psi(x, y, z) = 0$, ou bien chercher les solutions communes à ces deux équations, et construire ensuite tous les points qu'elles déterminent.

494. Comme on peut toujours faire passer une infinité de surfaces par une courbe donnée, on voit que cette ligne peut être représentée analytiquement par une infinité de systèmes de deux équations. Il sera donc utile de choisir, pour déterminer une ligne dans l'espace, les deux surfaces dont les équations seront les plus simples possible. Ces surfaces seront *généralement* des surfaces cylindriques, parallèles chacune à l'un des axes coordonnés; car leurs équations ne renfermeront que deux variables. Ainsi, pour représenter une ligne située d'une manière quelconque dans l'espace, on concevra qu'on ait mené par tous ses points des parallèles à l'axe des x, par exemple, et la trace sur zy du cylindre ainsi formé sera la projection de la ligne sur le plan zy. En construisant de même une seconde surface cylindrique dont les génératrices soient parallèles à l'axe des y, et qui ait la ligne donnée pour directrice, on obtiendra la projection de cette ligne sur le plan zx, de sorte que quand une ligne est donnée, ses projections sur les plans coordonnés sont déterminées, et réciproquement; car si l'on a les projections d'une ligne sur deux plans qui se coupent, cette droite doit se trouver à l'intersection de deux cylindres connus.

Si donc

$$\varphi(x, z) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(y, z) = 0$$

sont les équations données de deux lignes qui sont, sur les plans xz et zy, les projections d'une certaine ligne située dans l'espace, ces mêmes équations, prises dans toute leur généralité, représenteront ses deux cylindres projetants, et par conséquent détermineront cette ligne par leur simultanéité.

495. Le moyen le plus simple de représenter une circonférence de cercle, sera en général de la regarder comme résultant de l'intersection d'une surface sphérique par un plan, de sorte que ces équations seront le système des équations de cette sphère et de ce plan.

496. Puisqu'une ligne est déterminée quand on connaît ses projections sur deux plans coordonnés, sa projection sur le troisième doit s'ensuivre nécessairement. Comment donc obtenir l'équation de cette projection ou de ce troisième cylindre projetant? Soient (a, b, c) les trois coordonnées x, y, z, d'un point quelconque de la courbe qui a pour équations

$$\varphi(x, z)=0 \quad \text{et} \quad \psi(y, z)=0:$$

a et b seront les coordonnées de la projection de ce point sur le plan xy. Or, si entre ces deux équations on élimine z, il est clair que l'équation résultante

$$\pi(x, y)=0$$

aura pour solutions uniques tous les couples de valeurs de x et de y qui, conjointement avec certaines valeurs de z, vérifient les équations proposées; donc elle est vérifiée par $x=a$ et $y=b$, et par conséquent par les coordonnées de tous les points de la droite qui projette le point (a, b, c) sur le plan xy; c'est donc l'équation du cylindre projetant de la courbe sur ce plan.

Il suit de là que *lorsque l'on connaîtra les équations de deux surfaces quelconques, il suffira, pour obtenir l'equation du cylindre qui projetterait leur commune section sur un des plans coordonnés, d'éliminer entre ces équations la variable que l'on compte sur l'axe qui n'est pas dans ce plan.*

497. Remarquons qu'en vertu des principes établis aux nos **491** et **493**, si $\varphi(x, y)=0$ représente une ligne tracée sur le plan des xy, lorsqu'on ne s'occupe que des points de ce plan, cette ligne aura pour équations

$$\varphi(x, y)=0 \quad \text{et} \quad z=0.$$

498. Il suit du n° **494** que le moyen le plus simple de représenter une droite située dans l'espace, sera de se donner les projections de cette droite sur deux des plans coordonnés, sur zx et zy par exemple; et comme on sait que ces projections sont des lignes droites, leurs équations seront de la forme

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta.$$

Dans ces équations, α et β sont les distances de l'origine aux

points où les projections des droites données coupent respectivement les axes des x et des y, et a et b sont les tangentes des angles que ces projections font avec celui des z, si les coordonnées sont rectangulaires, et si elles sont obliques, ce sont les rapports des sinus des angles qu'elles font, la première avec les axes des z et des x, et la seconde avec ceux des z et des y.

Si entre les deux équations ci-dessus on élimine z, on trouvera pour l'équation de la projection de la droite sur le plan xy,

$$y-\beta=\frac{b}{a}(x-\alpha).$$

499. Enfin, si l'on demande la trace de la droite sur un des plans coordonnés, il n'y aura qu'à combiner l'équation de ce plan avec celles des deux projections de cette droite. Ainsi, par exemple, en faisant $z=0$ dans ces équations, on trouvera

$$x=\alpha \quad \text{et} \quad y=\beta,$$

pour valeurs des deux autres coordonnées de la trace sur le plan xy.

CHAPITRE XXIII.

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE.

500. Problème. *Trouver la distance de deux points donnés par leurs coordonnées.*

Fig. 180 Cherchons d'abord la distance δ du point $M(x', y', z')$ à l'origine des coordonnées. Cette distance est la diagonale d'un parallélipipède dont les arêtes sont x', y', z'; je désigne par (x, y), (x, z) et (y, z) les trois angles XOY, XOZ et YOZ. Cela posé, le parallélogramme OCMP nous donne

$$\delta^2+\overline{CP}^2=2z'^2+2\overline{OP}^2;$$

mais, en vertu du théorème fondamental de la trigonométrie rectiligne,

$$\overline{OP}^2=x'^2+y'^2+2x'y'\cos(x,y);$$

donc $$\delta^2+\overline{CP}^2=2[x'^2+y'^2+z'^2+2x'y'\cos(x,y)].$$

Nous trouverons semblablement, en considérant le parallélogramme ORMA,

$$\delta^2+\overline{RA}^2=2[x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos(y,z)].$$

Enfin, le parallélogramme RCAP nous donnera

$$\overline{CP}^2+\overline{RA}^2=2y'^2+2\overline{CA}^2=2[y'^2+x'^2+z'^2-2z'x'\cos(z,x)].$$

Retranchant cette troisième équation de la somme des deux précédentes et divisant par 2 les deux membres de l'équation résultante, il viendra

$$\delta^2=x'^2+y'^2+z'^2+2x'y'\cos(x,y)+2x'z'\cos(x,z)$$
$$+2y'z'\cos(y,z). \qquad [1].$$

Si les axes sont rectangulaires, cette équation se réduit à

$$\delta^2=x'^2+y'^2+z'^2 \qquad [2],$$

formule connue de géométrie.

Veut-on actuellement trouver la distance des deux points $M'(x', y', z')$ et $M''(x'', y'', z'')$, on observera que, si on mène par chacun de ces points trois plans parallèles aux trois plans

coordonnés, on formera un parallélipipède dont δ sera la diagonale, dont les trois arêtes seront parallèles aux trois axes des coordonnées, et auront pour longueurs respectives $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$; par conséquent il suffira pour avoir la valeur de δ de changer, dans la formule [1], x', y', z', respectivement en $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$, ce qui donnera

$$\delta^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2+2(x'-x'')(y'-y'')\cos(x,y)$$
$$+2(x'-x'')(z'-z'')\cos(x,z)+2(y'-y'')(z'-z'')\cos(y,z) \quad [3].$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, cette formule se réduira à

$$\delta^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2 \quad [4].$$

Il est entendu que dans ces quatre formules il faut avoir égard aux signes des coordonnées et des cosinus des angles (x, y), (x, z) et (y, z), comme nous l'avons démontré au n° **66**.

501. Problème. *Trouver les équations d'une droite assujettie à passer par deux points donnés.*

Soient (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées des deux points donnés. En répétant ici les raisonnements que nous avons faits au n° **117**, on résoudrait facilement la question proposée; mais nous arriverons plus directement au but, en observant que les projections de la droite demandée sur les plans xz et yz doivent évidemment passer par les projections (x', z') et (x'', z''), (y', z') et (y'', z'') des deux points donnés sur ces mêmes plans; donc les équations demandées sont

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z'), \quad y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z').$$

Si la droite demandée devait passer seulement par le point (x', y', z'), il suffirait d'exprimer que ses projections sur les plans xz et yz passent par les projections de ce point sur ces plans, de sorte que ces équations sont alors

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z'),$$

dans lesquelles a et b sont deux constantes indéterminées.

502. Problème. *Trouver le point de rencontre de deux droites données.*

Soient

$$\begin{matrix}[a]\\ [b]\end{matrix} \quad \left.\begin{matrix}x=az+\alpha\\ y=bz+\beta\end{matrix}\right\}, \qquad \begin{matrix}[c]\\ [d]\end{matrix} \quad \left.\begin{matrix}x=a'z+\alpha'\\ y=b'z+\beta'\end{matrix}\right\},$$

les équations des deux droites données. Si elles se coupent, les coordonnées de leur point d'intersection devront satisfaire à ces quatre équations, et par conséquent on obtiendra ces coordonnées en résolvant ces équations. Or, trois équations suffisent, en général, pour déterminer trois inconnues. Si donc on tire les valeurs de x, de y et de z de trois de ces équations, et qu'on les substitue dans la quatrième, il faudra que l'équation résultante soit satisfaite d'elle-même et par le seul jeu des signes, de sorte que cette équation sera la condition nécessaire et suffisante qui devra exister entre les coefficients de nos quatre équations pour que les droites qu'elles représentent se coupent. Pour effectuer l'élimination de x, y, z, je soustrais [a] de [c] et [b] de [d], et je trouve

$$0=(a'-a)z+\alpha'-\alpha, \quad 0=(b'-b)z+(\beta'-\beta) \quad [f];$$

puis en éliminant z entre ces dernières, j'obtiens la condition

$$(a'-a)(\beta'-\beta)-(b'-b)(\alpha'-\alpha)=0 \quad [5].$$

Ainsi les deux droites ne se couperont pas si cette équation n'est pas vérifiée, et lorsqu'elle sera satisfaite, on obtiendra les coordonnées du point d'intersection en substituant la valeur de z tirée de l'une ou de l'autre des équations [f] dans [a] et dans [b], ou dans [c] et dans [d]. On trouvera ainsi

$$z=-\frac{\alpha'-\alpha}{a'-a}=-\frac{\beta'-\beta}{b'-b}, \quad x=\frac{a'\alpha-a\alpha'}{a'-a}, \quad y=\frac{b'\beta-b\beta'}{b'-b}.$$

Si on a $a=a'$ et $b=b'$, l'équation [5] est vérifiée; mais comme les valeurs de x, y, z deviennent alors infinies, il s'ensuit que les droites se coupent en un point qui est infiniment éloigné, c'est-à-dire que ces droites sont parallèles. Ainsi *l'équation* [5] *signifie que les deux droites sont dans un même plan* (518).

503. Scolie. $a=a'$ et $b=b'$ sont les conditions de parallélisme des deux droites proposées; et, en effet, on a vu dans la géométrie que pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections sur deux plans qui se coupent soient parallèles. Ainsi les équations d'une parallèle, menée à la droite

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta$$

par le point (x', y'), seront

$$x-x'=a(z-z'),\quad y-y'=b(z-z').$$

504. Tout ce que nous avons dit dans le n° **501** s'appliquerait très-bien à deux courbes données : ainsi, en éliminant x, y, z entre les quatre équations qui représentent leurs projections, on parviendra à une équation de condition qui devra être satisfaite pour que ces deux courbes puissent se couper, et cette équation aura lieu entre les constantes qui déterminent la forme des deux courbes et leur position dans l'espace.

505. Problème. *Trouver l'angle de deux droites données par leurs équations* en coordonnées rectangulaires.

Deux droites situées dans l'espace peuvent très-bien ne pas se couper, mais alors elles ont encore une certaine inclinaison l'une à l'égard de l'autre, et cette inclinaison se mesure par l'angle formé par deux droites menées par un même point, et parallèlement aux lignes proposées (*Leçons de Géométrie,* **468**). Soient donc OA et OB ces deux parallèles, et Fig. 182

$$\left.\begin{array}{l} x=az \\ y=bz \end{array}\right\}\quad [a] \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} x=a'z \\ y=b'z \end{array}\right\}\quad [b]$$

leurs équations. Je prends sur ces droites deux distances OM′ et OM″ égales à l'unité linéaire, et je joins les points M′ et M″ : je formerai ainsi un triangle OM′M″ qui donnera (*Trigonométrie,* **55**)

$$2\cos V=2-\overline{M'M''}^2,$$

en appelant V l'angle cherché. Mais, si l'on désigne par (x', y', z'), et par (x'', y'', z'') les coordonnées des points respectifs M′ et M″, on aura (**500**)

$$\begin{aligned}\overline{M'M''}^2&=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2\\ &=2-2(x'x''+y'y''+z'z''),\end{aligned}$$

car il est évident que

$$x'^2+y'^2+z'^2=1 \quad \text{et que} \quad x''^2+y''^2+z''^2=1;$$

par conséquent

$$\cos V=x'x''+y'y''+z'z''.$$

Or, on a, pour exprimer que (x', y', z') et que (x'', y'', z'') sont les coordonnées des points M' et M'',

$$\left.\begin{matrix} x'=az' \\ y'=bz' \end{matrix}\right\}, \quad \text{et} \quad \left.\begin{matrix} x''=a'z'' \\ y''=b'z'' \end{matrix}\right\}.$$

Donc

$$\cos V = x'x''+y'y''+z'z''=(aa'+bb'+1)z'z''.$$

Mais, en remplaçant x' et y' par leurs valeurs az' et bz' dans $x'^2+y'^2+z'^2=1$, on trouvera facilement

$$z'=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}; \quad \text{par suite} \quad z''=\pm\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}:$$

donc enfin

$$\cos V=\pm\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}} \qquad [6].$$

Remarquons que, d'après la manière dont cette formule a été obtenue, les deux radicaux auront les mêmes signes, si les points M' et M'' sont situés tous les deux d'un même côté du plan xy, et qu'ainsi V désignera alors l'angle AOB ou son opposé au sommet A'OB', tandis que, si les points M' et M'' sont placés de part et d'autre du plan xy, les deux radicaux devront avoir des signes contraires, et V représentera dans ce cas l'angle AOB' ou son opposé au sommet A'OB. Ainsi *on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que les deux côtés de l'angle dont on demande le cosinus sont du même côte du plan des* xy *ou qu'ils sont dirigés de part et d'autre de ce plan.*

506. Si les deux droites données doivent avoir des directions perpendiculaires l'une à l'égard de l'autre, il faut et il suffit que $\cos V=0$, ce qui entraîne l'équation

$$aa'+bb'+1=0 \qquad [7].$$

Telle est donc *la condition de perpendicularité de deux droites dans l'espace.*

507. Si les deux droites sont parallèles, on doit avoir $V=0$, et partant $\cos V=\pm 1$, ce qui conduira facilement à l'équation

$$(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2=0,$$

et, comme la somme de trois quantités positives ne peut pas

être nulle, à moins que chacune d'elles ne le soit en particulier, cette équation se décomposera dans les trois suivantes :

$$a=a', \quad b=b', \quad ab'=ba'.$$

La troisième de ces équations est une conséquence des deux autres, et on retombe ainsi sur les conditions que nous avons données plus haut (**503**).

508. Proposons-nous actuellement de *trouver l'angle qu'une droite forme avec chacun des axes des coordonnées,* par exemple, avec l'axe des x. Il suffira d'exprimer dans la formule [6] que la seconde droite coïncide avec cet axe. Mais, comme sa projection sur le plan yz est alors l'origine, b' est tout à fait indéterminée, et la seconde des équations [b] devient illusoire; par conséquent, il faut, pour déterminer notre seconde droite, avoir recours à sa projection sur le plan des xy. J'élimine donc (**498**) z entre les équations [b], ce qui donne

$$y=\frac{b'}{a'}x;$$

on voit alors que le rapport $\frac{b'}{a'}$, tangente de l'angle que cette projection fait avec l'axe des x, devient nul, si la seconde droite coïncide avec cet axe; et, comme alors la projection sur le plan xz est perpendiculaire à l'axe des z, a' est infinie. Faisons donc $a'=\infty$ et $\frac{b'}{a'}=0$ dans la formule [6], et on trouvera, après en avoir divisé préalablement les deux termes par a'; on trouvera, dis-je,

$$\cos\alpha=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

On trouvera de la même manière

$$\cos\beta=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \quad \text{et} \quad \cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

en appelant α, β, γ les angles que la première droite fait avec les parties positives des axes respectifs des x, des y et des z.

Il suit des remarques que nous avons faites sur la formule [6], que les signes devront se correspondre dans ces formules, et qu'il faudra prendre les signes supérieurs ou les signes inférieurs, selon que l'on considérera les angles que

forme avec les axes la partie de la droite qui se trouve au-dessus ou au-dessous du plan xy.

Il est facile d'obtenir directement les trois formules précédentes; car, si l'on prend sur la direction de la droite donnée OM une distance OM égale à l'unité linéaire, et que l'on achève le parallélipipède rectangle dont cette droite est la diagonale, il est facile de voir que les trois arêtes OA, OB, OC seront les cosinus respectifs des trois angles que nous avons désignés par α, β, γ; ainsi, en appelant (x', y', z') les coordonnées du point M, on aura

Fig. 179

$$\cos\alpha = x', \quad \cos\beta = y', \quad \cos\gamma = z'.$$

Mais, si $x = az$ et $y = bz$ sont les équations de la droite OM, on aura évidemment

$$x' = az', \quad y' = bz', \quad \text{et} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

équations d'où l'on tire

$$z' = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

et par conséquent

$$\left.\begin{array}{c} \cos\alpha = \pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \ \cos\beta = \pm \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \\ \cos\gamma = \pm \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \end{array}\right\} \quad [8].$$

Remarquons que ces trois cosinus sont liés par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Et, en effet, ce sont trois arêtes contiguës d'un parallélipipède rectangle dont la diagonale est égale à l'unité linéaire.

509. L'expression que nous avons trouvée plus haut (**505**) pour le cosinus de l'angle de deux droites peut se modifier d'une manière très-élégante au moyen des formules [8]. Si on appelle, en effet, α', β', γ' les angles que la seconde droite fait avec les trois axes coordonnés, on aura

$$\cos\alpha' = \pm \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}, \ \cos\beta' = \pm \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}, \ \cos\gamma' = \pm \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}};$$

en introduisant ces valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\beta$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma$, $\cos\gamma'$ dans la formule [6], il viendra

$$\cos V = \pm(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') \quad [9].$$

De même qu'au n° **505**, *on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que les deux côtés de l'angle* V *seront d'un même côté du plan* xy *ou de part et d'autre de ce plan.*

510. Ces formules donnent le moyen d'exprimer les équations d'une droite en fonction des angles qu'elle fait avec les trois axes, car on en tire

$$a=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad b=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

et par conséquent ces équations seront de la forme

$$x=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}z+p,\quad y=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}z+q.$$

CHAPITRE XXIV.

DU PLAN.

511. Problème. *Trouver l'équation du plan.*

La manière la plus simple de concevoir la génération du plan, c'est de le regarder comme engendré par une droite mobile qui glisse sur une droite fixe en restant parallèle à une direction donnée. Soient

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta \qquad [a]$$

les équations de la *directrice*,

$$x=a'z+p,\quad y=b'z+q$$

les équations de la droite à laquelle la *génératrice* doit rester constamment parallèle, les équations de cette génératrice seront, par conséquent, de la forme

$$x=a'z+\alpha',\quad y=b'z+\beta' \qquad [b],$$

α' et β' étant deux quantités qui varient d'une position de la droite mobile à une autre. Pour que cette droite rencontre la génératrice, il faut que l'on ait entre leurs coefficients (**502**) la relation

$$(a-a')(\beta-\beta')-(b-b')(\alpha-\alpha')=0 \quad [c].$$

Maintenant, il est clair que, pour chaque couple de valeurs de α' et de β' qui vérifieront cette dernière équation, les équations [*b*] seront complétement déterminées, de sorte qu'en les construisant, on obtiendra une des positions de la génératrice; mais, si l'on élimine α' et β' entre les équations [*b*] et [*c*], l'équation finale sera satisfaite par tous les systèmes de valeurs et par les seuls systèmes de valeurs de x, y, z, qui, conjointement avec certaines valeurs de α' et de β', vérifient les équations [*b*] et [*c*], c'est-à-dire par les coordonnées des différents points de la génératrice dans chacune des positions qu'elle peut prendre; donc le lieu de cette équation finale sera précisément celui de toutes les positions de la droite mo-

bile, ou, en d'autres termes, sera la surface qu'elle engendre. Et on comprend, en effet, que cette équation finale étant indépendante des quantités α' et β' qui fixent la position de la génératrice, ne doit pas exprimer une propriété particulière aux coordonnées de ses différents points, plutôt qu'à celles des points de toute autre droite assujettie aux mêmes conditions; elle est donc l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées de chaque point de la surface engendrée par la droite mobile; donc elle est l'équation de cette surface.

Je substitue donc dans l'équation [c] les valeurs de α' et de β' tirées des équations [b], et je trouve ainsi, toutes réductions faites,

$$(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')z+\beta(a-a')-\alpha(b-b')=0.$$

L'équation du plan est donc du premier degré.

Cette équation contient six constantes arbitraires et trois coefficients seulement, car on peut diviser tous les termes par le coefficient de l'un d'eux. Cela signifie que trois conditions suffisent pour déterminer un plan (note du n° 409), et c'est, en effet, ce que la *Géométrie élémentaire* nous a appris.

512. La réciproque est-elle vraie, c'est-à-dire *toute équation du premier degré à trois variables représente-t-elle un plan**? Soit donc l'équation

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad [1].$$

Pour étudier la nature de la surface représentée par cette équation, je vais la couper par une série de plans parallèles à l'un des plans coordonnés, à celui des xy, par exemple; de cette manière, chaque ligne d'intersection sera égale et parallèle à sa projection sur xy, de sorte qu'en cherchant cette projection, je connaîtrai suivant quelle ligne le plan sécant coupe la surface inconnue. Or, l'équation d'un pareil plan est de la forme

$$z=c:$$

* Il a été reconnu aux n°s 490 et 491 qu'une équation du premier degré à une ou deux indéterminées représente un plan.

j'élimine donc z (**496**) entre cette équation et l'équation [1], et, comme l'équation résultante

$$Ax+By+Cc+D=0$$

est du premier degré, j'en conclus d'abord que tous les plans parallèles à xy coupent la surface suivant des lignes droites; ensuite que ces droites sont parallèles; car, les coefficients de x et de y dans l'équation précédente étant constants, toutes les droites qu'elle représentera lorsqu'on y fera varier c seront parallèles. Il suit de là que l'équation [1] a pour lieu géométrique un plan ou une surface cylindrique, selon que sa trace sur l'un des plans zx ou zy est une ligne droite ou une ligne courbe. Or, en faisant $y=0$ ou $x=0$ dans l'équation [1], on trouve

$$Ax+Cz+D=0 \quad \text{ou} \quad Bx+Cz+D=0.$$

Donc *toute équation du premier degré représente une surface plane.*

513. Cherchons le point où le plan [1] coupe l'axe des x: il faudra, pour cela, faire $z=0$ et $y=0$ dans son équation, puisque ce sont là les deux équations de cet axe, et on trouvera, en désignant cette distance par a,

$$a=-\frac{D}{A};$$

on verra de même, en appelant b et c les distances de l'origine aux points où ce même plan coupe les axes des y et des z, que

$$b=-\frac{D}{B} \quad \text{et que} \quad c=-\frac{D}{C}.$$

Si maintenant on introduit ces trois distances dans l'équation [1], elle deviendra

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

équation analogue à celles que nous avons obtenues pour la ligne droite, l'ellipse et l'hyperbole.

Enfin, si l'on divise les deux membres de l'équation [1] par C, et qu'on pose, pour abréger,

$$-\frac{A}{C}=a, \quad -\frac{B}{C}=b, \quad -\frac{D}{C}=c,$$

cette équation prendra la forme

$$z = ax + by + c,$$

analogue à celle que nous avons donnée à la ligne droite. Toutefois, on préfère ordinairement se servir de l'équation [1], parce qu'elle est plus symétrique.

514. PROBLÈME. *Faire passer un plan par trois points donnés.*

Soient (x', y', z'), (x'', y'', z'') et (x''', y''', z''') les coordonnées des points donnés : l'équation générale du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad [1]$$

devra être vérifiée en y remplaçant x, y, z par les coordonnées de chaque point; ainsi on aura

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0,$$

desquelles il sera facile de tirer les valeurs des rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ et $\frac{C}{D}$. Désignons ces valeurs respectivement par A', B' et C', et substituons-les dans l'équation; il viendra pour réponse à la question

$$A'x + B'y + C'z + 1 = 0.$$

515. Si le plan n'était assujetti qu'à la seule condition de passer par le point $(x', y'\ z')$, il n'y aurait qu'à écrire la condition

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

dans l'équation [1], ce qui se ferait en retranchant ces deux équations membre à membre, et on trouverait ainsi pour l'équation cherchée

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0 \quad [2].$$

516. PROBLÈME. *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une droite soit située dans un plan. — Faire passer un plan par un point et par une droite donnés.*

Soient $\qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$

les équations de la droite, et

$$Ax+By+Cz+D=0$$

celle du plan.

Si la droite est tout entière dans le plan, il faut que, si l'on substitue dans l'équation de ce plan les valeurs de x et de y tirées des équations de la droite, l'équation résultante

$$(Aa+Bb+C)z+A\alpha+B\beta+D=0 \quad [k]$$

soit vérifiée, quelle que soit la valeur que l'on puisse donner à z; c'est-à-dire que l'on ait à la fois

$$Aa+Bb+C=0 \quad \text{et} \quad A\alpha+B\beta+D=0 \quad [3].$$

Telles sont les conditions demandées.

Si l'on veut *faire passer un plan par un point et par une droite donnés*, on observera que l'équation d'un plan mené par le point (x', y') est de la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

de sorte que D est égal à $-(Ax'+By'+Cz')$; on tirera donc les valeurs des rapports $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ des équations [3], et en les substituant dans l'équation précédente, on trouvera

$$\begin{gathered}(y'-bz'-\beta)(x-x')-(x'-az'-\alpha)(y-y')\\ +[b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)](z-z')=0 \qquad [4].\end{gathered}$$

517. Remarquons que l'équation [k] déterminant la coordonnée z du point où la droite proposée coupe le plan, si l'on veut exprimer que cette droite est parallèle à ce plan, il n'y aura qu'à égaler à zéro le coefficient de z, puisque la valeur de cette quantité sera alors infinie. Donc

$$Aa+Bb+C=0 \qquad [5]$$

est la condition qui exprime qu'une droite et un plan sont parallèles.

518. PROBLÈME. *Mener par une droite donnée un plan parallèle à une autre droite donnée.*

Soient

$$\left.\begin{aligned}x&=az+\alpha\\ y&=bz+\beta\end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \left.\begin{aligned}x&=a'z+\alpha'\\ y&=b'z+\beta'\end{aligned}\right\}$$

les équations respectives de ces deux droites : celle du plan étant représentée en général par

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on aura, pour exprimer les conditions de la question, les équations

$$Aa + Bb + C = 0, \quad A\alpha + B\beta + D = 0$$

et

$$Aa' + Bb' + C = 0.$$

En éliminant D entre la seconde et l'équation du plan, on trouve

$$A(x - \alpha) + B(y - \beta) + Cz = 0,$$

et on tire facilement des deux autres

$$A = -\frac{C(b' - b)}{ab' - ba'}, \quad B = -\frac{C(a - a')}{ab' - ba'},$$

de sorte que l'équation du plan est

$$(b' - b)(x - \alpha) - (a' - a)(y - \beta) - (ab' - ba')z = 0 \quad [6].$$

Si l'on veut exprimer que les deux droites données sont dans un même plan, il suffira d'écrire que la seconde a un point dans ce plan, et qu'ainsi, par exemple, les coordonnées de sa trace sur xy vérifient l'équation [6]. On retombera ainsi sur l'équation [5] du nº **502**.

519. PROBLÈME. *Abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur un plan donné, et trouver la longueur de cette perpendiculaire.*

1° On a démontré dans la *Géométrie élémentaire* que, *quand une droite est perpendiculaire à un plan, les projections orthogonales de cette droite sur deux plans de projection étaient perpendiculaires aux traces de ce plan sur ces deux-ci* : en conséquence, supposant que les axes coordonnés soient rectangulaires, je représente par (x', y', z') les coordonnées du point donné, et par

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan. La perpendiculaire demandée devant passer par le point (x', y', z'), ses équations seront de la forme (**501**)

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

Maintenant, pour exprimer que cette droite est perpendicu-

laire au plan, je cherche les traces de ce plan sur les plans zx et zy, en faisant successivement $y=0$ et $z=0$ dans son équation, et je trouve

$$Ax+Cz+D=0,\quad By+Cz+D=0.$$

Chacune d'elles doit être perpendiculaire à la projection correspondante; donc

$$a=\frac{A}{C}\quad\text{et}\quad b=\frac{B}{C};$$

donc $x-x'=\frac{A}{C}(z-z')$ et $y-y'=\frac{B}{C}(z-z')$ [7]

sont les équations de la perpendiculaire demandée.

Remarquons que si on avait $C=0$, ces deux équations se réduiraient à l'équation unique

$$z-z'=0,$$

qui est insuffisante pour particulariser la perpendiculaire demandée. C'est qu'en effet l'hypothèse $C=0$ signifie que le plan donné est perpendiculaire au plan xy (**490**), et que ses traces sur les deux autres plans coordonnés étant alors parallèles à l'axe des z, les plans qui projettent la perpendiculaire demandée sur ces mêmes plans coïncident, puisqu'ils ont d'ailleurs un point commun (x', y', z'). Il faut donc avoir recours à la troisième projection, laquelle est

$$y-y'=\frac{B}{A}(x-x');$$

et en joignant l'équation $z-z'=0$ à celle-ci, la perpendiculaire sera complétement déterminée.

2° Pour obtenir la longueur de cette perpendiculaire, nous raisonnerons comme nous l'avons fait au n° **44**, et nous serons ainsi conduits à mettre l'équation du plan sous la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D'=0,$$

en posant pour abréger $D'=Ax'+By'+Cz'+D$. Alors en remplaçant dans cette équation $(x-x')$ et $(y-y')$ par leurs valeurs données par les équations de la perpendiculaire, on trouvera

$$z-z'=\frac{-CD'}{A^2+B^2+C^2},$$

et par suite

$$x-x'=\frac{-AD'}{A^2+B^2+C^2},\quad y-y'=\frac{-BD'}{A^2+B^2+C^2}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

il viendra immédiatement

$$\delta^2 = \frac{D'^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \text{d'où} \quad \delta = \pm \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad [8],$$

formule tout à fait analogue à celle que nous avons trouvée au n° **46**, et qu'il sera également facile de traduire en langage ordinaire

Si la perpendiculaire part de l'origine, on aura simplement

$$\delta = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad [9].$$

Remarquons avec soin que dans ces formules il faudra prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que le point donné (x', y', z') sera situé au-dessus ou au-dessous du plan (**45**)

520. Problème. *Abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée, et trouver la longueur de cette perpendiculaire.*

1° Soient (x', y', z') les coordonnées du point et

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

les équations de la droite donnée. Si par ce point et par cette droite nous conduisons un plan, et que par le point nous en menions un second perpendiculaire à la droite, il est clair que l'intersection de ces deux plans sera la perpendiculaire demandée. L'équation du premier de ces plans est la formule [4]. Quant au second on trouvera facilement qu'il a pour équation

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0 \quad [10].$$

Telles sont donc les équations de la droite demandée.

2° Pour déterminer sa longueur, il faudrait chercher la distance du point donné au point d'intersection du plan [10] avec la droite donnée; mais les calculs ainsi effectués seraient très-longs. On arrivera beaucoup plus simplement au résultat cherché de la manière suivante.

Je joins le point donné M avec le point A, où la droite Fig. 183

donnée AB perce le plan des xy, et je forme ainsi un triangle rectangle MAB qui donne

$$p=\delta\sin V,$$

en appelant δ la distance AM et V l'angle MAB. Or, les équations de la droite AM sont (**501**)

$$x-\alpha=\frac{x'-\alpha}{z'}z,\quad y-\beta=\frac{y'-\beta}{z'}z,$$

de sorte qu'en faisant $a'=\frac{x'-\alpha}{z'}$ et $b'=\frac{y'-\beta}{z'}$ dans la formule [6] du n° **505**, on trouvera

$$\cos V=\frac{a(x'-\alpha)+b(y'-b)+z'}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2}};$$

mais $\delta=\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2}$; donc en substituant dans l'équation $p=\delta\sin V$, il viendra

$$p=\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2-\frac{[a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z']^2}{a^2+b^2+1}},$$

formule qu'il sera facile de réduire à

$$p=\sqrt{\frac{(x'-az'-\alpha)^2+(y'-bz'-\beta)^2+[a(y'-\beta)-b(x'-\alpha)]^2}{a^2+b^2+1}}.$$

521. Problème. *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.*

Soient

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta$$

les équations de cette droite, et

$$Ax+By+Cz+D=0$$

celle du plan. L'angle demandé a pour mesure l'angle formé par la droite avec sa projection sur le plan. Si donc on abaisse d'un point quelconque de la droite une perpendiculaire sur le plan, l'angle formé par ces deux droites sera le complément de l'angle demandé. Or, si nous désignons par (x', y', z') les coordonnées du point dont il s'agit, nous aurons pour les équations de notre perpendiculaire (**519**)

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'),\quad y-y'=\frac{B}{C}(z-z');$$

nous remplacerons donc a' et b' par $\frac{A}{C}$ et par $\frac{B}{C}$ dans la for-

mule [6] du n° 505, et le sinus de l'angle cherché aura pour expression

$$\sin V = \pm \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Comme l'angle V est $< 180°$, on prendra le signe $+$ ou le signe $-$, selon que $Aa+Bb+C$ sera >0 ou <0.

Si la droite était parallèle au plan, sin V serait nul, et il faudrait en conséquence qu'on eût

$$Aa+Bb+C=0.$$

Telle est donc la condition de parallélisme d'une droite et d'un plan (502).

522. Problème. *Trouver l'angle de deux plans.*

Si d'un point quelconque de l'espace, de l'origine par exemple, on abaisse deux perpendiculaires sur les deux plans proposés, les angles formés par ces perpendiculaires seront égaux aux angles rectilignes qui mesurent les quatre angles dièdres compris entre les deux plans. Ainsi la question proposée se trouve ramenée à celle du n° 505. Soient donc

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{et} \quad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

les équations des deux plans : celles des perpendiculaires issues de l'origine seront

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{A}{C}z \\ y=\frac{B}{C}z \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} x=\frac{A'}{C'}z \\ y=\frac{B'}{C'}z \end{array}\right\},$$

de sorte qu'on aura la formule cherchée en substituant $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{A'}{C'}$, $\frac{B'}{C'}$ au lieu de a, b, a', b' dans l'équation [6] du n° 505 ; donc en appelant V l'angle des deux plans on aura

$$\cos V = \pm \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \qquad [11].$$

523. Si les deux plans doivent se couper à angles droits, il faut et il suffit que la valeur de cos V soit nulle, et que l'on ait par conséquent

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

524. Si l'on veut que les deux plans soient parallèles, il faudra que la valeur absolue de cos V soit égale à l'unité, et

qu'en conséquence les deux termes de la formule [11] soient égaux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires. En exprimant cette condition, on trouvera facilement

$$(AB'-BA')^2+(AC'-CA')^2+(BC'-CB')^2=0.$$

Cette équation se décompose dans les trois suivantes

$$AB'-BA'=0,\quad AC'-CA'=0,\quad BC'-CB'=0,$$

desquelles on déduit

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

Ainsi, *pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que les coefficients des mêmes variables soient respectivement proportionnels dans leurs équations.*

On aurait trouvé directement cette condition en observant que, d'après un théorème connu de géométrie élémentaire, pour que deux plans soient parallèles il faut et il suffit que leurs traces sur deux plans donnés soient parallèles; or, les traces des deux plans sur zx et sur zy sont respectivement

$$Ax+Cz+D=0 \quad \text{et} \quad A'x+C'z+D'=0;$$
$$By+Cz+D=0 \quad \text{et} \quad B'y+C'z+D'=0:$$

donc les conditions de parallélisme des deux plans sont

$$\frac{A}{C}=\frac{A'}{C'} \quad \text{et} \quad \frac{B}{C}=\frac{B'}{C'};\quad \text{d'où} \quad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

525. Cherchons actuellement les angles qu'un plan fait avec les plans de projection, par exemple, celui qu'il fait avec xy. Comme l'équation de ce plan est $z=0$, il n'y aura qu'à faire $A'=0$ et $B'=0$ dans la formule [11], et en désignant cet angle par γ, il viendra

$$\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

On trouvera de même, pour déterminer les angles que ce plan fait respectivement avec les plans zx et zy,

$$\cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Les trois angles α, β et γ satisfont à la condition

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

526. Problème. *Déterminer la plus courte distance de deux droites données.*

On sait par la géométrie élémentaire que la plus courtè distance de deux droites est une perpendiculaire commune à toutes deux. Ainsi la question proposée se compose de deux parties: 1° trouver les équations de cette perpendiculaire; 2° calculer la longueur de cette droite. Nous allons nous en occuper successivement.

1° Soient

$$\left.\begin{array}{l} x=az+\alpha \\ y=bz+\beta \end{array}\right\} \quad [L] \qquad \text{et} \qquad \left.\begin{array}{l} x=a'z+\alpha' \\ y=b'z+\beta' \end{array}\right\} \quad [L']$$

les équations des deux droites données. Il est évident que si par la droite [L] on conduit un plan parallèle à [L'], et que par chacune de ces droites on fasse passer un plan perpendiculaire à ce plan auxiliaire, l'intersection de ces deux plans sera la perpendiculaire demandée. Or, l'équation générale du plan étant *

$$Ax+By+z+D=0 \qquad [a],$$

nous exprimerons qu'il contient la droite [L] et est parallèle à [L'], en écrivant qu'il est parallèle à toutes deux, et que sa trace sur xy passe par la trace de la première sur ce même plan coordonné. Nous trouverons ainsi

$$Aa+Bb+1=0, \quad Aa'+Bb'+1=0, \quad A\alpha+B\beta+D=0.$$

Ainsi notre premier plan auxiliaire est complétement déterminé.

On tire des deux premières de ces équations

$$A=\frac{b-b'}{ab'-ba'}, \quad B=-\frac{a-a'}{ab'-ba'}.$$

Soit

$$A'x+B'y+z+D'=0$$

l'équation du plan conduit par [L] perpendiculairement au plan [a] : nous aurons entre A', B' et D' les trois équations

$$A'a+B'b+1=0, \quad A'\alpha+B'\beta+D'=0, \quad AA'+BB'+1=0,$$

qui nous donneront facilement

$$A'=\frac{B-b}{Ab-Ba}=-\frac{a-a'+b(ab'-ba')}{b(b-b')+a(a-a')};$$

$$B'=-\frac{A-a}{Ab-Ba}=-\frac{b-b'-a(ab'-ba')}{b(b-b')+a(a-a')},$$

* Nous supposons, pour plus de simplicité, que le coefficient de z soit l'unité, ce qui est permis.

car il suffira, pour les obtenir, de remplacer, dans les valeurs trouvées pour A et B, a' et b' par A et B. Mais en retranchant de l'équation du plan, la seconde des équations de condition, afin d'éliminer D', on trouve

$$A'(x-\alpha)+B'(y-\beta)+z=0.$$

Nous aurons donc enfin, pour l'équation du plan mené par la droite [L] perpendiculairement au plan [a],

$$[a-a'+b(ab'-ba')](x-\alpha)+[b-b'-a(ab'-ba')](y-\beta)$$
$$-[b(b-b')+a(a-a')]z=0.$$

Une simple permutation des lettres a et a', b et b', α et α', β et β' donnera, pour l'équation du plan conduit par [L] perpendiculairement au plan [a],

$$[(a-a')+b'(ab'-ba')](x-\alpha')+[b-b'-a'(ab'-ba')](y-\beta')$$
$$-[b'(b-b')+a'(a-a')]z=0.$$

Telles sont les deux équations de la perpendiculaire commune aux deux droites.

2° Cherchons actuellement l'expression de la longueur de cette perpendiculaire. Pour y parvenir, je conçois par la droite [L'] un plan parallèle au plan [a] : son équation sera

$$Ax+By+z+D''=0 \qquad [b],$$

D'' étant déterminé par l'équation $A\alpha'+B\beta'+D''=0$. Il est évident que la distance de ces deux plans sera précisément la plus courte distance des deux droites [L] et [L']. Mais, si de l'origine on abaisse des perpendiculaires sur les plans [a] et [b], il est clair que la différence ou la somme de ces perpendiculaires mesurera l'intervalle compris entre ces plans, selon qu'ils seront situés d'un même côté ou de côtés différents de l'origine. Or, dans le premier cas, D et D'' seront de mêmes signes, et de signes contraires dans le second : si donc dans les formules

$$\delta=\pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+1}} \quad \text{et} \quad \delta'=\pm\frac{D''}{\sqrt{A^2+B^2+1}},$$

qui déterminent les longueurs de ces perpendiculaires, on prend D et D'' avec leurs signes, la différence de ces deux fractions exprimera dans tous les cas la distance des plans [a]

et $[b]$, et par conséquent celle des droites proposées, de sorte qu'en appelant Δ cette distance, on aura

$$\Delta = \pm \frac{D - D''}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}.$$

Mais des équations qui déterminent D et D'' on tire

$$D - D'' = -[A(\alpha - \alpha') + B(\beta - \beta')]$$
$$= \frac{(a - a')(\beta - \beta') - (b - b')(\alpha - \alpha')}{ab' - ba'}.$$

Donc enfin

$$\Delta = \pm \frac{(a - a')(\beta - \beta') - (b - b')(\alpha - \alpha')}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - ba')^2}}.$$

On aura soin de prendre le signe supérieur ou le signe inférieur dans cette formule, suivant que le numérateur sera positif ou négatif.

Si les deux droites se coupent, Δ est nul, et il faut par conséquent que l'on ait

$$(a - a')(\beta - \beta') - (b - b')(\alpha - \alpha') = 0.$$

C'est la condition même que nous avons trouvée précédemment (**501**).

Si les deux droites L et L' sont parallèles, la valeur de Δ se réduit à $\frac{0}{0}$, et c'est en effet ce qui doit être, car les plans dont cette quantité Δ représente la distance sont tout à fait indéterminés, puisque, par deux droites parallèles, on peut mener une infinité de systèmes de deux plans parallèles. Il faudrait, pour éviter l'indétermination, mener les deux plans $[a]$ et $[b]$ perpendiculairement à celui des deux droites L et L'; mais il sera plus simple de calculer la perpendiculaire abaissée sur la seconde de la trace de la première sur le plan des xy, et on trouvera ainsi (**520**)

$$\Delta = +\sqrt{\frac{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + [a(\beta' - \beta) - b(\alpha' - \alpha)]^2}{a^2 + b^2 + 1}}.$$

CHAPITRE XXV.

DE LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES DANS L'ESPACE.

527. Nous allons suivre ici la même marche que dans la géométrie plane, c'est-à-dire que nous supposerons d'abord que l'on déplace l'origine, en conservant aux axes leur direction, et ensuite que l'on change la direction des axes, sans déplacer l'origine.

Fig. 184 Supposons donc que les nouveaux axes des coordonnées soient parallèles aux premiers, et soient $X'x'$, $Y'y'$, $Z'z'$ ces nouveaux axes, et α, β, γ, les coordonnées de la nouvelle origine. On trouvera facilement, en considérant la figure 184, que les formules pour passer des anciens axes aux nouveaux sont

$$x=\alpha+x',\quad y=\beta+y',\quad z=\gamma+z'.$$

528. Cherchons maintenant les *formules pour passer*
Fig. 185 *d'un système de coordonnées obliques* OXYZ *à un autre système de coordonnées obliques* OX'Y'Z', *ayant la même origine*. J'élève par le point O des perpendiculaires OT, OS et OR aux plans respectifs des xy, des xz et des yz, et dirigées, par rapport à ces plans, du même côté que les axes des z, des y et des x positives. On pourra regarder ces droites comme des données de la question, et déterminer en conséquence les positions des demi-axes positifs OX', OY', OZ' par les trois angles que chacun d'eux fait avec ces perpendiculaires. Cela posé, soient x, y, z les anciennes coordonnées OQ, PQ et MP du point M, et x', y', z' les nouvelles coordonnées OQ', PQ' et MP' de ce point. Je projette les côtés du polygone OQPMP'Q'O sur OT, et, en vertu du lemme du n° 95, la projection de MP sur cette droite sera égale à la somme des projections des côtés MP', P'Q' et OQ', car les deux côtés OQ et QP étant situés dans un plan perpendiculaire à OT, leurs projections sur cette droite sont nulles.

Donc

$$\left.\begin{array}{l} z\cos(T,z)=x'\cos(T,x')+y'\cos(T,y')+z'\cos(T,z'); \\ \text{et par analogie,} \\ y\cos(S,y)=x'\cos(S,x')+y'\cos(S,y')+z'\cos(S,z'); \\ x\cos(R,x)=x'\cos(R,x')+y'\cos(R,y')+z'\cos(R,z') \end{array}\right\} [1].$$

La figure qui nous a conduits à ces formules suppose que les angles formés par chaque perpendiculaire avec les axes coordonnés sont aigus, et que les coordonnées du point M sont positives; mais, en reprenant les raisonnements du n° **96**, il sera facile de reconnaître que ces formules sont générales, pourvu qu'on ait égard aux signes des coordonnées et à ceux des cosinus qui y entrent. Ainsi, par exemple, si l'angle (x', T) était obtus, la projection de PM sur OT serait égale à la somme des projections de MP' et de PQ' diminuée de celle de Q'O, parce que le plan mené par Q' perpendiculairement à OT serait situé au-dessous de xy; mais aussi il faudrait multiplier x' par le cosinus du supplément de l'angle (T, x'), c'est-à-dire par $-\cos(T, x')$; de sorte que le premier terme de la valeur de $z\cos(T, z)$ serait encore $x'\cos(T, x')$.

Les trois formules que nous venons d'obtenir sont très-rarement employées à cause de leur complication.

529. Si les axes primitifs sont rectangulaires, les trois perpendiculaires OT, OS et OR coïncideront avec ces axes, de sorte que *les formules, pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques, seront*

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos(x',x)+y'\cos(y',x)+z'\cos(z',x)=ax'+by'+cz' \\ y=x'\cos(x',y)+y'\cos(y',y)+z'\cos(z',y)=a'x'+b'y'+c'z' \\ z=x'\cos(x',z)+y'\cos(y',z)+z'\cos(z',z)=a''x'+b''y'+c''z' \end{array}\right\} [2].$$

Mais comme les axes primitifs sont rectangulaires, les angles que les nouveaux axes forment avec eux sont assujettis aux trois conditions suivantes (**508**) :

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\quad b^2+b'^2+b''^2=1,\quad c^2+c'^2+c''^2=1 \quad [3],$$

de sorte que des neuf constantes qui entrent dans les formules [2], il n'y en a que *six* qui soient arbitraires.

530. Si les nouveaux axes sont aussi rectangulaires, on devra avoir

$$\cos(x', y')=0, \quad \cos(x', z')=0, \quad \cos(y', z')=0,$$

et par conséquent, en vertu de la formule [9] du n° **509**,

$$ab+a'b'+a''b''=0, \; ac+a'c'+a''c''=0, \; bc+b'c'+b''c''=0 \quad [4].$$

Il faudra donc *employer encore les formules* [2] *pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées rectangulaires;* mais il faudra y joindre les équations de condition [3] et [4]; de sorte qu'il n'y aura plus que *trois* constantes dont on puisse disposer arbitrairement.

531. Si on veut revenir des nouveaux axes rectangulaires aux anciens, il faudra résoudre les équations [2] par rapport à x', y' et z'; ce qui sera très-facile, car pour obtenir x', par exemple, il suffira de multiplier ces équations respectivement par a, a', a'', et d'additionner les équations-produits, puisqu'en vertu des équations [3] le coefficient de x' se réduira à l'unité, et que ceux de y' et de z' deviendront nuls à cause des équations [4]. On calculera de même y' et z', et on trouvera

$$\left.\begin{aligned} x'&=ax+a'y+a''z\\ y'&=bx+b'y+b''z\\ z'&=cx+c'y+c''z \end{aligned}\right\} \quad [5],$$

en y joignant les six conditions [3] et [4].

532. Mais si l'on observe que a, b, c sont les cosinus des angles que l'axe des x fait avec les axes respectifs des x', des y' et des z', on devra encore avoir $a^2+b^2+c^2=1$; donc aussi $a'^2+b'^2+c'^2=1$ et $a''^2+b''^2+c''^2=1$. D'un autre côté, les angles (x, y), (x, z) et (y, z) sont droits; donc leurs cosinus sont nuls, ainsi on a encore (**509**) entre les neuf constantes a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', les six équations

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=1\\ a'^2+b'^2+c'^2&=1\\ a''^2+b''^2+c''^2&=1 \end{aligned}\right\} [6]; \quad \left.\begin{aligned} aa'+bb'+cc'&=0\\ aa''+bb''+cc''&=0\\ a'a''+b'b''+c'c''&=0 \end{aligned}\right\} [7].$$

Ainsi il semblerait que l'on a douze équations entre ces constantes, de sorte qu'elles seraient plus que déterminées. Or, je dis que les équations [6] et [7] sont des conséquences né-

cessaires de [3] et de [4]. En effet, si on carre les équations [5] et qu'on les ajoute, on trouvera

$$x^2+y^2+z^2=\left.\begin{array}{l}a^2\\+b^2\\+c^2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}a'^2\\+b'^2\\+c'^2\end{array}\right|y^2+\left.\begin{array}{l}a''^2\\+b''^2\\+c''^2\end{array}\right|z^2+\left.\begin{array}{l}aa'\\+bb'\\+cc'\end{array}\right|2xy+\left.\begin{array}{l}aa''\\+bb''\\+cc''\end{array}\right|2xz+\left.\begin{array}{l}a'a''\\+b'b''\\+c'c''\end{array}\right|2yz,$$

car $x'^2+y'^2+z'^2=x^2+y^2+z^2$, puisque les deux systèmes sont rectangulaires, ce qui est exprimé par les équations [3] et [4]. Or cette équation est vraie, quelles que soient les valeurs de x, de y et de z; donc les coefficients qu'ont ces variables sont identiques; donc on en déduit [6] et [7].

Remarquons que cette démonstration n'exige même pas que a, b, c, a', etc., soient des cosinus, parce que si les équations [3] et [4] sont supposées vraies, en faisant la somme des carrés des équations [2] que l'on peut toujours poser, en y regardant x, y, z, x', y', z' comme des variables auxiliaires, on en tire $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$, et c'est la vérité de cette équation qui sert de base à notre démonstration.

533. Pour obtenir des formules propres à passer d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires, il n'y aurait qu'à tirer des formules [2] les valeurs de x', y', z' en fonction de x, y, z; mais ces formules seraient très-compliquées, et il est bien rare qu'on soit obligé d'y avoir recours.

534. Si l'on doit changer à la fois l'origine et la direction des axes, il n'y aura qu'à ajouter aux seconds membres des équations [1] ou [2] les coordonnées respectives α, β et γ de la nouvelle origine, en n'oubliant pas les équations de condition qui doivent les accompagner.

535. Il ne nous reste plus qu'*à chercher les formules nécessaires pour rapporter à deux axes rectangulaires tracés dans son plan la courbe qui résulte de l'intersection d'une surface par un plan.*

Nous fixerons la position de ce plan en nous donnant un de ses points (α, β, γ), celui que l'on prendra pour origine des nouveaux axes (a, b, c), l'angle φ que sa trace sur xy fait avec l'axe des x, et son inclinaison θ sur le plan xy. Mais, pour plus de simplicité, nous supposerons d'abord que le plan sécant passe par l'origine. Cela posé, prenons sa trace OX' sur xy pour l'axe des abscisses, et pour axe des ordon- Fig. 186

nées une perpendiculaire OY' tirée par l'origine sur OX' et au-dessus du plan xy. Soient M un point quelconque du plan sécant, x, y, z ses trois coordonnées OQ, PQ et MP. J'abaisse du point P la droite PQ' perpendiculairement sur OX', et je joins MQ'; cette droite sera perpendiculaire sur OX', de sorte que OQ' et MQ' seront les deux nouvelles coordonnées x' et y' du point M, et que l'angle MQ'P mesurera l'inclinaison θ du plan sécant sur xy. Nous tirerons d'abord du triangle rectangle MPQ'.

$$z = y' \sin\theta, \quad PQ' = y'' = y' \cos\theta.$$

Puis, en regardant le point P comme rapporté tour à tour aux systèmes de coordonnées rectangulaires XOY et $X'OY''$, on aura, d'après les formules qui servent à passer, sur un plan, d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées rectangulaires (99),

$$x = x' \cos\varphi + y'' \sin\varphi = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi \cos\theta,$$
$$y = x' \sin\varphi - y'' \cos\varphi = x' \sin\varphi - y' \cos\varphi \cos\theta$$

(observez que si les nouvelles ordonnées positives étaient comptées dans le sens du prolongement de $Y''O$, il aurait suffi de faire $\alpha = \varphi$ dans les formules du n° 99, mais que comme elles le sont sur OY'', on a dû faire en outre $y' = -y''$); donc enfin

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + x' \cos\varphi + y' \sin\varphi \cos\theta \\ y &= \beta + x' \sin\varphi - y' \cos\varphi \cos\theta \\ z &= \gamma + y' \sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad [8].$$

Ainsi, en substituant ces valeurs de x, y, z dans l'équation d'une surface, l'équation résultante sera celle de la courbe d'intersection rapportée à des axes rectangulaires tracés dans son plan.

Si le plan sécant était donné par son équation, il faudrait commencer par calculer les angles φ et θ, ce qui serait facile; car, si

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est l'équation du plan, en faisant $z = 0$, on aura pour celle de sa trace sur xy,

$$Ax + By + D = 0, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\varphi = -\frac{A}{B},$$

et, par les formules du nº **525**,

$$\cos\theta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

536. Si le plan sécant était perpendiculaire au plan xy, l'angle θ serait droit, et les formules [8] deviendraient en conséquence

$$x=\alpha+x'\cos\varphi, \quad y=\beta+x'\sin\varphi, \quad z=\gamma+y' \quad [9].$$

537. Il suit des formules [8] que l'intersection d'une surface par un plan est au plus d'un degré marqué par celui de la surface. C'est au reste ce que l'on pourrait conclure immédiatement des formules [1] ou [2]; car si l'on prend le plan sécant pour l'un des plans coordonnés, pour celui des xy, par exemple, il suffira, pour avoir l'équation de l'intersection de cette surface par ce plan, de faire $z=0$ dans son équation rapportée aux nouveaux axes, et cette équation est toujours du même degré que l'équation proposée (**102**).

538. On peut, à l'aide des formules [8], *reconnaître si une courbe donnée par ses équations* $\pi(x, z)=0$ *et* $\psi(y, z)=0$ *est plane*. En effet, si l'on désigne par φ l'angle que fait avec l'axe des x la trace d'un plan sur xy, par γ l'ordonnée du point où il coupe l'axe des z, et par θ l'inclinaison de ce plan sur xy, il n'y aura qu'à substituer les formules

$$x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi\cos\theta, \quad y=x'\sin\varphi-y'\cos\varphi\cos\theta,$$
$$z=\gamma+y'\sin\theta,$$

dans les équations $\pi(x, z)=0$ et $\psi(x, z)=0$, et on aura deux équations $\pi_1(x', y')=0$ et $\psi_1(x', y')=0$ qui représenteront les intersections de ces deux surfaces par le plan que déterminent les quantités φ, θ et γ; or si la courbe dont $\pi(x, \varepsilon)=0$ et $\psi(x, \varepsilon)=0$ sont les équations de plans, on pourra prendre son plan pour celui des $x'y'$, de sorte qu'on devra pouvoir identifier ces deux équations $\pi_1(x', y')=0$ et $\psi_1(x', y')=0$ par des valeurs réelles de ces trois quantités. Si donc l'identification est impossible, on devra conclure que la courbe n'est point plane.

539. Les formules [2], qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées rectangulaires, semblent fort simples; mais cette simplicité n'est qu'apparente, car elles doivent toujours être

accompagnées des *six* équations de condition [3] et [4], à moins que l'on ne veuille tirer de ces équations les valeurs de six des *neuf* quantités a, b, c, a',..... qu'elles renferment, en fonction des *trois* autres, et substituer ces valeurs dans les équations [2], ce qui rendrait ces dernières formules tout à fait inapplicables, à cause de leur complication. Ces considérations ont engagé Euler à chercher à exprimer les neuf constantes a, b, c, a'... en fonction de trois angles, dont la connaissance suffit pour fixer la position du nouveau système par rapport à l'ancien. Ces angles sont ceux ψ et φ que la
Fig. 187 trace OX'' du plan $x'y'$ sur xy fait avec les axes des x et des x' et l'inclinaison θ du plan $x'y'$ sur xy. Ces angles étant connus, on tirera par le point O une droite OX'' qui fasse avec OX l'angle ψ; on mènera par cette droite un plan qui, dirigé au-dessous de xy, fasse avec lui l'angle θ; on tracera dans ce plan deux droites OX' et OY' qui soient inclinées de φ et de $(90°+\varphi)$ sur OX'', et enfin on élèvera à ce même plan et dans le sens OZ une perpendiculaire OZ'. Voyons donc comment on pourra exprimer les anciennes coordonnées (x, y, z) d'un point quelconque en fonction des nouvelles coordonnées (x', y', z') de ce point et des trois angles ψ, φ et θ. Soient OY'' et OY''' les traces respectives des plans xy et $x'y'$ sur le plan ZOZ'. Nous aurons ainsi deux systèmes de coordonnées rectangulaires

XOY	et	$X''OY''$	dans le plan xy,
$X'OY'$	et	$X''OY'''$	. . . . . . $x'y'$,
ZOY''	et	$Z'OY'''$	. . . . . . zz';

car OX'' étant perpendiculaire au plan ZOZ', l'est par conséquent à toutes les droites tirées par le point O dans ce plan. On pourra donc supposer que l'on passe successivement du système XOY au système $X''OY''$, de $X''OY'''$ à $X'OY'$, et enfin de ZOY'' à $Z'OY'''$; on effectuera ces transformations au moyen des formules

$$\left.\begin{aligned} x &= x''\cos\psi - y''\sin\psi \\ y &= x''\sin\psi + y''\cos\psi \end{aligned}\right\},$$
$$\left.\begin{aligned} x'' &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y''' &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}\right\},$$
$$\left.\begin{aligned} y'' &= y'''\cos\theta + z'\sin\theta \\ z &= -y'''\sin\theta + z'\cos\theta \end{aligned}\right\}.$$

Ces formules s'obtiennent en faisant $\alpha = \psi$, $\alpha = \varphi$ et $\alpha = 360° - \theta$, dans les formules du n° **99**. En substituant la valeur de y''' dans celles de y'' et de z, puis celles de x'' et de y'' dans les valeurs de x et de y, on trouvera les formules suivantes auxquelles EULER est parvenu, mais plus longuement que nous ne venons de le faire, à l'aide du principe fondamental de la Trigonométrie sphérique (*Trigonométrie*, **82**) :

$$\left.\begin{aligned}
x = {} & x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\
& - y'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) \\
& - z'\sin\psi\sin\theta; \\
y = {} & x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) \\
& - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) \\
& + z'\cos\psi\sin\theta; \\
z = {} & - x'\sin\varphi\sin\theta - y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta
\end{aligned}\right\} [10].$$

540. Si on veut *passer d'un système de coordonnées rectangulaires au système de coordonnées polaires que nous avons fait connaître* au n° **486**, on considérera que les triangles rectangles MOP et POA donnent

$$z = \rho\cos\theta, \quad OP = \rho\sin\theta, \quad x = OP\cos\omega, \quad y = OP\sin\omega,$$

et, par suite, en déplaçant l'origine,

$$x = \alpha + \rho\sin\theta\cos\omega, \quad y = \beta + \rho\sin\theta\sin\omega, \quad z = \gamma + \rho\cos\theta.$$

CHAPITRE XXVI.

RECHERCHE DE L'ÉQUATION D'UNE SURFACE D'APRÈS SA GÉNÉRATION.

541. La méthode que nous avons suivie pour obtenir l'équation du plan (**511**) est générale et s'applique très-bien à la recherche de l'équation d'une surface dont la génération est connue. Toutefois, nous ne nous proposons pas ici de traiter cette question dans toute sa généralité, nous n'avons pour but que de chercher les équations des surfaces les plus usuelles.

SURFACES CYLINDRIQUES. *Une pareille surface est engendrée par le mouvement d'une ligne droite assujettie à glisser sur une directrice fixe en restant parallèle à une direction donnée.* Soient

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0 \qquad [1]$$

les équations de la directrice; celles de la génératrice seront de la forme

$$x=mz+\alpha, \quad y=nz+\beta \qquad [2],$$

m et n étant deux constantes données. Puisque cette droite doit rencontrer cette courbe, leurs équations devront être vérifiées par un même système de valeurs de x, y, z, et par conséquent il faudra qu'en éliminant ces trois variables entre les équations [1] et [2], l'équation finale

$$F(\alpha, \beta)=0 \qquad [3]$$

soit vérifiée par toutes les valeurs que recevront les indéterminées α et β dans les différentes positions que prendra la génératrice. Si donc on assigne une valeur arbitraire à α, et que l'on calcule la valeur correspondante de β, au moyen de l'équation [3], on n'aura qu'à substituer ces valeurs dans les équations [2], et la position de la génératrice correspondante à ce couple de valeurs de α et de β sera complétement déterminée. Or, si on élimine α et β entre les équations [2] et [3], l'équation finale

$$F(x-mz, y-nz)=0 \qquad [4]$$

sera vérifiée par tous les systèmes de valeurs de x, y, z, qui, conjointement avec certains couples de valeurs de α et de β, peuvent satisfaire aux équations [2] et [3], c'est-à-dire qu'elle le sera par les coordonnées de tous les points de la génératrice dans toutes les positions qu'elle peut prendre; ce sera donc l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice dans les différentes positions qu'elle peut occuper; donc ce sera l'équation de la surface cylindrique engendrée par cette droite.

Exemple. *Quelle est l'équation de la surface cylindrique dont la trace sur* xy *a pour équation sur ce plan* $y^2-x^2+1=0$, *et dont l'axe a pour équations* $x=z$ *et* $y=-z$?

Les équations [1] et [2] deviennent respectivement

$$\left.\begin{matrix} y^2-x^2+1=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\}, \quad \text{et} \quad \left.\begin{matrix} x=z+\alpha \\ y=-z+\beta \end{matrix}\right\}.$$

On trouvera alors que l'équation [3] est

$$\beta^2-\alpha^2+1=0,$$

de sorte que la surface cylindrique a pour équation

$$(y+z)^2-(x-z)^2+1=0, \text{ ou } y^2-x^2+2zy+2zx+1=0.$$

542. Il est important de remarquer que l'équation [3] pouvant toujours être regardée, quelle que soit la forme de la fonction F, comme provenant de l'élimination de x, y, z entre les équations [2] et celles d'une certaine courbe, on peut regarder cette fonction comme tout à fait *arbitraire*, de sorte que toute équation composée, comme on voudra, des binômes $(x-mz)$ et $(y-nz)$ représentera toujours une surface cylindrique. L'équation [4] est donc le type d'une pareille surface.

On suppose ordinairement l'équation [4] résolue par rapport à $(y-nz)$, et elle prend ainsi la forme

$$y-nz=f(x-mz) \qquad [5].$$

543. On déduit de ces remarques le moyen de *reconnaître si une surface dont on donne l'équation* $\pi(x, y, z)=0$ *est cylindrique ou non*. Si l'on pose, en effet, $x-mz=u$ et

$x-nz=v$, cette équation deviendra $\pi(u+mz, v+nz, z)=0$, et l'équation [4] se réduira en même temps à $F(u, v)=0$; si donc la surface que l'on considère est cylindrique, auquel cas l'équation [4] doit pouvoir s'identifier avec la sienne, il faut et il suffit que l'on puisse assigner à m et à n des valeurs telles que la fonction $\pi(u+mz, v+nz, z)$ devienne indépendante de z, et cela quelles que soient les valeurs de u et de v. On égalera donc à zéro les coefficients des diverses puissances de z; et si l'on peut vérifier ces équations par un couple de valeurs réelles de m et de n, on en conclura que la surface est cylindrique, sinon elle ne le sera pas.

Exemple. *La surface* $y^2-x^2+2zx+2zy+1=0$ *est-elle cylindrique?* On trouvera

$$(v^2-u^2+1)+2[(1-m)u+(1+n)v]z$$
$$+(n^2-m^2+2m+2n)z^2=0;$$

par suite

$$1-m=0,\quad 1+n=0,\quad n^2-m^2+2m+2n=0,$$

équations qui sont vérifiées par $m=1$ et $n=-1$. La surface proposée est donc une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à la droite $\left.\begin{matrix}x=z\\ y=-z\end{matrix}\right\}$ et dont la trace sur xy est l'hyperbole équilatère $y^2-x^2+1=0$, ce qui s'accorde avec l'exemple du n° **541**.

544. Surfaces coniques. *Ces surfaces sont engendrees par une droite qui glisse sur une directrice donnée en tournant autour d'un point fixe.*

Soient (a, b, c) les coordonnées de ce point, les équations de la génératrice seront

$$x-a=\alpha(z-c),\quad y-b=\beta(z-c)\quad [6];$$

de sorte que, si

$$\varphi(x, y, z)=0,\quad \psi(x, y, z)=0\qquad [1]$$

sont les équations de la directrice, on formera l'équation de condition qui exprimera que la génératrice glisse sur cette courbe en éliminant x, y, z entre les équations [1] et [6]. Désignons cette équation par

$$F(\alpha, \beta)=0\qquad [3],$$

et nous verrons, en raisonnant comme au nº **541**, que l'élimination de α et de β entre les équations [1] et [3] fournira l'équation demandée, qui sera ainsi

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0 \qquad [7],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{y-b}{z-c}=f\left(\frac{x-a}{z-c}\right) \qquad [8].$$

Si on regarde la caractéristique f comme indiquant une fonction arbitraire, l'équation [8] sera le type des surfaces coniques.

545. Si l'on suppose que le centre de la surface conique soit placé à l'origine des coordonnées, a, b, c seront nuls, et l'équation [8] se réduira à

$$\frac{y}{z}=f\left(\frac{x}{z}\right) \qquad [9].$$

Ainsi *l'équation de toute surface conique est homogène, quand l'origine des coordonnées est placée au centre de cette surface.*

La réciproque est vraie, car si l'on coupe une surface dont l'équation est une fonction homogène des trois variables x, y, z par un plan

$$z=ax+by$$

mené par l'origine des coordonnées, l'équation de la projection de l'intersection sur le plan des xy, par exemple, sera une équation homogène en x et en y, et représentera par conséquent un système de lignes droites (**57**); de sorte que tout plan mené par l'origine coupera la surface suivant un système de lignes droites; donc cette surface est conique.

Cette conséquence résulte encore de la méthode donnée au nº **543**, car si l'on fait $\frac{x}{z}=u$ et $\frac{y}{z}=v$ dans l'équation homogène, elle deviendra indépendante de z.

546. Il suit de là que, pour reconnaître si une surface dont l'équation est donnée appartient à la *famille* des surfaces coniques, il n'y aura qu'à déplacer l'origine, et à égaler à zéro les coefficients de tous les termes dont le degré sera inférieur à celui de l'équation transformée, ce qui la rendra

homogène. Si on peut tirer des équations de condition des valeurs réelles et finies pour α, β, γ (527), on en conclura que la surface est conique, sinon elle ne le sera pas.

Fig. 188 **547**. Surfaces de révolution. *Une pareille surface est engendrée par le mouvement d'une courbe quelconque* CD *qui tourne autour d'un axe fixe* AB. Il suit de cette définition que toute section faite dans une surface de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe est une circonférence de cercle dont le centre est au point où ce plan coupe cet axe. D'après cela, *on pourra regarder toute surface comme engendrée par la circonférence* MM' *d'un cercle dont le centre* O *décrit une droite donnée* AB, *tandis que son plan reste perpendiculaire à cet axe, et que sa circonférence glisse sur une courbe fixe* CD. C'est en considérant les surfaces de révolution sous ce dernier point de vue que l'on forme leurs équations.

Soient donc

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0 \qquad [1]$$

les équations de la *directrice* fixe CD, et (a, b, c) les coordonnées d'un point quelconque de l'axe AB : ses équations seront

$$x - a = m(z - c), \quad y - b = n(z - c),$$

m et n étant deux constantes connues. Nous déterminerons la circonférence génératrice, en la considérant comme l'intersection d'une sphère décrite du point (a, b, c) comme centre, par un plan perpendiculaire à AB, de sorte que ses équations seront de la forme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \alpha^2, \quad mx + ny + z = \beta \quad [10].$$

On exprimera que cette circonférence glisse sur la courbe CD en éliminant x, y, z entre les équations [1] et [10], ce qui conduira à une équation de condition de la forme

$$F(\alpha^2, \beta) = 0,$$

de sorte que l'on obtiendra l'équation de la surface de révolution en éliminant α^2 et β entre cette équation et les équations [10]. On trouvera de cette manière

$$F[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \quad mx + ny + z] = 0 \quad [11],$$

ou, ce qui revient au même,

$$mx+ny+z=f[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2] \quad [12].$$

Tel est donc le type des surfaces de révolution, si l'on regarde f comme la caractéristique d'une fonction arbitraire.

548. Si l'on suppose que l'axe de révolution soit précisément l'axe des z, on pourra prendre l'origine pour le centre de la sphère, et l'équation [12] se réduira ainsi à

$$z=f(x^2+y^2+z^2),$$

ou bien à

$$z=f_1(x^2+y^2),$$

en la résolvant par rapport à z. Au reste, on serait arrivé immédiatement à cette équation, si on avait regardé la circonférence mobile comme provenant de l'intersection d'un cylindre circulaire droit par un plan perpendiculaire à l'axe des z, de sorte que les équations [10] eussent été remplacées par les suivantes :

$$x^2+y^2=\alpha^2, \quad z=\beta \qquad [13].$$

Exemple. *Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite mobile tournant autour d'une droite fixe à laquelle elle est invariablement attachée.*

Je prendrai l'axe de révolution pour axe des z, et je dirigerai l'axe des x suivant la perpendiculaire aux deux droites données. De cette manière, la seconde droite mobile, qui va servir de directrice à la circonférence mobile, sera parallèle au plan des zy; de sorte que, si on appelle a cette perpendiculaire, les équations de cette directrice seront

$$x=a, \quad y=nz;$$

les équations de la circonférence mobile seront les équations [13], et on en tirera facilement l'équation de condition

$$a^2+n^2\beta^2=\alpha^2.$$

et par suite

$$x^2+y^2-n^2z^2=a^2.$$

Telle est l'équation du lieu. Si on y fait $y=0$, elle se réduit à

$$x^2-n^2z^2=a^2,$$

équation d'une hyperbole dont l'axe transverse, dirigé suivant celui des x, a pour longueur $2a$. Ainsi, notre surface

peut être regardée comme engendrée par le mouvement de cette hyperbole qui tourne autour de son axe non transverse.

549. SURFACES CONOÏDES. *On appelle ainsi une surface engendrée par une ligne droite assujettie à rester parallèle à un plan donné, en glissant sur une droite et sur une courbe fixes.* Supposons, pour plus de simplicité, que l'on ait pris la droite fixe pour axe des z et le *plan directeur* pour plan des xy. De cette manière, les équations de la génératrice seront de la forme

$$z = \alpha, \quad y = \beta x.$$

Soient $$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0 \qquad [1]$$

les équations de la seconde directrice, on obtiendra l'équation de condition

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

qui exprime que la génératrice s'appuie sur cette courbe, en éliminant x, y, z entre ces quatre équations, et on en déduira

$$F\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad z = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad [14].$$

Telle est l'équation de la surface demandée.

Il est bon de remarquer que cette équation est homogène relativement aux deux variables x et y.

EXEMPLE. *Les deux directrices sont des lignes droites.* On prendra toujours le plan directeur pour celui des xy; on dirigera l'axe des x par les traces des deux directrices sur ce plan; on prendra pour plan des zy un plan mené à égales distances de ces traces parallèlement à ces deux droites, et on dirigera l'axe des z de manière qu'il fasse des angles égaux avec les directrices, et on trouvera pour l'équation du conoïde

$$axz = by.$$

550. APPLICATIONS. I. *Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie constamment sur trois droites fixes non parallèles à un plan unique et dont deux quelconques ne se trouvent pas dans un même plan.*

II. *Trouver l'équation de la surface engendrée par une ligne droite assujettie à couper en parties proportionnelles*

deux côtes opposés d'un quadrilatère gauche. — Si on faisait mouvoir une ligne droite de la même manière sur les deux autres côtés opposés du quadrilatère, obtiendrait-on une surface différente?

III. *Trouver l'équation de la surface engendrée par une parabole tournant autour de son axe, et déterminer la position que cet axe doit avoir pour que, si l'on projette sur un plan donné l'intersection de la surface par tout plan qui ne sera pas perpendiculaire à celui-ci, la projection soit un cercle.*

IV. *Trouver la surface engendrée par l'arête d'un angle dièdre droit dont les deux faces sont assujetties à passer constamment par deux droites données.*

V. *Démontrer qu'un plan quelconque perpendiculaire à un rayon donné d'une sphère coupe suivant un cercle tout cône qui a pour sommet l'extrémité de ce rayon et pour base un petit cercle de la sphère.*

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

TRIGONOMÉTRIE.

Numéros des articles.

Objet de la trigonométrie, définitions des lignes trigonométriques.. 1-10
Relations entre les lignes trigonométriques de deux arcs égaux et de signes contraires........................ 12
Marche des lignes trigonométriques d'un arc qui croît indéfiniment.. 13, 25
Formules de tous les arcs qui répondent à un sinus ou à un cosinus donné.. 14, 16
Relations entre les lignes trigonométriques de deux arcs qui diffèrent d'un multiple quelconque de la demi-circonférence.. 15, 17, 18, 23
Ramener le sinus ou le cosinus d'un arc quelconque au sinus ou au cosinus d'un arc moindre qu'un quadrans... 20
Relations des lignes trigonométriques entre elles......... 21, 22
Revenir d'une formule calculée dans l'hypothèse du rayon égal à l'unité à celle où ce rayon serait un nombre quelconque.. 27
Formules pour l'addition et la soustraction des arcs...... 29, 48
Formules pour la multiplication des arcs............... 32, 46, 49
Formules pour la division des arcs..... 33, 39, 40, 41, 44, 46, 50, 51
Transformer en un produit la somme ou la différence des premières ou des secondes puissances de deux sinus ou de deux cosinus.. 34, 35, 36
Construction des tables trigonométriques............... 53
Formules pour la résolution des triangles rectilignes...... 54-65
Résolution des triangles rectilignes................... 66-75
Mesure de l'aire d'un triangle........................ 76
Formules pour la résolution des triangles sphériques..... 82-93
Résolution des triangles sphériques................... 94-106
Applications *théoriques* de la trigonométrie............. 52, 77
Applications *pratiques* de la trigonométrie.......... 78-81, 107, 108

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Numéros des articles.

Objet général de la géométrie analytique................ 2, 43
Théorème de l'homogénéité........................... 4, 5, 6
Construction des expressions algébriques.............. 7-29
Condition pour qu'un problème de géométrie puisse être résolu avec la règle et le compas.................. 30
Règle pour mettre en équation un problème de géométrie. 31
Résolution de plusieurs problèmes.................... 32-41
Problèmes déterminés à résoudre...................... 42
Théorie des coordonnées.............................. 44-47
Ce que c'est que l'équation d'une ligne................ 48
Une équation à deux ou à une variable représente en général une ligne. — Exception..................... 49, 53, 54, 60
Classification des courbes. — Exception................ 56, 57
Trouver, par le calcul ou par la géométrie, les coordonnées des points d'intersection des lieux de deux équations... 62, 64
Règle pour trouver l'équation d'un lieu géométrique..... 65
Expression de la distance de deux points............... 66, 67
Équations et propriétés du cercle............ 68-72, 130-133, 151, 152, 153, 156, 157
Équation de la ligne droite........................... 73-77
Équation des trois courbes du second ordre............ 78
Équation de la cissoïde. — Sa description mécanique..... 80, 81
Sur les solutions étrangères.......................... 82, 83
Construction des racines d'une équation................ 85-89
Trisection de l'arc.................................. 90
Théorie de la transformation des coordonnées.. 91-103, 105, 106, 107
Deux équations données représentent-elles une même ligne? 104, 483
Théorie de la ligne droite............................ 108-129
Théorie des transversales............................ 131-138
Problèmes à résoudre................................. 139
Tangente à une courbe algébrique...................... 140-148
Tangente commune à deux courbes................. 150, 151, 152
Conditions de contact de deux courbes................. 154, 155
Tangente à une courbe rapportée à des coordonnées polaires.. 158-163
Asymptotes d'une courbe algébrique quelconque......... 164-170

Numéros des articles.
Asymptotes des courbes du second ordre............. 171-174, 303
Asymptotes d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires.. 175, 176
Théorie du centre.. 177-183
Recherche des lignes diamétrales d'une courbe.......... 185, 186
Recherche des diamètres rectilignes d'une courbe........ 195, 196
Équation et propriétés générales des diamètres des lignes du second ordre..................................... 188-194

COURBES DU SECOND ORDRE.

Division des lignes du second ordre en trois genres...... 197-200
Construction des ellipses.............................. 201, 202, 203
Caractères analytiques de l'ellipse.................... 204
Constructions des hyperboles.................. 205, 206, 207, 209
Caractères analytiques de l'hyperbole................. 208
Construction des paraboles.......................... 211, 212, 214
Caractères analytiques de la parabole................. 213
Équations du second degré à discuter................. 216
Réduction de l'équation générale du second degré à la forme la plus simple possible.............................. 218-237
L'ellipse et l'hyperbole ont une infinité de systèmes de diamètres conjugués et un seul qui soit rectangulaire.... 219, 220, 221
La parabole a une infinité de diamètres et un seul axe. — Ses diamètres sont tous parallèles..................... 233, 234

DE L'ELLIPSE.

Construction de l'ellipse par points.................. 238, 240
Cordes supplémentaires................................ 243-248
Diamètres conjugués................................... 249-256
Théorèmes d'Apollonius................................ 227
Théorie générale des foyers........................... 257-262
Des foyers et des directrices. — Définition géométrique de l'ellipse.. 263-271
Inclinaison des rayons vecteurs sur la tangente.......... 272
Tangentes.. 275-286
Normales... 287-294

Numéros des articles.

Étant donnés deux diamètres conjugués de grandeur et de position, construire les axes........................ 295
Aire de l'ellipse et de ses parties........................ 296, 297
Problèmes sur l'ellipse........................ 298-301
Équation polaire de l'ellipse........................ 388

DE L'HYPERBOLE.

Construction de l'hyperbole par points........................ 302
Cordes supplémentaires........................ 307-310
Diamètres conjugués........................ 311-315
Des foyers et des directrices. — Définition géométrique de l'hyperbole........................ 316-323
Inclinaison du diamètre et du rayon vecteur sur la tangente. 324, 325
Tangentes........................ 326-335, 341-344
Normales........................ 336
Propriétés asymptotiques de l'hyperbole........ 337, 338, 339, 346
Étant donnés deux diamètres conjugués de grandeur et de position, construire les axes........................ 340
Aire de l'hyperbole et de ses parties........................ 347, 348, 349
Problèmes sur l'hyperbole........................ 350, 351
Équation polaire de l'hyperbole........................ 389, 390

DE LA PARABOLE.

Construction de la parabole par points........................ 353
La parabole est la limite de l'ellipse et de l'hyperbole.... 354
Du foyer et de la directrice. — Définition géométrique de la parabole........................ 355-360
Inclinaison du diamètre et du rayon vecteur sur la tangente. 361, 362
Tangentes........................ 366-375
Normales........................ 376-384
Aire d'un segment parabolique........................ 385
Problèmes sur la parabole et sur les autres courbes du second ordre........................ 386
Équation polaire de la parabole........................ 391

PROPRIÉTÉS DES COURBES DU SECOND ORDRE.

Du pôle et de la polaire........................ 393-408

Numéros des articles.

Nombre de points nécessaires à la détermination d'une courbe.. 409
Équation d'une courbe du second ordre assujettie à passer par cinq points.. 410
Théorèmes de Pascal et de M. Brianchon.............. 411-416
Propriétés des pentagones, des quadrilatères, et des triangles inscrits et circonscrits aux courbes du second ordre. — Théorèmes de M. Poncelet.................... 418-428, 430
Faire passer une parabole par quatre points............ 429
Identité des courbes du second ordre et des sections coniques.. 431-434

DES COURBES EN GÉNÉRAL.

Concavité et convexité des courbes.................... 435-438
Points *maximums* et *minimums*...................... 439-443
Maximums et *minimums* des fonctions algébriques...... 444-448
Points d'inflexion............................ 450, 451, 452
Points multiples................................ 453, 454
Points de rebroussement........................ 455, 456
Points conjugués................................ 457, 458
Points d'arrêt.................................. 459
Points saillants................................ 461
Les courbes algébriques n'ont ni points d'arrêt ni points saillants.. 460, 462
Méthode pour discuter l'équation d'une courbe........ 463, 464, 465
Exemples de discussion de courbes.................... 466-471
Exemples de lieux géométriques à chercher............. 472
De la similitude des courbes en général................ 473, 474
De la similitude des courbes du second ordre........... 475-482

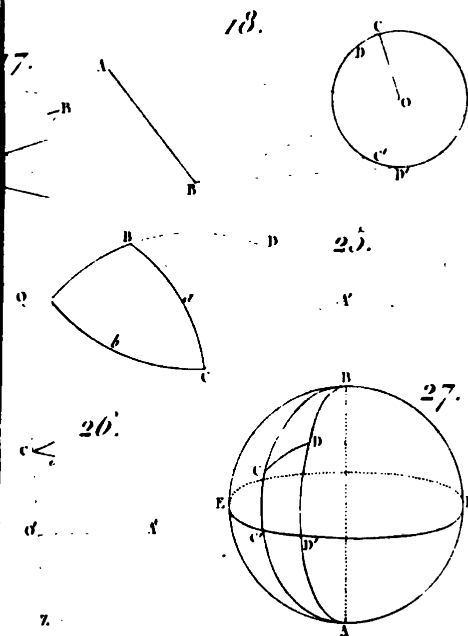
GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

Théorie des coordonnées dans l'espace................ 484, 485, 486
Interprétation géométrique d'une équation à trois, à deux ou à une variable.. 487-492
Réprésentation analytique d'une ligne située dans l'espace. — Comment obtenir les équations de ses projections sur les plans coordonnés.. 493-499
Problèmes sur la ligne droite........................ 500-510

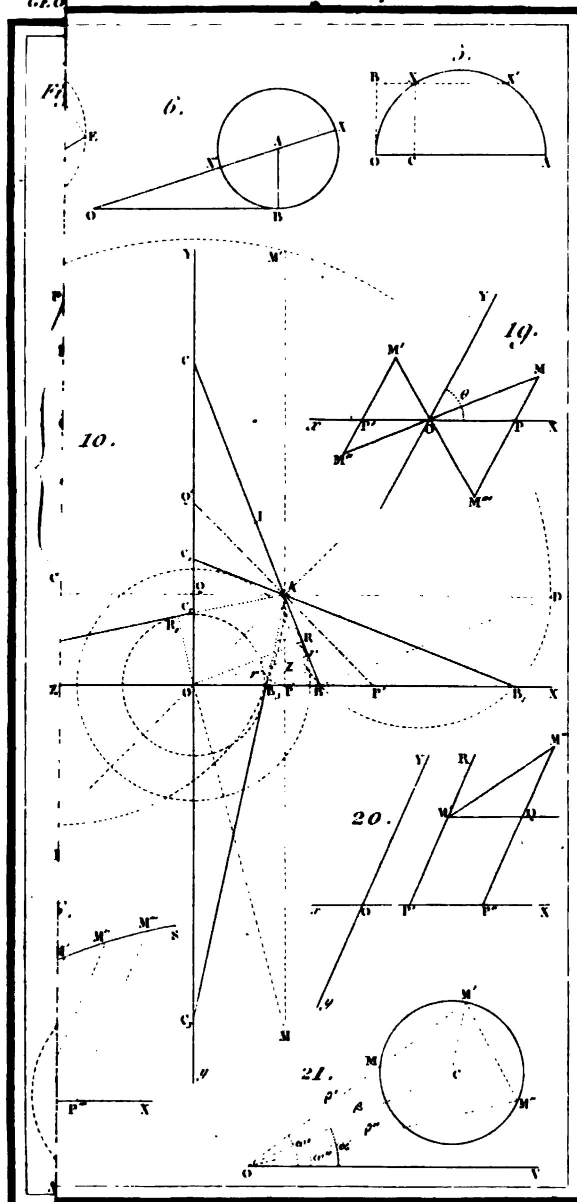
Numéros des articles.

Équation du plan 511, 513
Toute équation du premier degré à trois variables représente un plan 512
Problèmes sur les plans 514-526
Transformation des coordonnées dans l'espace 527-540
Équation des surfaces cylindriques 541, 542, 543
Équation des surfaces coniques 544, 545, 546
Équation des surfaces de révolution 547, 548
Équation des surfaces conoïdes 549
Problèmes à résoudre 550

FIN DE LA TABLE.

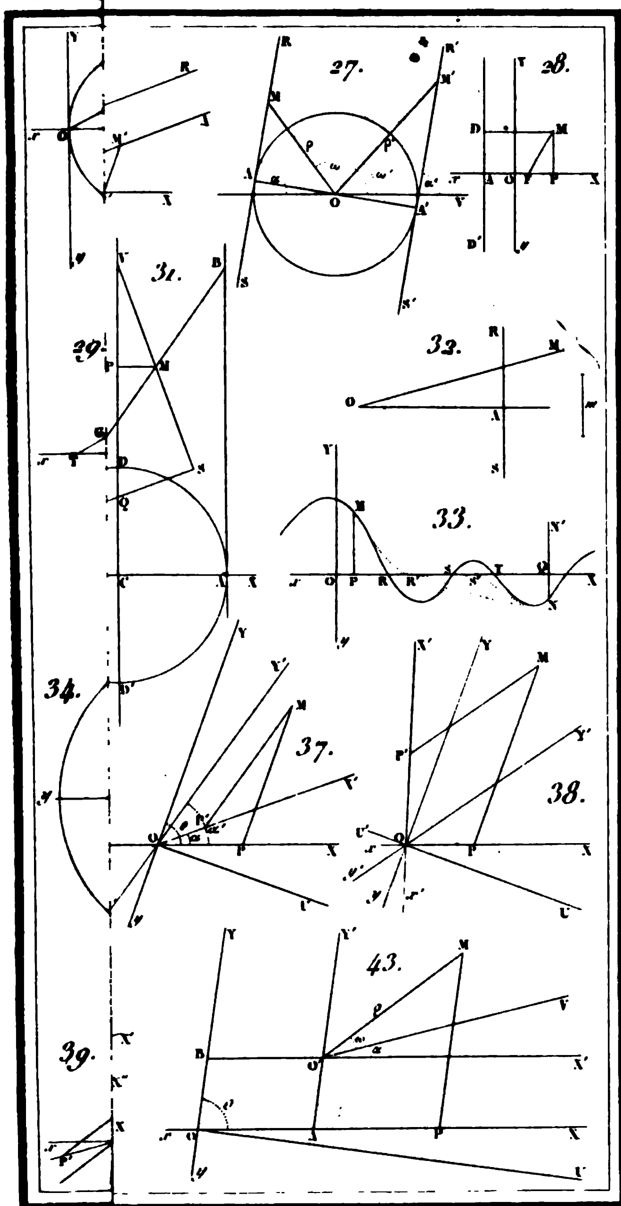


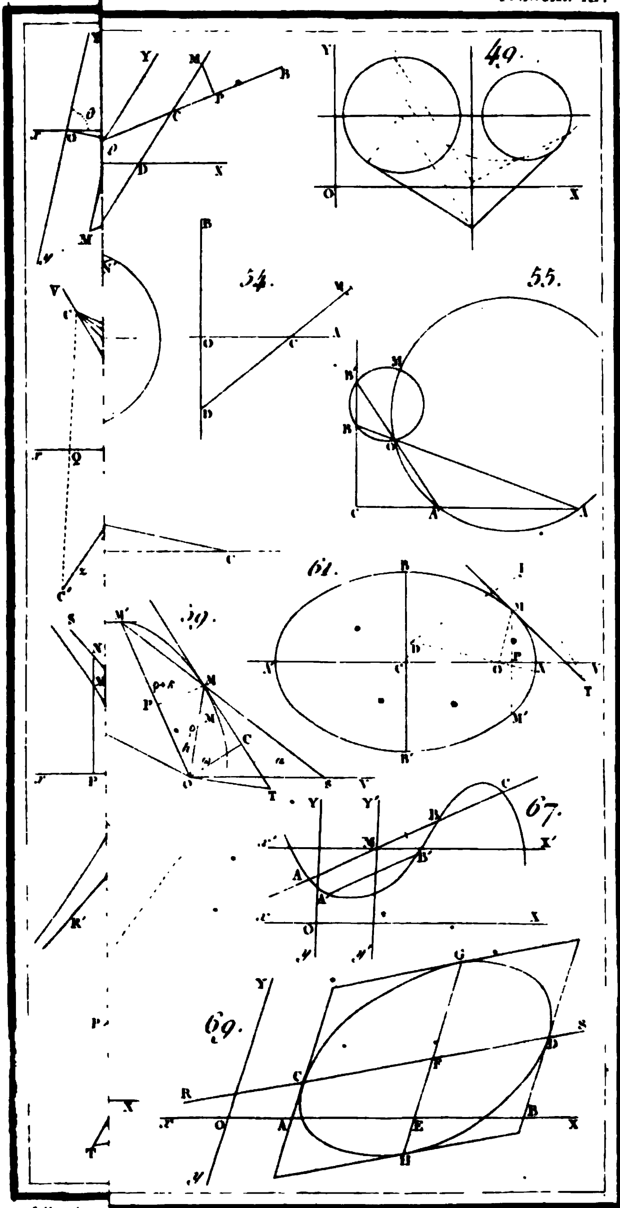
Gravé par Dulau

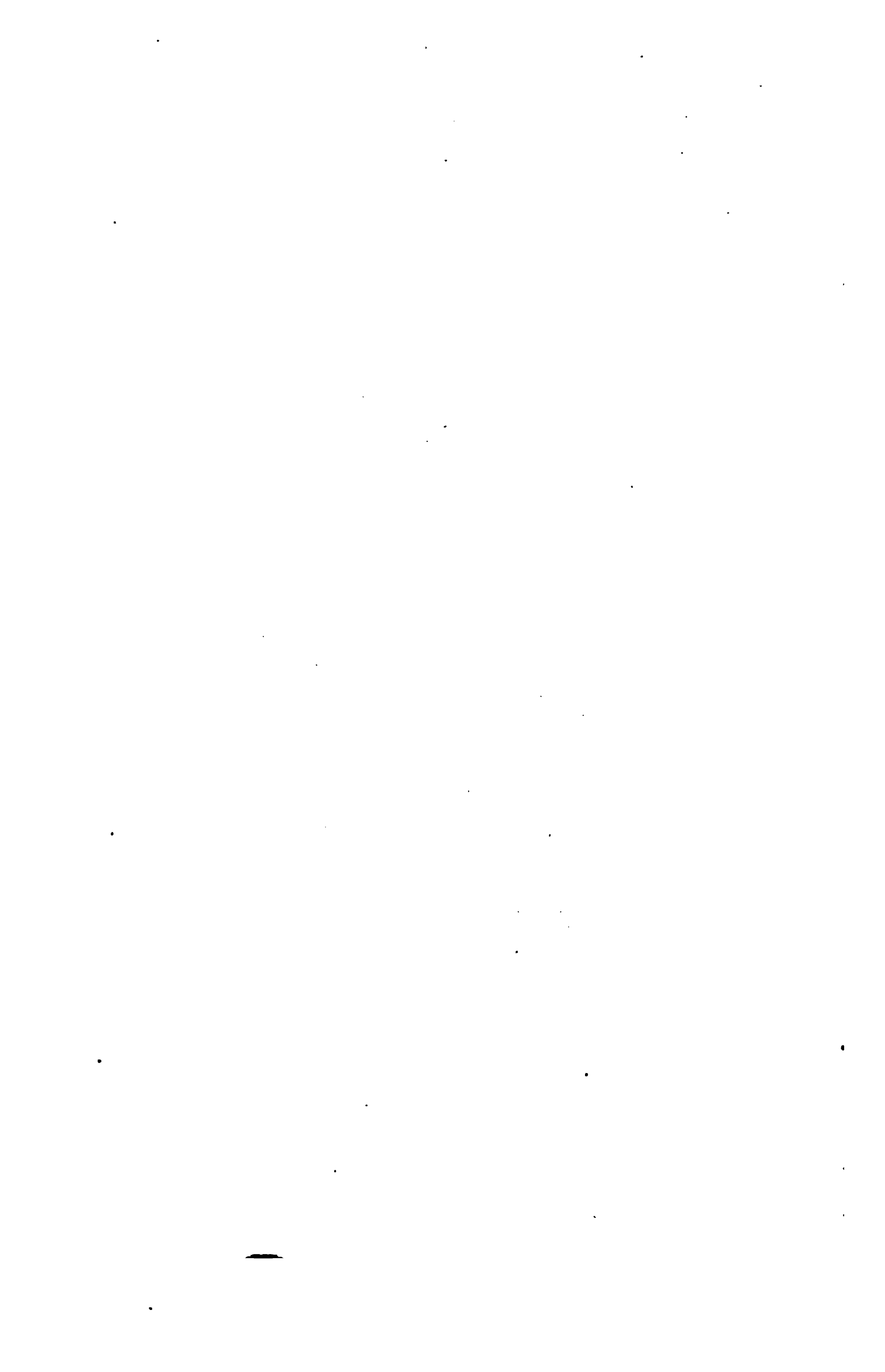


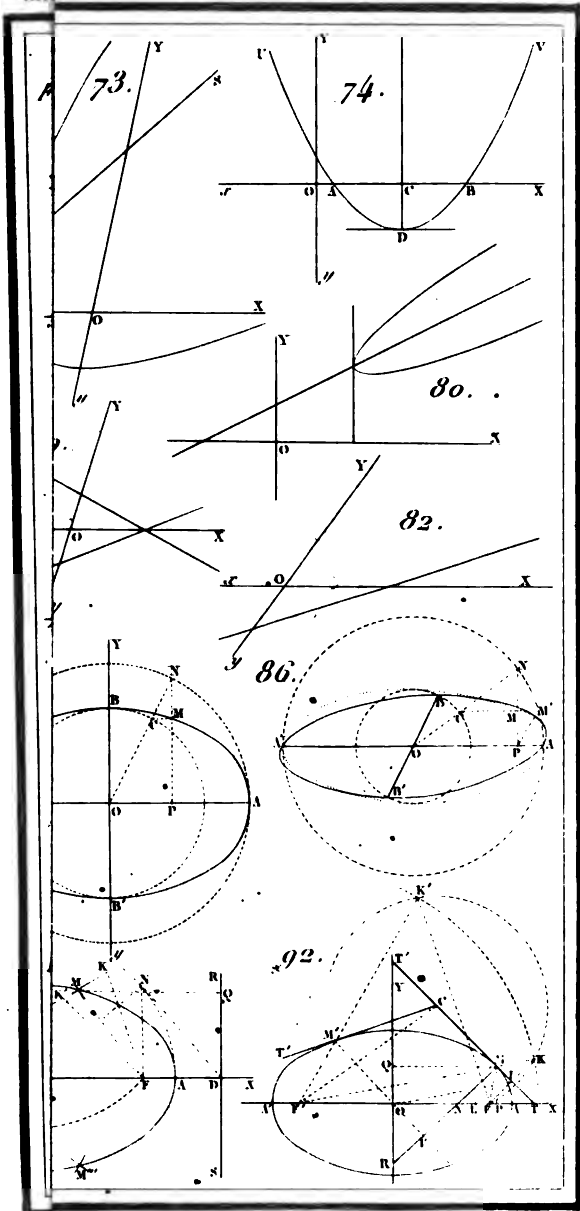
Lib

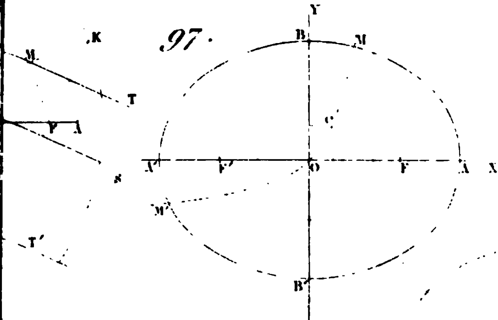
Gravé par Durau

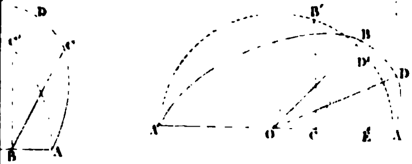

27.
28.
29.
31.
32.
33.
34.
37.
38.
39.
43.

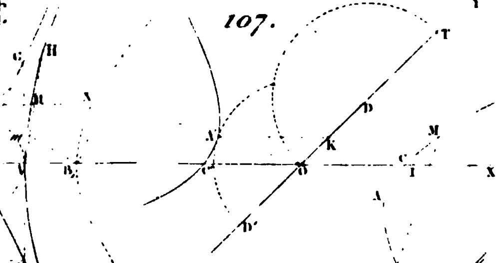

49.
54.
55.
59.
61.
67.
69.

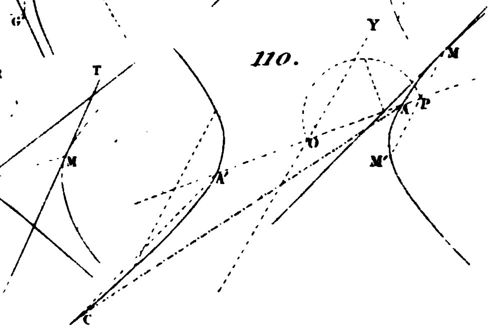


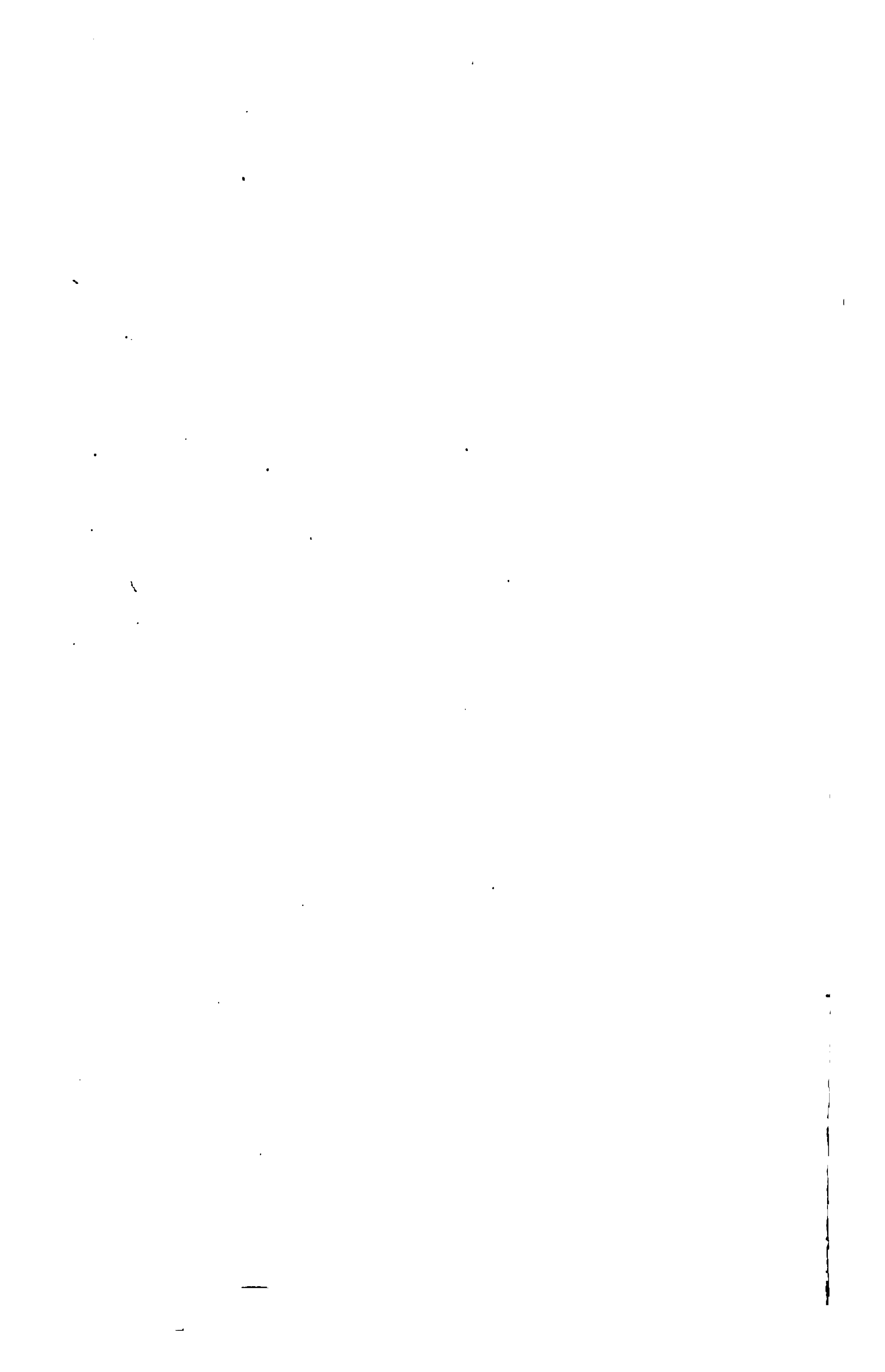

73.
74.
80.
82.
86.
92.

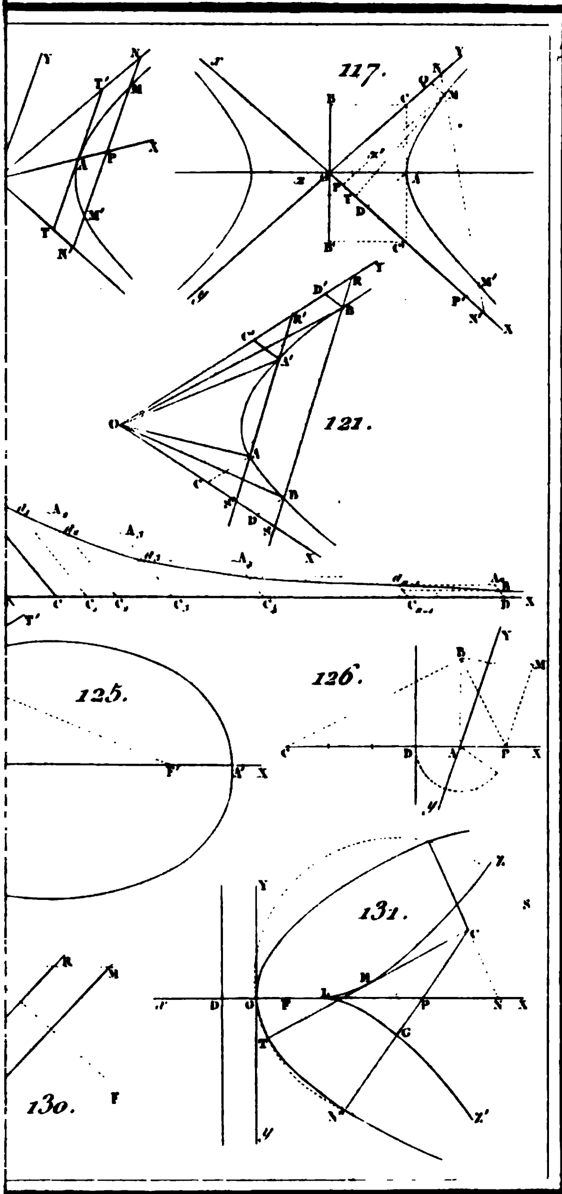

97.
K
M
T
P
A
s
T'
Y
B
M
C'
A'
F'
O
F
A
X
M'
B'


102.
D
C''
C'
B
A
B'
B
D'
D
A'
O
C
E
A

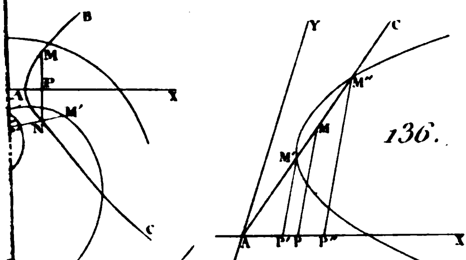

107.
Y
T
H
D
K
M
X
A'
O
C
I
D'
A
G'

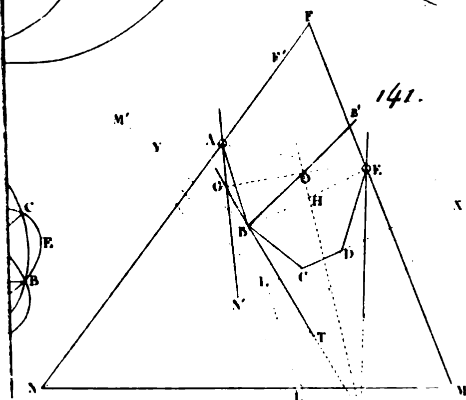

110.
Y
M
T
K
P
O
M
M'
A'
C

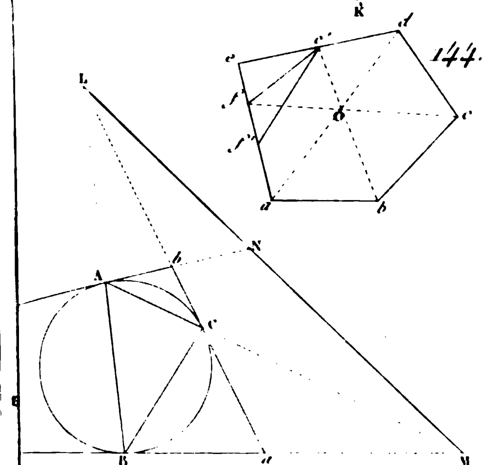


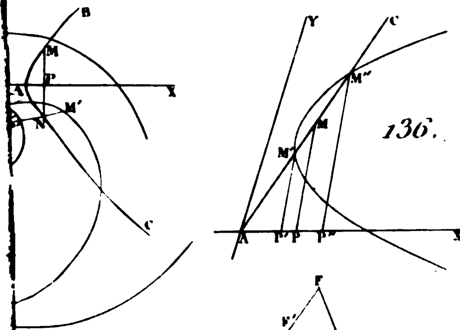


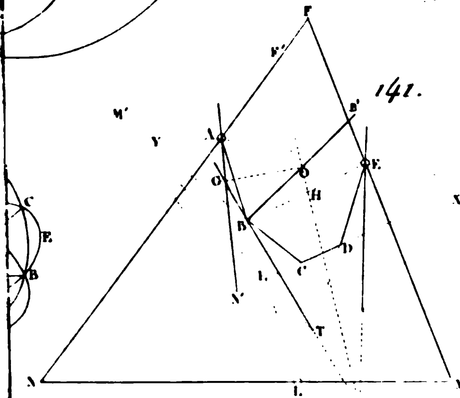
Gravé par Dulau.

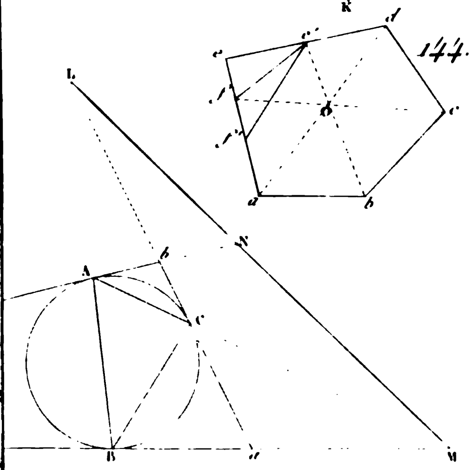

B
M
P
A
X
M′
N
C
Y
C
M″
M
M′
A
P′
P
P″
X
136.

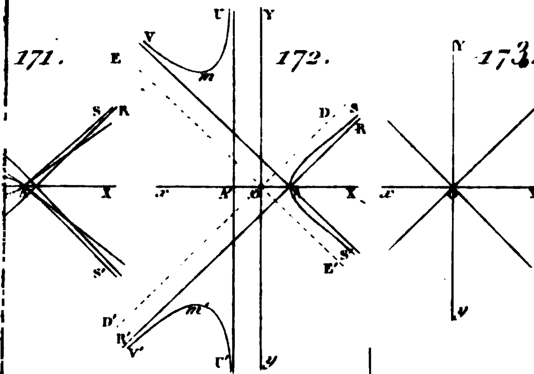

F
F′
141.
B′
M′
Y
A
E
O
O
H
X
B
D
C
L
N′
T
N
L
M
K

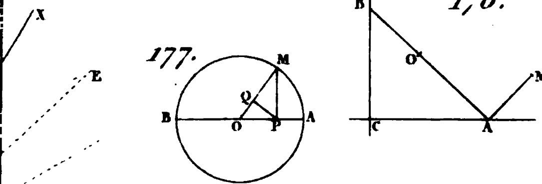

d
e
c′
144.
f′
O
c
f″
a
b
L
N
b
A
C
E
B
a
M

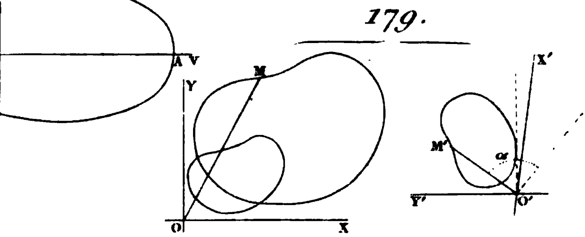

B
M
P
A
X
M′
N
C
Y
C
M″
M
M′
A
P′
P
P″
X
136.

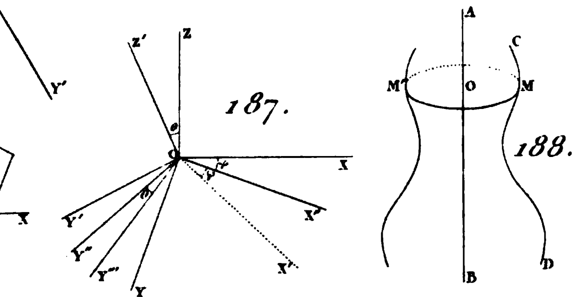

F
F′
141.
M′
B′
Y
A
O
E
G
H
X
B
D
C
L
N′
T
N
L
M
K


d
e
e′
144.
L
f′
O
c
f″
a
b
N
b
A
C
B
a
M









Gravé par Durau.